卓越

卓越系列·21世纪高职高专精品规划教材

公共基础课适用

高等数学（下册）

Advanced Mathematics（Ⅱ）

李君湘　邱忠文　主编

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

卓越系列·21世纪高职高专精品规划教材(公共基础课适用)

高等数学

(下册)

Advanced Mathematics(Ⅱ)

李君湘 邱忠文 主编

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书系“21世纪高职高专精品规划教材”之一，是为公共基础课所编写的高等数学教材.

本书参照《高等数学课程教学基本要求》编写，分上、下两册.上册内容为单元函数微积分，包括函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理及导数的应用、不定积分及定积分，共6章.下册内容为空间解析几何、多元函数微积分、级数和微分方程.与本书配套的还有《高等数学习题参考解答》、《高等数学辅导24讲》.

本书可作为高职高专教材，亦可作为学习高等数学的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.下册/李君湘，邱志文主编.—天津：天津大学出版社，2008.1

21世纪高职高专精品规划教材

ISBN 978-7-5618-2592-1

Ⅰ.高… Ⅱ.①李…②邱… Ⅲ.高等数学－高等学校：技术学校－教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第193992号

出版发行	天津大学出版社
出 版 人	杨欢
地 址	天津市卫津路92号天津大学内(邮编：300072)
网 址	www.tjup.com
电 话	发行部：022-27403647 邮购部：022-27402742
印 刷	昌黎太阳红彩色印刷有限责任公司
经 销	全国各地新华书店
开 本	169mm×239mm
印 张	14.75
字 数	306千
版 次	2008年1月第1版
印 次	2008年1月第1次
印 数	1－4 000
定 价	26.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请向我社发行部门联系调换。

版权所有 侵权必究

前　　言

"高等数学"是高等院校的一门重要的基础理论课程.为了适应高职高专院校学生和大学专科学生学习高等数学课程的需要,我们参照《高等数学课程教学基本要求》并结合多年高职高专教学的实际工作经验,编写了这套教材.

本书共12章分为上、下两册.上册的内容包括单元函数微积分,共6章;下册的内容包括空间解析几何、多元函数微积分、级数和微分方程,共6章.第1、2、5、6(1~4)、9、10、11章由邱忠文执笔,第3、4、6(5~7)、7、8、12由李君湘执笔.本书基本上覆盖了现行理工科类院校高等数学课程的主要教学内容,而且在结构及习题的配备等方面都更适合高职高专学生的需求.本书也可以作为网络高等教育、函授、高等职业技术教育或成人继续教育大专生的高等数学课程的教科书.

与本书配套的《高等数学习题参考解答》一书是应学生们的要求编写的,它可以辅导和帮助同学们更好地学习高等数学,进一步提高解题能力和逻辑思维能力.

限于编者的水平,书中不免有疏误,恳请读者指正.

编　者

2007年10月于天津大学

目　　录

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

7

向量代数与空间解析几何

本章学习要点

1. 理解空间直角坐标系的概念,会求空间中两点间的距离.

2. 掌握向量的概念及其坐标表示法,会用向量的坐标表示两个向量的和、差、数量积及向量积.

3. 知道两向量之间的夹角公式,及两向量之间的平行、垂直条件.

4. 可以用向量的坐标表示向量的模、方向余弦及单位向量.

5. 熟悉平面及直线的方程,知道平面与平面、直线与直线、直线与平面的位置关系.

6. 了解常见的二次曲面的方程.

7. 理解本章中的基本内容(包括例题),能独立完成本章中的习题.

本章将通过空间直角坐标系把空间上的点与有序数组,空间上的曲面、曲线与方程建立一一对应关系,即用代数的方法研究空间图形问题.

另外,空间解析几何还为学习高等数学中多元函数微积分学的内容提供直观的几何解释.

由于在自然科学和工程技术中向量代数有着广泛的应用,本章还将介绍向量代数的有关基础知识,并以向量为工具,研究有关的空间图形问题.

7.1 空间直角坐标系

为建立空间图形与方程的联系,需要建立空间点与有序数组之间的联系.这种联系常是通过空间直角坐标系来实现.

空间直角坐标系规定如下.

过空间的一个定点 O,作三条互相垂直的数轴,它们都以点 O 为原点,且一般具有相同的长度单位.这三条数轴分别称为 Ox 轴(横轴)、Oy 轴(纵轴)、Oz 轴(竖轴),统称为坐标轴.它们的正向构成右手系(见图 7-1,空间直角坐标系的示意图参见图 7-2).于是这样的三条坐标轴就构成了空间直角坐标系,点 O 称为坐标原点.

三条坐标轴中的任意两条轴所确定的平面称为坐标面,并分别称为 xOy 面、yOz 面、zOx 面.三个坐标面把空间分成 8 个部分.每一部分称为一个卦限.含有 Ox、Oy 与 Oz 三轴正半轴的那个卦限称为第一卦限.其他第二卦限、第三卦限、第四卦限在 xOy 面的上方,且按逆时针方向确定,第五卦限至第八卦限依次在 xOy 面的下方.第五卦限在第一卦限下方.这 8 个卦限分别用字母 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ 表示(见图 7-2).

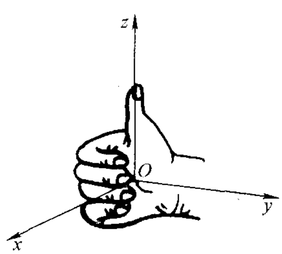

图 7-1

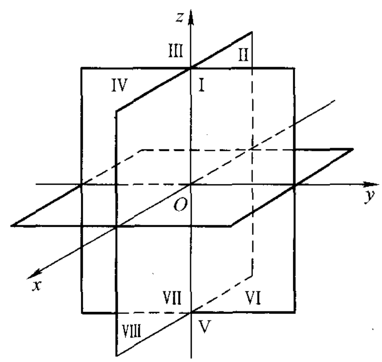

图 7-2

取定空间直角坐标系后,就可以建立空间点与数组之间的对应关系.

设 M 为空间一个点,过点 M 作三个平面分别垂直于 Ox 轴、Oy 轴和 Oz 轴.它们与 Ox 轴、Oy 轴、Oz 轴交点依次为 P、Q、R(见图 7-3).这三点在 Ox 轴、Oy 轴、Oz 轴的坐标依次为 x、y、z.于是,空间的一个点 M,就唯一地确定了一个有序数组 x、y、z.反过来,若已知一有序数组 x、y、z,可依次在 Ox 轴、Oy 轴、Oz 轴上分别取坐标为 x、y、z 的对应点 P、Q、R,过 P、Q、R 分别作垂直于 Ox 轴、Oy 轴、Oz 轴的平面.这三个平面的交点 M 便是由有序数组 x、y、z 所确定的唯一的点 M.这样,就建立了空间点 M 和有序数

组 x、y、z 之间的一一对应关系.该数组 x、y、z 称为点 M 的坐标.并依次称 x、y、z 为点 M 的横坐标、纵坐标、竖坐标.坐标为 x、y、z 的点 M 通常记为 $M(x,y,z)$.

这样,在空间直角坐标系下,就建立了空间点 M 与有序数组 (x,y,z) 之间的一一对应关系.

空间中的点在空间直角坐标系内的不同卦限,其坐标的正负号亦不相同.下面由表格给出各卦限中的点坐标的正负号.

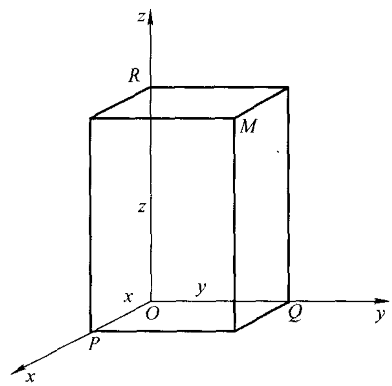

图 7-3

卦限	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ
坐标的正负号	(+,+,+)	(−,+,+)	(−,−,+)	(+,−,+)
卦限	Ⅴ	Ⅵ	Ⅶ	Ⅷ
坐标的正负号	(+,+,−)	(−,+,−)	(−,−,−)	(+,−,−)

由此,可给出两个点关于坐标面、坐标轴、原点对称的含义.

两个点 M、Q 称为关于 xOy 面对称,即连接两点的线段 MQ 与 xOy 面垂直,且被其平分.若点 M 的坐标为 $M(x,y,z)$,则点 M 关于 xOy 面对称的点 Q 的坐标为 $Q(x,y,-z)$(见图 7-4).同样,点 $M(x,y,z)$ 关于 yOz 面对称的点 Q_1 的坐标为 $Q_1(-x,y,z)$;点 $M(x,y,z)$ 关于 zOx 面对称的点 Q_2 的坐标为 $Q_2(x,-y,z)$.

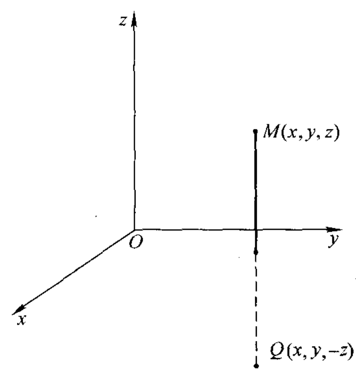

图 7-4

两个点 M、Q_3 称为关于 Oz 轴对称,即连接两点的线段 MQ_3 与 Oz 轴垂直相交,且被 Oz 轴所平分.容易看出,若点 M 坐标为 $M(x,y,z)$,则点 M 关于 Oz 轴对称的点 Q_3 的坐标为 $Q_3(-x,-y,z)$(见图 7-5).同样,点 $M(x,y,z)$ 对称于 Ox 轴的点 Q_4 的坐标为 $Q_4(x,-y,-z)$;点 $M(x,y,z)$ 对称于 Oy 轴的点 Q_5 的坐标为 $Q_5(-x,y,-z)$.

两个点 M、Q_6 称为对称于原点 O,即连接两点 MQ_6 的线段通过点 O,且被点 O 所平分.点 $M(x,y,z)$ 关于点 O 对称的点 Q_6 的坐标为 $Q_6(-x,-y,-z)$(见图 7-6).

在坐标面上和坐标轴上的点,其坐标各有一定的特征.如果点 $M(x,y,z)$ 在 yOz 面上,则有 $x=0$;同样,在 zOx 面上的点,有 $y=0$;在 xOy 上的点,有 $z=0$.如果点 M 在 Ox 轴上,则 $y=z=0$;同样,在 Oy 轴上的点,有 $x=z=0$,在 Oz 轴上的点,有 $x=y=0$.如果点 M 在原点,则有 $x=y=z=0$.

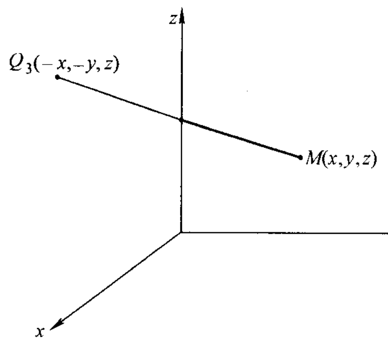

图 7-5

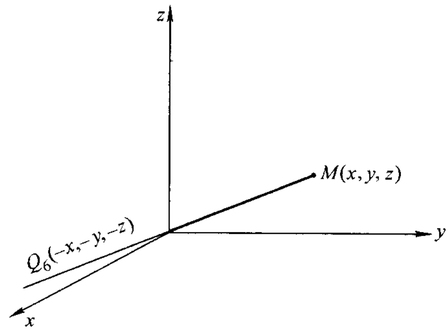

图 7-6

设空间两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$、$M_2(x_2,y_2,z_2)$,如何用两点的坐标来表达它们间的距离 d? 可以过点 M_1、M_2 各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面.这六个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体(见图 7-7).

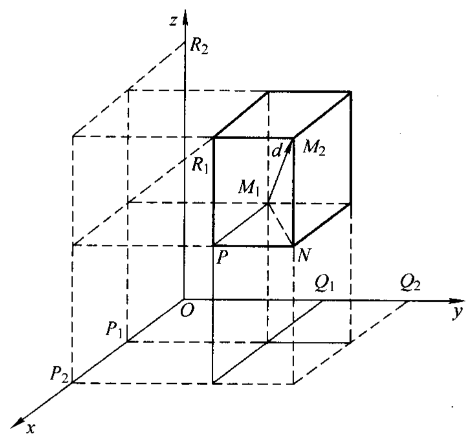

图 7-7

由于 $\triangle M_1NM_2$ 是直角三角形(其中 $\angle M_1NM_2$ 为直角),有

$$d^2 = |M_1M_2|^2 = |M_1N|^2 + |NM_2|^2$$
$$= |M_1P|^2 + |PN|^2 + |NM_2|^2,$$

又因

$$|M_1P| = |P_1P_2| = |x_2 - x_1|,$$
$$|PN| = |Q_1Q_2| = |y_2 - y_1|,$$
$$|NM_2| = |R_1R_2| = |z_2 - z_1|,$$

所以
$$d = |M_1M_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

这就是空间两点的距离公式.

特别是点 $M(x,y,z)$到原点 $O(0,0,0)$的距离

$$d = |OM| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

例 1.1 验证以原点 O、$A(-2,1,2)$、$B(-1,3,0)$三点为顶点的三角形是等腰三角形.

解 因为

$$|OA| = \sqrt{(-2)^2+1^2+2^2} = 3,$$
$$|OB| = \sqrt{(-1)^2+3^2+0} = \sqrt{10},$$
$$|AB| = \sqrt{(-1+2)^2+(3-1)^2+(0-2)^2} = 3.$$

所以 $|OA| = |AB|$,故以 O、A、B 为顶点的三角形是等腰三角形.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

例 1.2 求中心为 $Q(a,b,c)$、半径为 R 的球面方程.

解 与点 Q 距离为 R 的所有点 $P(x,y,z)$ 的集合就是所求球面.因此点 P 在球面上满足

$$|PQ| = R \text{ 或 } |PQ|^2 = R^2,$$

即
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2.$$

这就是所求的球面方程.

中心在原点,半径为 R 的球面方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

习题 7-1

1. 写出点 $M(x,y,z)$ 关于 xOy、yOz、zOx 坐标面及 Ox、Oy、Oz 坐标轴对称的点的坐标.
2. 求点 $M(4,-3.5)$ 与原点及各坐标轴的距离.
3. 在 Oz 轴上求与点 $A(-4,1,7)$ 及点 $(3,5,-2)$ 等距离的点.
4. 求以 $A(4,1,9)$、$B(10,-1,6)$、$C(2,4,3)$ 为顶点的三角形的周长 l.
5. 在 yOz 面上,求与三个已知点 $A(3,1,2)$、$B(4,-2,-2)$、$C(0,5,1)$ 等距离的点.

7.2 向量代数

7.2.1 向量的概念

在自然科学中,经常遇到这样一种量,它们既有大小,又有方向.例如,力、速度、位移等等,这一种量称为向量(矢量).

在数学上,用有向线段表示向量,有向线段的长度表示向量的大小,有向线段的方向表示向量的方向.以 M_1 为起点、M_2 为终点的有向线段表示的向量,记为 $\overrightarrow{M_1M_2}$.有时表示向量也可用一个粗体字母或一个上面加有箭头的字母,如 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{F}$ 或 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{i}$、$\vec{F}$ 等等(见图 7-8).

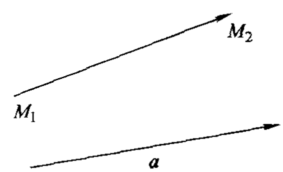

图 7-8

向量的大小称为向量的模.向量 $\boldsymbol{a}$(或 $\vec{a}$)、$\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模依次记为 $|\boldsymbol{a}|$(或 $|\vec{a}|$)、$|\overrightarrow{M_1M_2}|$.模等于 1 的向量称为单位向量.模等于零的向量称为零向量.零向量的方向可以看作是任意的,记为 $\mathbf{0}$(或 $\vec{0}$).

概括地说,向量的两个要素是模和方向.

定义 2.1 若两个向量模相等,方向相同,则称这两个向量相等,记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

定义 2.2 若两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的模相等,并且方向相反,则称向量 $\boldsymbol{a}$ 为向量 $\boldsymbol{b}$ 的负向量(或逆向量),记为 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$.

应当指出,负向量是相互的,当 $\boldsymbol{b}$ 是 $\boldsymbol{a}$ 的负向量时,$\boldsymbol{a}$ 也是 $\boldsymbol{b}$ 的负向量.

7.2.2 向量的运算

1. 向量的加法

设两个非零且不平行的向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$,它们的加法定义如下.

定义 2.3 以一个定点 O 为起点,作向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$,并以这两个向量为邻边作平行四边形,从起点 O 到这个平行四边形的对角顶点 C 所决定的向量 $\overrightarrow{OC}$,称为向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的和,记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$(见图 7-9),即

$$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}.$$

对于两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的加法还有三角形法,这个方法的步骤是:先作向量 $\boldsymbol{a}$,再以向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点作为向量 $\boldsymbol{b}$ 的起点,作向量 $\boldsymbol{b}$,则从 $\boldsymbol{a}$ 的起点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点所决定的向量,就是向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$(见图 7-10),即

$$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}.$$

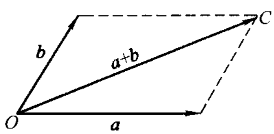

图 7-9

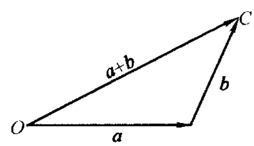

图 7-10

三角形法对于多个向量求和时较为方便.用前一个向量的终点作为后一个向量的起点,依次下去直到最后一个向量.然后由第一个向量的起点与最后一个向量的终点所决定的向量,即为这多个向量的和向量.

应当注意的是如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是平行的,或者是位于同一条直线上,那么由三角形法可知它们的和是这样一个向量:当 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 是同方向时,和向量的方向与 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的方向相同,和向量的模等于 $|\boldsymbol{a}|$ 与 $|\boldsymbol{b}|$ 的和;当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相反时,和向量的方向与模较大的向量方向相同,和向量的模等于两向量的模之差.特殊情况是

$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}.$$

向量的加法满足以下的运算规律:

(1)交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(2)结合律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

当 $|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\neq 0$ 时,有

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|,$$

上面不等式中的等号,当且仅当 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 方向相同时成立.也就是说,当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行时,有

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|.$$

由向量加法的三角形法可知,上面这个不等式实际上是反映了三角形两边之和大于第三边这样一个事实.

2. 向量的减法

向量的减法是利用负向量来定义的.

定义 2.4　向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差规定为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的负向量之和.即

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差,也叫 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的减法(见图 7-11).

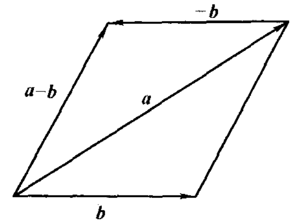

图 7-11

3. 向量与数的乘法

定义 2.5　设 λ 是一个实数,$\boldsymbol{a}$ 是非零向量,它们的乘积 $\lambda\boldsymbol{a}$ 定义如下.

(1) $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量.

(2) $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$,即 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的模是 $\boldsymbol{a}$ 的模的 $|\lambda|$ 倍.

(3) $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向:

若 $\lambda>0$,$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同;

若 $\lambda<0$,$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反;

若 $\lambda=0$,$\lambda\boldsymbol{a}$ 是零向量.

特别是当 $\lambda=0,1,-1$ 时,有 $0\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$,$1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$,$(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$,即分别得到零向量、向量本身和负向量.

向量与数量的乘积满足以下运算律(设 λ,μ 为实数):

(1)结合律　$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\mu\lambda)\boldsymbol{a}$;

(2)分配律　$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$,$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$;

(3)两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行(或称共线)的充分必要条件为存在 $\lambda\neq0$,使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$.

若 $|\boldsymbol{a}|\neq0$,则 $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ 是与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量,记作 $\boldsymbol{a}^{\circ}$.即

$$\boldsymbol{a}^{\circ}=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}\text{(或 }\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^{\circ}\text{)}.$$

7.2.3　向量的坐标表达式

1. 向量在轴上的投影

为了沟通数与向量的联系,需借助于向量在坐标轴上的投影来实现.

设向量 $\overrightarrow{AB}$ 与轴 l 的正向夹角为 $\varphi(0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$.过 $\overrightarrow{AB}$ 的起点 A,终点 B 分别作轴 l 的垂直平面,这两个垂直平面与 l 轴的交点为 A_1、B_1.分别称为点 A 和点 B 在轴 l 上的投影(图 7-12).轴 l 上的有向线段 $\overrightarrow{A_1B_1}$ 的值 A_1B_1,称为向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 l 上的投影,记为 $\mathrm{Prj}_l\overrightarrow{AB}=A_1B_1$.轴 l 上有向线段 $\overrightarrow{A_1B_1}$ 的值 A_1B_1 是这样一个数:这个数的绝对值等于 $\overrightarrow{A_1B_1}$ 的长度;这个数的符号由 $\overrightarrow{A_1B_1}$ 的方向决定:当 $\overrightarrow{A_1B_1}$ 与 l 同向时 $A_1B_1>0$;当 $\overrightarrow{A_1B_1}$ 与 l 反向时,$A_1B_1<0$;当点 A_1 与点 B_1 重合时,$A_1B_1=0$.

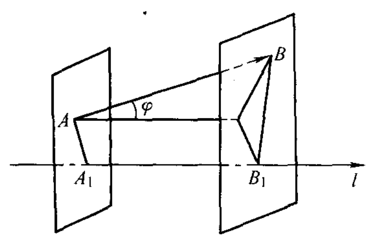

图 7-12

如果在轴 l 上选定原点及单位长度,并以 x_1、x_2 分别表示 A_1、B_1 在数轴 l 上的坐标,则容易验证 $\overrightarrow{AB}$ 在数轴 l 上的投影有下式成立:

$$\mathrm{Prj}_l\overrightarrow{AB} = x_2 - x_1. \tag{2.1}$$

关于向量的投影,还有以下两个定理.

定理 2.1 向量 $\overrightarrow{AB}$在轴 l 上的投影,等于向量的模乘以轴与向量的夹角 φ 的余弦,即

$$\mathrm{Prj}_l\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|\cos\varphi. \tag{2.2}$$

证 如图 7-13,过向量 $\overrightarrow{AB}$的起点 A 引射线 l_1,使 $l_1 /\!/ l$ 且 l_1 与 l 同向,则轴 l 与 $\overrightarrow{AB}$的夹角等于轴 l_1 与 $\overrightarrow{AB}$的夹角 φ,且有

$$\mathrm{Prj}_l\overrightarrow{AB} = \mathrm{Prj}_{l_1}\overrightarrow{AB}.$$

又 $$\mathrm{Prj}_{l_1}\overrightarrow{AB} = AB_2 = |\overrightarrow{AB}|\cos\varphi,$$

所以

$$\mathrm{Prj}_l\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|\cos\varphi.$$ 证毕.

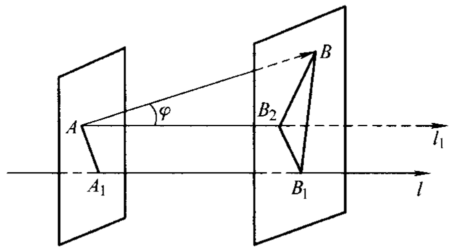

图 7-13

由定理 2.1 可以看出,$\overrightarrow{AB}$在轴 l 上的投影与$\overrightarrow{AB}$和 l 的夹角 φ 有关.当 φ 为锐角时,投影为正;当 φ 为钝角时,投影为负;当 φ 为直角时,投影为零.

推论 1 相等的向量在同一轴上的投影相等.

定理 2.2 两个向量的和在轴上的投影等于两个向量在该轴上投影的和,即

$$\mathrm{Prj}_l(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2) = \mathrm{Prj}_l\boldsymbol{a}_1 + \mathrm{Prj}_l\boldsymbol{a}_2. \tag{2.3}$$

证明 如图 7-14,由向量加法的三角形法,设 $\boldsymbol{a}_1 = \overrightarrow{AB}$,$\boldsymbol{a}_2 = \overrightarrow{BC}$,则

$$\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

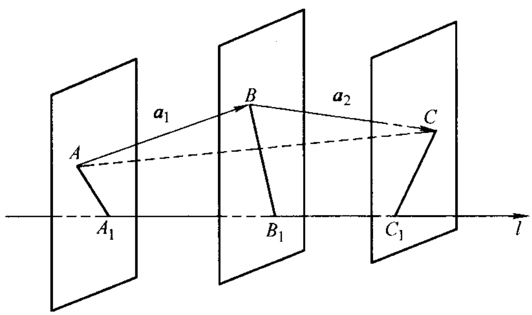

图 7-14

设点 A、B、C 在轴 l 上的投影分别为 A_1、B_1、C_1,在轴上选定原点及单位长度,并设 A_1、B_1、C_1 的坐标分别为 x_1、x_2、x_3,则由式(2.1)可知

$$\begin{aligned}\mathrm{Prj}_l(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2) &= \mathrm{Prj}_l\overrightarrow{AC} = x_3 - x_1 = (x_3 - x_2) + (x_2 - x_1) \\ &= \mathrm{Prj}_l\overrightarrow{BC} + \mathrm{Prj}_l\overrightarrow{AB} = \mathrm{Prj}_l\boldsymbol{a}_2 + \mathrm{Prj}_l\boldsymbol{a}_1.\end{aligned}$$

即 $$\mathrm{Prj}_l(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2) = \mathrm{Prj}_l\boldsymbol{a}_1 + \mathrm{Prj}_l\boldsymbol{a}_2.$$ 证毕.

推论 2 定理 2.2 可以推广到有限个向量,即

$$\mathrm{Prj}_l(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \boldsymbol{a}_n) = \mathrm{Prj}_l\boldsymbol{a}_1 + \mathrm{Prj}_l\boldsymbol{a}_2 + \cdots + \mathrm{Prj}_l\boldsymbol{a}_n. \tag{2.4}$$

2. 向量的坐标表示法

为了使向量的运算代数化，下面引入向量的坐标表示法.

在空间直角坐标系中，各取 Ox 轴、Oy 轴和 Oz 轴正方向的单位向量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$，这三个向量称为空间直角坐标系中的三个基本单位向量(图 7-15).

设 $\boldsymbol{a}$ 是以坐标原点 $O(0,0,0)$ 为起点，终点为 $M(x,y,z)$ 的向量 $\overrightarrow{OM}$，则

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NM}$$
$$= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k},$$

(这是因为点 P、Q、R 的坐标为 $P(x,0,0)$，$Q(0,y,0)$，$R(0,0,z)$ 的缘故.)

即
$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OM} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}.$$

这就是向量 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标表达式. 而有序数组 x、y、z 称为向量 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标，记为 (x,y,z)，即

$$\overrightarrow{OM} = (x,y,z) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}. \tag{2.5}$$

若向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的起点为点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，终点为点 $M_2(x_2,y_2,z_2)$，根据向量的代数运算规律，可以得到向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的表达式，由图 7-16 可知

$$\overrightarrow{OM_1} = x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k},$$
$$\overrightarrow{OM_2} = x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k}.$$

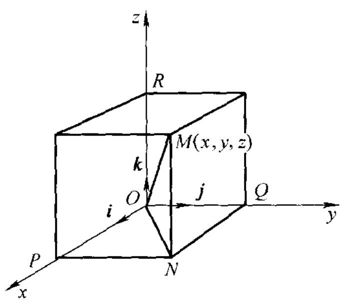

图 7-15

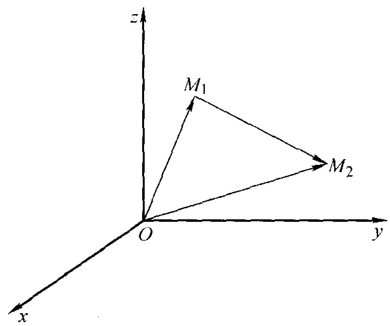

图 7-16

故

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$$
$$= (x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k}) - (x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k})$$
$$= (x_2 - x_1)\boldsymbol{i} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{j} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{k}$$
$$= (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1). \tag{2.6}$$

在一般情况下，向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的坐标是其终点 M_2 的坐标减去起点 M_1 的坐标.

如果向量的起点在坐标原点 O，终点为 $M(x,y,z)$，则向量 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标就与它的终点坐标一致，即

$$\overrightarrow{OM} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} = (x,y,z).$$

利用向量的坐标表示法,向量的加、减、数乘运算都可以用向量的坐标运算来进行.

设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$,$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$.则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}&=(a_x,a_y,a_z)\pm(b_x,b_y,b_z)\\&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\pm(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=(a_x\pm b_x)\boldsymbol{i}+(a_y\pm b_y)\boldsymbol{j}+(a_z\pm b_z)\boldsymbol{k}\\&=(a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z).\\\lambda\boldsymbol{a}&=(\lambda a_x)\boldsymbol{i}+(\lambda a_y)\boldsymbol{j}+(\lambda a_z)\boldsymbol{k}\\&=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z).\end{aligned}$$

例 2.1 设 $\boldsymbol{a}=(1,-2,0)$,$\boldsymbol{b}=(-2,2,1)$,求 $\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$.

解 $$\begin{aligned}\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}&=(1,-2,0)+3(-2,2,1)\\&=(1-6,-2+6,0+3)=(-5,4,3).\end{aligned}$$

例 2.2 设 $\boldsymbol{a}=(1,-1,0)$,$\boldsymbol{b}=(-2,3,1)$,$\boldsymbol{c}=(2,-6,-4)$.求证:$3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{c}$.

证明

$$\begin{aligned}3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}&=3(1,-1,0)+2(-2,3,1)\\&=(3-4,-3+6,0+2)=(-1,3,2).\end{aligned}$$

由于

$$3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{c},$$

根据两非零向量 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 的充分必要条件是 $\lambda\neq0$,$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$,可知 $3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{c}$.

例 2.3 设 $A(x_1,y_1,z_1)$ 和 $B(x_2,y_2,z_2)$ 为两已知点,而在 AB 直线上的点 M 分有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 为两个有向线段 $\overrightarrow{AM}$ 与 $\overrightarrow{MB}$,使它们的值的比等于某数 $\lambda(\lambda\neq-1)$,即

$$\frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MB}}=\lambda,$$

求分点 M 的坐标.

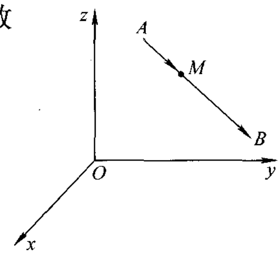

图 7-17

解 因为 $\overrightarrow{AM}$ 与 $\overrightarrow{BM}$ 在一直线上(图 7-17),所以依题意有

$$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}.$$

而 $$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA},\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM},$$

因此 $\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM})$.从而 $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{1+\lambda}(\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB})$,即

$$\begin{aligned}(x,y,z)&=\frac{1}{1+\lambda}((x_1,y_1,z_1)+\lambda(x_2,y_2,z_2))\\&=\frac{1}{1+\lambda}(x_1+\lambda x_2,y_1+\lambda y_2,z_1+\lambda z_2).\end{aligned}$$

由此得分点 M 的坐标为

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.\qquad(2.7)$$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com