有限群论

〔德〕贝·胡佩特 著

第一卷 第二分册

福建人民出版社

有限群论

第一卷 第二分册

有限群论

第一卷

第二分册

[德] B. 胡佩特著

黄建华　李慧陵译

福建人民出版社

1992年·福州

闽新登字 01 号

有限群论

第一卷　第二分册

[德] B. 胡佩特著

黄建华　李慧陵译

*

福建人民出版社出版

（福州得贵巷 27 号）

福建省新华书店发行

福建省地质测绘印刷厂印刷

开本 850×1168 毫米 1/32 15 印张 358 千字

1992 年 5 月第 1 版

1992 年 5 月第 1 次印刷

印数：1—1000

ISBN 7—211—01699—X

0·2　　定价：6.60 元

目　　录

第四章　转移与 p—幂零群

第五章　表　示　论

第六章　可　解　群

第四章　转移与 p—幂零群

确定一个已知群的非单性或可解性，是群论中最重要的课题之一．我们在第一章§8及所附习题中，曾对此进行了一些初步的、不太深入的探讨，除此以外，有两种行之有效的方法可供我们应用：其一是我们在本章所考察的单项表示方法与转移方法，再就是我们将要在第五章和第二卷中所要讨论的群指标理论．对这两种方法可以做如下比较：

1）转移方法考察群 G 到它的一个子群 H 的可换商群 H/H' 的同态 V. 因此其作用仅限于确定 G 的可换（或稍加推广为可解）商群的存在性．（正由于这种局限性，2.4 中的证明不可能应用于广泛的弗罗宾纽斯定理（第五章 7.6）．）

迄今为止，人们仅对于 H 为 G 的 p—西洛子群的情况作了深入的研究．在 p—西洛子群内的转移给出 G 的极大可换 p—商群；定理 3.3 给出了这一结果．只要对 G 的 p—西洛子群 P 的结构给予一定限制，那么 G 的极大可换 p—商群便同构于 $N_G(P)$的极大可换 p—商群．例如，P 的可换性便是能使上述结论成立的一个充分条件（见 2.6，伯恩赛德定理）；维兰特曾证明（8.1），P 的正则性（正则性定义见第三章，§10）也具有这样的充分性．在一般情况下，除了要对 $N_G(P)$有所了解，还需要了解 P 在 G 中的嵌入情况，例如，关于 P 与其在 G 中的共轭的交的情况．最方便的表述是格吕恩定理（3.7），它得到了广泛应用．

转移方法通常用于这样的场合，即在假定中给定了一个素数

p，并且猜测，G 可能有非平凡 p—商群．我们将在 § 5 中讨论这种情况．要计算在 p—西洛子群 P 中的转移，仅需了解 P 在 G 中的嵌入情况．而这种方法的长处和弱点均在于此．转移法基本上不涉及不同素数的西洛子群间的种种关系．例如，著名的伯恩赛德定理（第五章 7.3)，即任意 $p^a q^b$（p，q 均为素数）阶群可解，迄今为止不能通过转移方法加以证明．对此，群指标方法显然更加方便．(关于 $p\neq 2\neq q$ 的情况，J. 汤普森给出了一个不利用指标理论的证明，但这一证明十分复杂．）要解决下列问题，转移方法是无能为力的（实际上目前所有已知的方法都是如此)：是否存在非可换单群，它的一切西洛子群都是自正规化的？据维兰特定理(8.1)，其一切西洛子群都是非正则的，又由格吕恩定理，其西洛子群的嵌入应当是相当复杂的．看来，转移所能起的作用也就仅此而已．对于伯恩赛德猜想，即一切奇数阶群均可解的证明，群指标理论起到了关键作用；当然转移在其中也得到了一些应用．(见 Feit，Thompson[1]）*

2)按照伯恩赛德最初所给出的形式，单项表示讨论 G 到单项矩阵群中的同态 $\mu: g\to(a_{ij}(g))$，单项矩阵中每行每列中各仅包含一个$\mathbb{C}$中的异于零的元．这时，转移即为映射 V(若不计正负号：$V(g)=\det(a_{ij}(g))$. 单项表示十分类似于在第一章 § 6 中所讨论的置换表示．特别地，G 由其某一子群的陪集所构造的置换表示可以很容易地加以推广(见 1.4).

从一般表示论的观点看来，单项表示讨论一种特别简单的表示，即由某一子群的一维表示所导出的表示．在第五章，§ 18 中我们将重新讨论这一问题，上面所提到的，由一个子群出发而构造

---

* 前不久，格劳伯尔曼曾证明：若 $p\geqslant 7$，且 P 为 G 的 p--西洛子群，能使 $N_G(P)=P$，则 G 有一指数为 p 的正规子群．

单项表示的过程，使得我们可以比较容易地处理这种表示．不过，我们还不知道，对于怎样的群，可以通过这样的过程构造出它的一切不可约表示（请参阅第五章，18.4—18.8）．

§1 单项表示与转移

1.1 定义 设 G 为一群，未必是有限的，n 为一自然数．设 S_n 为 n 级对称群，且就把它视为 n 级置换群．令 $M_n(G)=G\wr S_n$，并把织积 $M_n(G)$ 叫做 G 上的 n 级单项群．由第一章§15便有

$M_n(G)=\{(\underline{f},h)\mid h\in S_n,\underline{f}$ 为 $\{1,2,\cdots,n\}$ 到 G 内的映射$\}$，其乘法规则为

$$(\underline{f}_1,h_1)(\underline{f}_2,h_2)=(\underline{g},h_1h_2)$$

其中 $g(i)=\underline{f}_1(i)\underline{f}_2(i^{h_1})$．

1.2 辅理 设 G 可换，则下列映射 δ：

$$\delta((\underline{f},h))=\prod_{i=1}^{n}\underline{f}(i)$$

为 $M_n(G)$ 到 G 内的同态．（设 G 为复数乘法群的子群，并且把 $M_n(G)$ 中的元写成元素取自 G 的置换矩阵，则若不计正负号，δ 便是相应的行列式．）

证明：显然，下列等式成立

$$\begin{aligned}\delta((\underline{f}_1,h_1)(\underline{f}_2,h_2))&=\delta((\underline{g},h_1h_2))\\&=\prod_{i=1}^{n}\underline{g}(i)\\&=\prod_{i=1}^{n}\underline{f}_1(i)\underline{f}_2(i^{h_1})\\&=\prod_{i=1}^{n}\underline{f}_1(i)\prod_{i=1}^{n}\underline{f}_2(i)\end{aligned}$$

$$=\delta((\underline{f}_1,h_1)\delta((\underline{f}_2,h_2)).$$

1.3 辅理 设 α 为 G 到 $\overline{G}$ 内的同态，定义 $\overline{\alpha}$ 如下：

$$(\underline{f},h)^{\overline{\alpha}}=(\underline{g},h)，\text{其中}\underline{g}(i)=\underline{f}(i)^{\alpha}.$$

则 $\overline{\alpha}$ 便是 $M_n(G)$ 到 $M_n(\overline{G})$ 内的一个同态．

证明：由 $M_n(G)$ 的乘法规则可立得结论，且其证明已于第一章 15.7 中给出．

1.4 基本定理 设 G 为一群，未必是有限的，又 H 为 G 的具有有限指数的子群．设 $|G:H|=n$ 且 $G=\bigcup_{i=1}^{n}Hr_i$ 为 G 关于 H 的陪集分解．对于每个 $g\in G$ 定义 $\{1,2,\cdots,n\}$ 上一个置换 $\underline{P}(g)$，并由此定义 H 中元素 $h_i(g)$ 如下：

$$r_ig=h_i(g)r_{i^{\underline{P}(g)}}$$

则成立：

a) 令 $\underline{f}(i)=h_i(g)$，则把 g 映到 $\underline{M}(g)=(\underline{f},\underline{P}(g))$ 的映射 $\underline{M}$ 是 G 到 $M_n(H)$ 内的一个同构．我们称 $\underline{M}$ 为 G 到 H 上的单项表示．

b) 设 $H/\overline{H}$ 为 H 的一个可换商群．则映群 V：$V(g)=\prod_{i=1}^{n}h_i(g)\overline{H}$ 为 G 到 $H/\overline{H}$ 内的同态，我们称之为 G 到 $H/\overline{H}$ 内的转移．

若 $\overline{H}=H'$，便把 V（不太确切地）叫做 G 到 H 内的转移，有时记作 $V_{G\to H}$.

（映射 $\underline{P}$：$Hr_ig=Hr_{i^{\underline{P}(g)}}$ 便是我们在第一章 6.2 中所讨论过的 G 的置换表示；单项表示可以看作是置换表示的一种精确的形式．）

证明：a) 由

$$\begin{aligned}h_i(gg')r_{i^{\underline{P}(gg')}}&=r_i(gg')=(r_ig)g'\\&=h_i(g)r_{i^{\underline{P}(g)}}\,g'\\&=h_i(g)h_{i^{\underline{P}(g)}}(g')r_{i^{\underline{P}(g)\underline{P}(g')}}\end{aligned}$$

即得 $\underline{P}(gg')=\underline{P}(g)\underline{P}(g')$ 且 $h_i(gg')=h_i(g)h_{i^{\underline{P}(g)}}(g')$．从而 $\underline{M}(gg')=$

$(\underline{g},\underline{P}(g)\underline{P}(g'))$，其中

$$(\underline{g}(i) = h_i(gg') = h_i(g)h_{i^{\underline{P}(g)}}(g').$$

由此即得 $\underline{M}(gg')=\underline{M}(g)\underline{M}(g')$.

若 $\underline{M}(g)=e$，则对一切 i，均有 $r_ig=r_i$，故 $g=e$，从而 $\underline{M}$ 为 G 到 $M_n(H)$ 内的单一同态.

b）设 α 为 H 到 $H/\overline{H}$ 上的满同态：$h^\alpha=h\overline{H}$. 对于 $g\in G$，应用 1.2 和 1.3 中的记法，令

$$V(g) = \delta(\underline{M}(g)^{\bar{\alpha}}).$$

则由 1.2，1.3 及 1.4a），V 为由 G 到 $H/\overline{H}$ 的同态，能使

$$V(g) = \delta((f,\underline{P}(g))^{\bar{\alpha}}) = \prod_{i=1}^{n} f(i)^\alpha = \prod_{i=1}^{n} h_i(g)\overline{H}.$$

1.5 辅理 G 到 H 内的转移与 H 在 G 中的陪集代表元选取无关.

证明：令 $G=\bigcup_1^n Hr_i=\bigcup_1^n Hs_i$，其中 $Hr_i=Hs_i$，则 $s_i=t_ir_i$，其中 t_i 为 H 中适当的元. 由于

$$Hs_{i^\mu} = Hs_ig = Hr_ig = Hr_{i^\mu}$$

故 H 的陪集的置换 $\mu=\underline{P}(g)$ 与陪集代表元的选择无关. 令

$$r_i^g = h_i(g)r_{i^\mu} \text{ 且 } s_ig = k_i(g)s_{i^\mu}$$

由于 $\mu=\underline{P}(g)$，故成立

$$\begin{aligned} k_i(g)t_{i^\mu}r_{i^\mu} &= k_i(g)s_{i^\mu} = s_ig \\ &= t_ir_ig = t_ih_i(g)r_{i^\mu} \end{aligned}$$

从而 $k_i(g)=t_ih_i(g)(t_{i^\mu})^{-1}$. 由于 $t_i\in H$，便得

$$\prod_{i=1}^{n} k_i(g)\overline{H} = \prod_{i=1}^{n} t_ih_i(g)(t_{i^\mu})^{-1}\overline{H} = \prod_{i=1}^{n} h_i(g)\overline{H}.$$

1.6 定理 设 $K\leqslant H\leqslant G$，$|G:K|$ 有限. 若 $V_{G\to H}(g)=hH'$，则 $V_{G\to K}(g)=V_{H\to K}(h)$.

证明：设 $G=\bigcup_{j=1}^{n} Hr_i$ 及 $H=\bigcup_{j=1}^{m} Ks_j$ 分别为 G 关于 H 和 H 关于 K

的陪集分解．则 $G=\bigcup_{i,j} Ks_jr_i$ 为 G 关于 K 的陪集分解．令

$$r_ig = h_i(g)r_{i'}, s_jh = h_j(h)s_{j'}$$

则
$$V_{G\to H}(g) = \prod_{i=1}^{n} h_i(g)H' = hH'$$

$$s_jr_ig = s_jh_i(g)r_{i'} = k_j(h_i(g))s_{j'}r_{i'}$$

从而

$$V_{G\to K}(g) = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m} k_j(h_i(g))K'$$

$$= \prod_{i=1}^{n} V_{H\to K}(h_i(g))$$

$$= V_{H\to K}(\prod_{i=1}^{n} h_i(g)).$$

由于 $V_{H\to K}$ 为 H 到可换群 K/K' 内的同态，故 H' 被映到 E 上，从而元素 $V_{H\to K}(h)$ 与 h 在 hH' 中的选择无关．由此便得 $V_{G\to H}(g)=hH'=\prod_{i=1}^{n} h_i(g)H'$，即结论 $V_{G\to K}(g)=V_{H\to K}(h)$ 成立．

下列辅理中所给出的陪集代表元的选择方法，对于许多须计算转移的问题都是比较方便的：

1.7 辅理 若 $|G:H|$ 有限，$g\in G$. 设 g 在 H 的陪集上所导出的置换由下列循环组成

$$(Hs_j, Hs_jg, \cdots, Hs_jg^{f_j-1})$$

其中 $j=1,\cdots,t$.

（我们不妨假定 $s_1=e$）则

$$V_{G\to H}(g) = \prod_{j=1}^{t} s_jg^{f_j}s_j^{-1}H'.$$

证明：元素 $r_{ij}=s_jg^i$，其中 $0\leqslant i<f_j$ 且 $1\leqslant j\leqslant t$，构成一个 H 在 G 中的陪集代表元系．对于 $i<f_j-1$，则

$$r_{ij}g = s_jg^{i+1} = r_{i+1,j},$$

相应的 $h_{ij}(g)$ 为 e. 进而我们得

$$r_{f_j-1,j}g = s_jg^{f_j} = h_{f_j-1,j}(g)s_j \in Hs_j.$$

故

$$h_{f_j-1,j}(g) = s_jg^{f_j}s_j^{-1}.$$

由此即得

$$V_{G\to H}(g) = \prod_{j=1}^{t} s_jg^{f_j}s_j^{-1}H'.$$

习　题

1)(维兰特)若 G 为有限群,定义 G 的特征子群 $\Psi(G)$ 为由 G 的全体极小子群所生成的群.(易知 $\Psi(G)$ 与弗拉蒂尼子群 $\Phi(G)$ 相对偶.)证明:若 H 为任意有限群,则有有限群 G 能使 $G/\Psi(G)\cong H$.(由 $\Phi(G)$ 的幂零性不可能推知有关 $G/\Psi(G)$ 的任何结论.请参阅 Gaschütz [12].)

(提示:设 $U_1,\cdots,U_k$ 为 H 的全体最小子群,设 $n_i=|H:U_i|$,且 $p_i=|U_i|$. 依 1.4 构造 $H_i\leqslant M_{n_i}(U_i)$,并令 $H_i\cong H$. 设 V_i 为 p_i^2 阶循环群,α_i 为 V_i 到 U_i 上的同态,又 $\bar{\alpha}_i$ 为 1.3 中所给出的 $M_{n_i}(V_i)$ 到 $M_{n_i}(U_i)$ 上的同态. 令 G_i 为 H_i 在 $M_{n_i}(V_i)$ 中的完全 $\bar{\alpha}_i$—原象并令 $N_i=G_i\cap\mathrm{Kern}\,\bar{\alpha}_i$. 根据第一章 9.11 构造 $G=G_1 ⅄ G_2 ⅄\cdots ⅄ G_K$,使具有共同的商群 H. 现可以证明 $\Psi(G)=N_1\times\cdots\times N_K$(通过自然嵌入)且 $G/\Psi(G)\cong H$.)

§2　转移的简单应用

2.1 辅理　设 $H<G$,其中 $|G:H|=n$ 并令 $x\in Z(G)$. 则有 $V_{G\to H}(x)=x^nH'$.

证明:因 $x\in Z(G)$,则由 1.7 得

$$V(x) = \prod_{j=1}^{t} s_jx^{f_j}s_j^{-1}H' = \prod_{j=1}^{t} x^{f_j}H' = x^nH'.$$

2.2 定理 设 G 为有限群，又 $H<G$ 且能使 $|H:H'|$ 与 $|G:H|$ 互素. 则

$$H \cap G' \cap Z(G) \leqslant H'.$$

特别若 H 为 G 的可换霍尔子群，则

$$H \cap G' \cap Z(G) = e.$$

证明：取 $g \in H \cap G' \cap Z(G)$. 则由 2.1 有

$$V_{G \to H}(g) = g^{|G:H|}H'.$$

由于 $V_{G\to H}$ 为由 G 到可换群 H/H' 内的同态，则由 $g \in G'$ 便得 $V_{G\to H}(g) = H'$. 从而对于 $g \in G' \cap Z(G)$ 成立

$$V_{G \to H}(g) = g^{|G:H|}H' = H'.$$

由于 $(|G:H|, |H:H'|)=1$ 且 $g \in H$，即得结论 $g \in H'$.

在第六章 § 15 中，定理 2.2 将用于带有可换西洛子群的可解群的讨论. 我们再证明一个关于未必有限的群的定理，它在第五章 § 23 关于舒尔乘子的讨论中将获得应用：

2.3 定理（I. 舒尔） 设 G 为一群，未必是有限的，但 $|G/Z(G)|<\infty$. 则 $|G'|<\infty$.

证明：由于

$$G'/(G' \cap Z(G)) \cong G'Z(G)/Z(G) \leqslant G/Z(G),$$

故 $|G'/(G' \cap Z(G))|<\infty$. 令 $G=\bigcup_{i=1}^{n} Z(G)r_i$. 对于 $z_i, z_j \in Z(G)$，我们有 $[z_i r_i, z_j r_j]=[r_i, r_j]$. 从而成立

$$G' = \langle [r_i, r_j] \mid i, j = 1, \cdots, n \rangle,$$

故 G' 为有限生成. 由于 $|G'/(G' \cap Z(G))|<\infty$，则由第一章 19.10 $G' \cap Z(G)$ 也是有限生成的. 要证明 $|G' \cap Z(G)|<\infty$，只须证明 $G' \cap Z(G)$ 为扭群. 设 V 为 G 到 $Z(G)$ 内的转移，于 2.1 中以 $Z(G)$ 取代该处 H，则对于 $g \in G' \cap Z(G)$ 便得

$$e = V_{G \to Z(G)}(g) = g^n.$$

故 $G'\cap Z(G)$ 为扭群.

在本节其余诸定理中,我们仍假定所考察的群都是有限的.下面的定理是弗罗宾纽斯的一个重要定理(见第五章 7.6)的特殊情况. 由于迄今为止弗罗宾纽斯定理尚未有不应用指标理论的证明,因此在可能的情况下,人们便通常应用定理 2.4.

2.4 定理 设 H 为 G 的可解子群能使 $H\cap H^t=E$,对一切 $t\in G-H$ 均成立.(对于 $H\neq E$ 便成立 $N_G(H)=H$.)则集合

$$F = G - \bigcup_{g\in G}(H - E)^g$$

为 G 的正规子群且成立 $G=FH$ 及 $F\cap H=E$.

证明(Shaw〔1〕):若 $H=E$,则有 $F=G$,结论显然成立. 故以下假定 $H\neq E$.

由 F 之定义易知,在 G 的一切内自同构作用下,F 都被映到自身. 其困难之处在于确定 F 为 G 的子群. 现假定这一点已被证明. 则对于 $t't^{-1}\in G-H$,便有 $H^t\cap H^{t'}=E$. 从而

$$|F| = |G| - |G:H|(|H| - 1) = |G:H|.$$

由于 $F\cap H=E$ 及 $F\leqslant G$ 即得 $|FH|=|F||H|=|G|$,故 $G=FH$.

为证明 F 为 G 的子群,我们考虑 G 到 H 内的转移 $V_{G\to H}$ 并证明:

a)对一切 $h\in H$ 均成立 $V(h)=hH'$;特别地对于 $K=\mathrm{Kern}V$ 成立 $H\cap K=H'$:

由 1.7 便得

$$V(h) = \prod_i s_i h^{f_i} s_i^{-1} H'$$

其中 $s_1=e$ 且 $s_i h^{f_i} s_i^{-1}\in H$. 由 $h\in H$ 便有 $Hs_1h=Hh=H$,故 $f_1=1$. 若 $i>1$,则由假定

$$s_i h^{f_i} s_i^{-1} \in H \cap s_i H s_i^{-1} = E.$$

从而 $V(h)=hH'$.

b)成立 $G=KH$：

设 $g\in G$. 则有 $h\in H$ 能使 $V(g)=hH'$. 由 a) $V(h)=hH'$，故 $V(gh^{-1})=H'$，从而 $gh^{-1}\in \mathrm{Kern}V=K$.

c)由 $K\cap H=H'$ 及 $H\neq E$ 的可解性可知 $K<G$. 对于群 K 及其子群 H'，原假定仍成立：设 $k\in K-H'$，由 $K\cap H=H'$ 即得 $k\in G-H$，且从而成立

$$H'\cap H'^{k}\leqslant H\cap H^{k}=E.$$

由归纳假定，可假设对于 K 定理已得证. 即

$$N=K-\bigcup_{k\in K}(H'-E)^{k}$$

当 K 的正规子群并能使 $K=NH'$，$N\cap H'=E$ 且 $|N|=|K:H'|$. 对于 $g=hk\in HK=G$ 成立

$$N\cap H^{g}=N\cap H^{k}=N\cap(K\cap H^{k})=N\cap H'^{k}=E.$$

从而 $N\subseteq G-\bigcup\limits_{g\in G}(H-E)^{g}=F$.

但又有

$$|N|=|K:H'|=|K:K\cap H|=|KH:H|=|G:H|=|F|$$

故 $N=F$. 即 F 为 G 之子群.

2.5 辅理 设 K 和 L 均为 G 的 p—西洛子群 P 的子集，且对一切 $t\in P$ 均成立 $K^{t}=K$ 及 $L^{t}=L$. 若有 $g\in G$ 能使 $K^{g}=L$，则有 $x\in N_{G}(P)$ 使 $K^{x}=L$.

证明：由假定成立 $P\leqslant N_{G}(L)$ 且 $P^{g}\leqslant N_{G}(K^{g})=N_{G}(L)$. 由于 P 和 P^{g} 都是 $N_{G}(L)$ 的 p—西洛子群，故在 $N_{G}(L)$ 中互相共轭. 从而有 $y\in N_{G}(L)$ 能使 $P=P^{gy}$. 故 $gy\in N_{G}(P)$ 且 $K^{gy}=L^{y}=L$. 从而 $x=gy$ 满足定理要求.

如下的 2.6(伯恩赛德定理)是一个十分广泛的定理的特殊情况，这个一般性定理我们将在以后介绍(见 3.7，5.8，6.2 和 8.1).

2.6 基本定理(伯恩赛德) 令 P 为 G 的 p—西洛子群能使 P