21st CENTURY
规划教材

21世纪普通高校规划教材

唐永昆　主　编
陈云山　李春茂　副主编

应用数学

（概率论与数理统计分册）

科学出版社
www.sciencep.com

应用数学

（概率论与数理统计分册）

21世纪普通高校规划教材

应用数学

（概率论与数理统计分册）

唐永昆　主　编

陈云山　李春茂　副主编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书共分九章，介绍了随机事件与概率、随机变量及其概率分布、随机变量的数字特征、随机向量、大数定律和中心极限定理、抽样分布、参数估计、假设检验、一元线性回归分析，内容全面、易学易懂. 本书以应用为目标，重点讲解基本理论、基本方法和应用技能，尽量减少定理的严格证明，应用各种实例来进行说明，力求清楚、准确、明了、直观，语言生动有趣.

本书适合成人高等教育经济管理类以及理工科各专业学生使用.

图书在版编目(CIP)数据

应用数学：概率论与数理统计分册/唐永昆主编. —北京：科学出版社，2008

（21 世纪普通高校规划教材）

ISBN 978-7-03-021058-6

Ⅰ.应… Ⅱ.唐… Ⅲ.①应用数学-高等学校：技术学校-教材②概率论-高等学校：技术学校-教材③数理统计-高等学校：技术学校-教材 Ⅳ.O29 021

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 016483 号

责任编辑：沈力匀 游浩星 / 责任校对：赵 燕

责任印制：吕春珉 / 封面设计：耕者设计工作室

科 学 出 版 社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

新 蕾 印 刷 厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2008 年 2 月第 一 版 开本：787×1092 1/16

2008 年 2 月第一次印刷 印张：12 1/4

印数：1—3 800 字数：288 000

定价：22.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈路通〉）

销售部电话 010-62136131 编辑部电话 010-62135235（VP04）

前　言

本套教材是为成人高等教育相关专业编写的，包括《应用数学（微积分分册）》、《应用数学（线性代数分册）》及《应用数学（概率论与数理统计分册）》. 这是一套很有特色的教材，其特点是：以培养应用性人才为目标，充分考虑成人学生的数学基础和学习心理特点，普及数学知识，传授数学技能，传播数学文化，提高学生的数学素质.

《应用数学（概率论与数理统计分册）》共分九章，介绍了随机事件与概率、随机变量及其概率分布、随机变量的数字特征、随机向量、大数定律和中心极限定理、抽样分布、参数估计、假设检验、一元线性回归，内容全面、易学易懂. 本书以应用为目标，重点讲解基本理论、基本方法和应用技能，尽量减少定理的严格证明，应用各种实例来进行说明，力求清楚、准确、明了、直观，语言生动有趣.

本书由云南省成人高等教育协会组织编写，云南财经大学唐永昆任主编，云南大学陈云山、云南师范大学李春茂任副主编，云南师范大学、云南大学、云南民族大学联合编写. 本书的编写分工为：第 1 章云南民族大学樊爱霞；第 2 章云南民族大学芦俊丽；第 3 章云南民族大学张翎；第 4～6 章云南师范大学李春茂；第 7 章云南大学江绍萍；第 8 章云南大学陈云山；第 9 章云南大学王娅；陈云山负责全书的审稿、统稿工作.

本书在质量上坚持高标准，相信读者学习本书后会有所收获，并对学习概率论与数理统计产生兴趣、感到快乐，增强学习信心，提高科学素质.

由于编写时间仓促，书中不乏缪误、欠妥之处，敬请广大读者批评指正.

目　录

第 1 章

随机事件与概率

1.1 随机事件

1.1.1 随机现象

自然界和社会上发生的现象是多种多样的．有一类现象，在一定条件下必然发生，例如，向上抛一块石子必然下落，同性电荷必然不会相互吸引等．这类现象称为确定性现象．在自然界和社会上还存在另一类现象，例如，在相同条件下抛同一枚硬币，其结果可能是正面朝上，也可能是反面朝上，并且在每次抛掷之前无法肯定抛掷的结果；又比如，用同一门炮向同一目标射击，每次子弹到达的位置不尽相同，在一次射击之前也无法肯定子弹到达的确切位置．这类现象，在一定的条件下，可能出现这样的结果，也可能出现那样的结果，而在试验或观察之前不能预知确切的结果．但人们经过长期实践并深入研究后，发现这类现象在大量重复试验或观察下，它的结果却呈现出某种规律性．例如，多次重复抛一枚硬币得到正面朝上的次数大致占一半，同一门炮射击同一目标时，子弹到达的位置按照一定规律分布等．这种在大量重复试验或观察中所呈现出的固有规律性，就是统计规律性．

这种在个别试验中其结果呈现出不确定性，在大量重复试验中其结果又具有统计规律性的现象，称为随机现象．概率论与数理统计是研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科．

1.1.2 随机试验

为了研究随机现象，就要对随机现象进行试验或观察．例如，抛一枚硬币，观察正面、反面出现的情况；抛一颗骰子，观察出现的点数；记录电话交换台 1 分钟内接到的呼唤次数等．对于这些例子，它们有着共同的特点．例如，抛一枚硬币有两种可能的结果，出现正面或者出现反面，但在抛掷之前不能确定到底是出现正面还是出现反面，而

且，这个试验可以在相同的条件下重复地进行．又如，电话交换台 1 分钟内接到的可能呼唤次数 $t \geqslant 0$，但实际上到底呼唤了多少次是观察之前不可预知的，这个试验也可以在相同的条件下重复地进行．概括起来，这些试验具有以下特点：

（1）可以在相同的条件下重复地进行多次；

（2）每次试验的结果具有多种可能性，而且在试验之前明确试验的所有可能的结果；

（3）在每次试验之前不能确定将出现哪一种结果．

在概率论中，将具有上述 3 个特点的试验称为随机试验．本书中以后提到的试验都是指随机试验．一般情况下，都是通过随机试验来研究随机现象．

1.1.3 样本空间、随机事件

1. 样本空间

对于随机试验，尽管在每次试验之前不能确定试验的结果，但是试验的所有可能的结果组成的集合是已知的．将随机试验的所有可能的结果组成的集合称为样本空间，记为 Ω．样本空间的元素，即随机试验的每个结果，称为样本点．

例如，在上面的例子中，抛一颗骰子，观察出现的点数以及记录电话交换台 1 分钟内接到的呼唤次数均为随机试验，记为 E_1 和 E_2，则其样本空间分别为

$\Omega_1=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，

$\Omega_2=\{t \mid t \geqslant 0,\ t \in I\}$　其中 I 为整数的集合．

E_1 的样本点为 1，2，3，4，5，6；

E_2 的样本点为 1，2，3，4，…．

2. 随机事件

在现实生活中，进行随机试验时，人们可能更关心满足某种条件的那些样本点所组成的集合．例如，若电话交换台 1 分钟内接到的呼唤次数大于或等于 100 次，就认为电话交换台是忙碌的，则人们关心的是对于呼唤次数是否有 $t \geqslant 100$．满足这一条件的样本点组成的集合是其样本空间 Ω_2 的一个子集：$A=\{t \mid t \geqslant 100,\ t \in I\}$．称 A 为试验的一个随机事件．显然，随机事件是由一个或多个样本点构成的集合，当且仅当随机事件 A 中有一个样本点出现时，认为 A 发生．

一般，称试验 E 的样本空间 Ω 的子集为 E 的随机事件，简称事件．显然，事件是试验的结果．在每次试验中，当且仅当这一子集中的一个样本点出现时，称这一事件发生．

特别地，由一个样本点组成的事件称为基本事件，基本事件也用一个集合来表示，只不过集合中只有一个元素．例如，随机事件 E 为：抛一枚硬币，观察其正面、反面出现的情况．其样本空间为：$\Omega=\{$正面，反面$\}$，样本点为：正面、反面．基本事件共有两个：$A_1=\{$正面$\}$、$A_2=\{$反面$\}$．

样本空间 Ω 包含所有的样本点，它是 Ω 自身的子集，在每次试验中它总是发生的，

称为必然事件．空间 ϕ 不包含任何样本点，它也作为样本空间的子集．但由于它在每次试验中都不发生，所以称为不可能事件．

下面举几个事件的例子：

例 1.1　试验 E 为将一枚硬币抛掷两次，观察其出现正面、反面的情况．事件 A 为"第二次出现的是反面"，求：事件 A．

解　依题意得

$$A=\{反面，反面；正面，反面\}.$$

例 1.2　试验 E 为在一批灯泡中任意抽取一只测试其寿命，若寿命大于或等于 500 小时就认为是合格品．事件 B 为"灯泡是合格品"，求：事件 B．

解　依题意得

$$B=\{t\,|\,t\geqslant 500\}.$$

1.1.4　事件的关系及运算

事件是一个由样本点组成的集合，因而事件之间的关系与事件的运算自然要按照集合之间的关系和集合的运算理论来处理．另外，一般使用图示法来表示事件之间的关系及运算，这样较为直观，也使运算更容易理解．

前面已经讲过，用集合的方法来描述事件，样本空间为必然事件，用最大的集合来表示，它以所有样本点作为集合的元素．随机事件是样本空间的子集，它以满足要求的样本点作为其集合的元素，基本事件是最小的子集，它以一个样本点作为其集合的元素．

为了直观，用图示法表示事件．一般地，用平面上某一个方（或矩）形区域表示必然事件，该区域内的一个子区域表示事件．

1．事件的包含

如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，即属于 A 的每一个样本点也都属于 B，则称事件 B 包含事件 A，或称事件 A 包含于事件 B，记作

$$B\supset A 或 A\subset B.$$

事件的包含关系如图 1.1 所示．

例如，在验收机械零件时，设事件 A 表示"尺寸不合格"，事件 B 表示"零件不合格"，由于 A 的发生必然导致 B 的发生，则 $A\subset B$．

2．事件的相等

若事件 B 包含事件 A，同时事件 A 又包含事件 B，则称事件 A 与事件 B 相等．即 A 与 B 中的样本点完全相同．记作

$$A=B.$$

3. 事件的并（和）

“事件 A 与事件 B 中至少有一个发生”也是一个随机事件，称为事件 A 与事件 B 的并（和）事件．它是由属于 A 或 B 的所有样本点构成的集合．记作

$$A+B \text{ 或 } A\cup B .$$

A 与 B 的和事件如图 1.2 中的阴影部分所示.

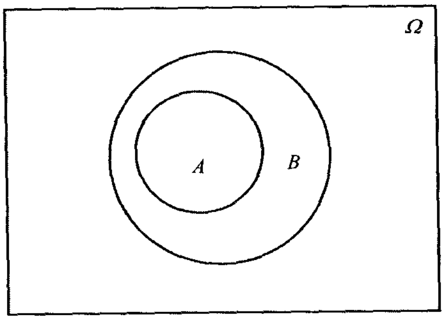

图 1.1

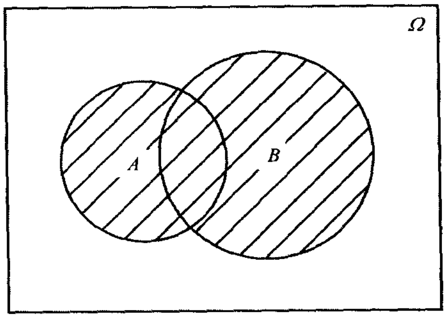

图 1.2

例如，在验收机械零件时，规定只要尺寸和粗糙度有一种不合格则零件为不合格，则“零件不合格”（用事件 C 表示）就是“尺寸不合格”（用事件 A 表示）与“粗糙度不合格”（用事件 B 表示）的和事件，即 $C=A\cup B$.

一般地，称“事件 $A_1, A_2,\cdots, A_n$ 中至少有一个发生”为事件 $A_1, A_2,\cdots, A_n$ 的和事件，记作 $A_1+A_2+\cdots+A_n$ 或 $\sum_{i=1}^{n}A_i$ 或 $\bigcup_{i=1}^{n}A_i$.

4. 事件的积

“事件 A 与事件 B 同时发生”也是一个随机事件，称为事件 A 与事件 B 的积（或积事件）．它是由既属于 A 又属于 B 的所有公共样本点构成的集合．记作

$$AB \text{ 或 } A\cap B .$$

A 与 B 的积事件如图 1.3 中的阴影部分所示.

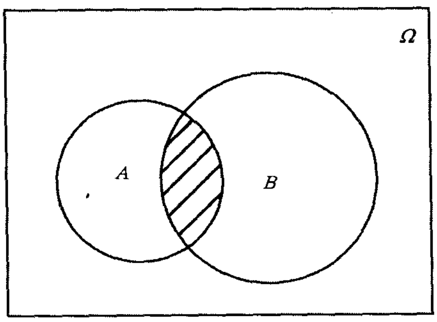

图 1.3

5. 事件的差

“事件 A 发生而事件 B 不发生”称为事件 A 与事件 B 的差．它是由属于 A 但不属于 B 的那些样本点构成的集合．记作 $A-B$．A 与 B 的差事件如图 1.4 中的阴影部分所示．

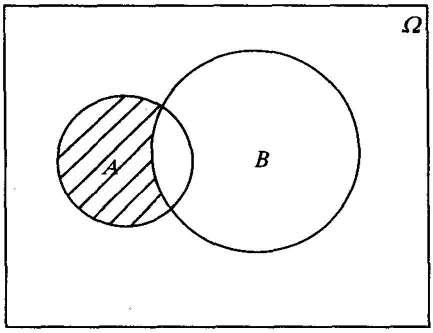

图 1.4

6. 互不相容事件

如果事件 A 与事件 B 不能同时发生，即“A 与 B 同时发生”是不可能事件：$A\cap B=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 互不相容（或互斥）．互不相容事件 A 与事件 B 没有公共的样本点，其关系如图 1.5 所示．

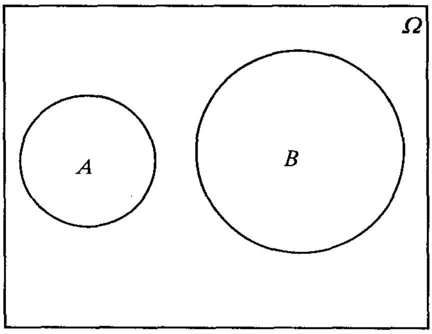

图 1.5

7. 对立事件

如果事件 A 与事件 B 有且仅有一个发生，即 $A+B=\Omega$，$AB=\varnothing$，则称事件 A 与 B 互为对立事件（或逆事件）．记作 $A=\overline{B}$，读作“A 为 B 的对立事件”或“B 为 A 的对立事件”．事件 A 的对立事件是由样本空间中所有不属于 A 的样本点组成的集合．A 的对立事件如图 1.6 的阴影部分所示．

例如，掷一颗骰子，设 A 表示“出现偶数点”，B 表示“出现 3 点”，C 表示“出现奇数点”，则 A 与 B 互不相容，A 与 C 互不相容，而且 A 与 C 互为对立事件．但 B 与 C 是相容的．

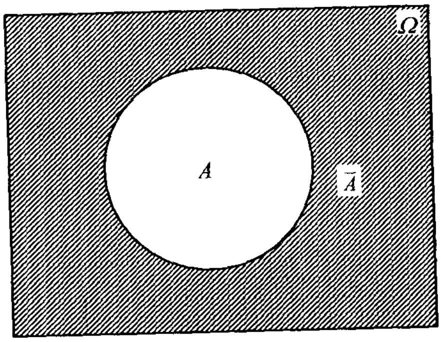

图 1.6

8. 事件之间的关系和运算具有下列性质

（1）交换律 $A+B=B+A$；$AB=BA$；

（2）结合律 $A+(B+C)=(A+B)+C$；$A(BC)=(AB)C$；

（3）分配律 $A(B+C)=AB+AC$；$A\cup(BC)=(A\cap B)(A\cup C)$；

（4）摩根法则 $\overline{A+B}=\overline{A}\overline{B}$；$\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$．

对于 n 个事件 $A_i(i=1, 2,\cdots, n)$ 有

$$\overline{A_1+A_2+\cdots+A_n}=\overline{A_1}\,\overline{A_2}\cdots\overline{A_n}\text{；}$$
$$\overline{A_1A_2\cdots A_n}=\overline{A_1}+\overline{A_2}+\cdots+\overline{A_n}\text{．}$$

例 1.3 掷一颗骰子，观察其出现的点数：事件 A 表示“奇数点”；事件 B 表示“点数小于 5”；事件 C 表示“小于 5 的偶数点”．用集合的列举表示法表示下列事件：Ω，A，B，C，$A+B$，$A-B$，$B-A$，AB，AC，$C-A$，$\overline{A}+B$．

解 $\Omega=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$；　　$A=\{1, 3, 5\}$；

$B=\{1, 2, 3, 4\}$；　　$C=\{2, 4\}$；

$A+B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$；　　$A-B=\{5\}$；

$B-A=\{2, 4\}$；　　$AB=\{1, 3\}$；

$AC=\varnothing$；　　$C-A=\{2, 4\}$；

$\overline{A}+B=\{1, 2, 3, 4, 6\}$．

例 1.4 从一批产品中每次取出一个产品进行检验（每次取出的产品不放回），事件 A_i 表示第 i 次取到合格品（$i=1, 2, 3$）．试用事件的运算符号表示下列事件：

（1）3 次都取到了合格品；

（2）3 次中至少有 1 次取到了合格品；

（3）3 次中恰好有 2 次取到了合格品；

（4）3 次中最多有 1 次取到了合格品．

解 （1）“3 次都取到了合格品” $=A_1A_2A_3$；

（2）“3 次中至少有 1 次取到了合格品” $=A_1+A_2+A_3$；

（3）“3 次中恰有 2 次取到了合格品” $=A_1A_2\overline{A_3}+A_1\overline{A_2}A_3+\overline{A_1}A_2A_3$；

（4）“3 次中最多有 1 次取到了合格品” $=\overline{A_1A_2}+\overline{A_2A_3}+\overline{A_1A_3}$.

1.2　随机事件的概率

概率论研究的是随机现象量的规律性. 因此仅仅知道试验中可能出现哪些事件是不够的，还必须对事件发生的可能性大小的问题进行量的描述. 这就涉及一个概念——事件的概率. 本节要研究的是概率的概念，此外，还涉及概率的性质及其简单的计算.

1.2.1　事件的频率与概率的统计定义

1. 事件的频率

对一个事件 A 来说，无论它发生的可能性是大还是小，在一次试验或观察中都可能发生或者不发生. 因此，根据一次试验或观察的结果并不能确定任何一个事件发生的概率（不可能事件 $\varnothing$ 和必然事件 Ω 除外）. 不过，在大量的重复试验或观察中，事件发生的可能性却可呈现出一定的统计规律性，并且随着试验或观察次数的增加，这种规律性会表现得愈加明显.

显然，在大量的重复试验或观察中，要反映一个事件发生的可能性大小，最直观的一个量就是频率（Frequency），其定义是：

在相同的条件下，进行了 n 次试验，在这 n 次试验中，事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的频数. 比值 n_A/n 称为事件 A 发生的频率，并记作 $f_n(A)$.

频率 $f_n(A)$ 越大（或小），事件 A 发生的可能性就越大（或小），即 A 的概率就越大（或小）. 可见，频率是概率的一个很好的反映. 但是，频率却不能作为概率，因为概率是一个确定的量，不像频率那样随重复试验和重复次数的变化而变化. 不过，即使这样，频率还是可以作为概率的一个估计值，而且是一个有客观依据的估计值，这个依据就是所谓的频率稳定性：当试验或观察次数 n 较大时，事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 会在某个确定的常数 p 附近波动，并渐趋稳定.

由上述可知，频率具有下述性质：

（1）对任一事件 A，有 $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$；

（2）对必然事件 Ω，有 $f_n(\Omega)=1$；

（3）若 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 是两两不相容的事件，则

$$f_n(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f(A_k) \text{ 即 } f_n(\bigcup_{i=1}^{k}A_i)=\sum_{i=1}^{k}f_n(A_i) .$$

例 1.5　对于“抛硬币”这个试验，若将一枚硬币抛掷 5 次、50 次、500 次，且各重复做 10 遍. 用“H”表示出现正面，得到的数据如表 1.1 所示（其中 n_{H} 表示 H 发生的频数，$f_n(\mathrm{H})$ 表示 H 发生的频率）.

这种试验历史上已有人做过，得到的数据如表 1.2 所示.