教育部高职高专规划教材

# 高等数学

## （上册）

MATHS

主编　韩云瑞

中国财政经济出版社

教育部 高职高专规划教材

# 高等数学（上册）

韩云瑞 主编

中国财政经济出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

高等数学. 上册／韩云瑞主编. —北京：中国财政经济出版社,2008.1
教育部高职高专规划教材
ISBN 978-7-5005-8378-3

Ⅰ.高…　Ⅱ.韩…　Ⅲ.①高等数学-高等学校:技术学校-教材②微积分-高等学校:技术学校-教材　Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 069871 号

中国财政经济出版社出版

URL: http://www.cfeph.cn

E-mail: jiaoyu @ cfeph.cn



社址：北京市海淀区阜成路甲 28 号　邮政编码：100036
发行电话：88190616　88190655(传真)

三河市新世纪印务有限公司印刷　各地新华书店经销
787×960 毫米　16 开　16.5 印张　266 000 字
2008 年 1 月第 1 版　2008 年 1 月河北第 1 次印刷
定价：20.00 元
ISBN 978-7-5005-8378-3/O·0041
（图书出现印装问题，本社负责调换）

# 前言

本书是教育部高等教育司组编的高校工科类与经济学类各专科的公共基础课程《高等数学》的教材。内容包括函数、极限与连续、一元函数微分学和积分学。

本书的编写贯彻理论知识以够用为度的精神，适合于应用性、技能型人才培养的需要。在符合科学性与系统性的基础上，恰当地把握了内容的深度和广度。对于若干基本的数学概念，不追求完全形式化的严格叙述，而是尽可能地运用通俗的语言，并结合有关的实际背景，使学生理解数学知识的意义。对于一些重要定理，虽然给出了必要的证明，但是更加注意对于定理进行直观解释，并且尽力引导学生正确地运用定理和公式分析解决比较简单的问题。

本书的特点是数学系统结构合理、适度，概念表述准确且平易直观，内容通俗易懂。精心选取的例题不仅能够贴切地解释说明相关的数学知识，而且能够使读者学会基本的解题方法，包括求解简单应用题的方法。本书的每一节后有适量的练习题；每一章附有综合练习，并附有答案。实践表明，这本教材易教易学，使用方便。

本书第一版问世之后，在教学实践中受到广泛的关注和好评。编者吸取了全国各地教师与学生

的许多有价值的建议，对教材进行了几次修订。借此机会，编者向曾经关心这本教材的教师和学生表示衷心的感谢。

本书由清华大学教授、中国高等教育学会教育数学专业委员会副理事长韩云瑞主编。清华大学的刘庆华、扈志明和李海中几位教授参加了本书第一版的编写；北京航空航天大学李心灿教授和北京电视大学刘德荫教授参加了第一版的审稿工作。

**编　者**

# 目录

第一章 函 数 …………………………………………… ( 1 )
§1.1 函数的定义与性质 …………………………… ( 1 )
练习 1.1 ………………………………………… ( 13 )
§1.2 初等函数 ……………………………………… ( 16 )
练习 1.2 ………………………………………… ( 24 )
§1.3 非初等函数举例 ……………………………… ( 25 )
练习 1.3 ………………………………………… ( 28 )
§1.4 建立函数关系 ………………………………… ( 28 )
练习 1.4 ………………………………………… ( 32 )
复习题一 ………………………………………… ( 32 )
第二章 极限与连续 ……………………………… ( 37 )
§2.1 从刘徽割圆谈起 ……………………………… ( 37 )
§2.2 数列极限 ……………………………………… ( 39 )
练习 2.2 ………………………………………… ( 42 )
§2.3 函数极限 ……………………………………… ( 43 )
练习 2.3 ………………………………………… ( 50 )
§2.4 极限的性质与运算法则 ……………………… ( 51 )
练习 2.4 ………………………………………… ( 57 )
§2.5 两个重要极限 ………………………………… ( 58 )
练习 2.5 ………………………………………… ( 64 )
§2.6 无穷小量与无穷大量 ………………………… ( 65 )
练习 2.6 ………………………………………… ( 69 )
§2.7 函数的连续性 ………………………………… ( 70 )
练习 2.7 ………………………………………… ( 76 )

复习题二 ………………………………………………… (76)
第三章 导数与微分 ……………………………………… (81)
§3.1 导数的概念 …………………………………… (82)
练习 3.1 ………………………………………………… (92)
§3.2 求导法则 ……………………………………… (93)
练习 3.2 ………………………………………………… (103)
§3.3 隐函数求导方法 ……………………………… (105)
练习 3.3 ………………………………………………… (108)
§3.4 高阶导数 ……………………………………… (109)
练习 3.4 ………………………………………………… (112)
§3.5 函数的微分 …………………………………… (112)
练习 3.5 ………………………………………………… (119)
复习题三 ………………………………………………… (120)
第四章 中值定理与导数的应用 ………………………… (123)
§4.1 微分中值定理 ………………………………… (123)
练习 4.1 ………………………………………………… (129)
§4.2 洛必达法则 …………………………………… (130)
练习 4.2 ………………………………………………… (136)
§4.3 函数单调性的判定 …………………………… (137)
练习 4.3 ………………………………………………… (142)
§4.4 函数的极值 …………………………………… (142)
练习 4.4 ………………………………………………… (148)
§4.5 函数的最大值与最小值 ……………………… (149)
练习 4.5 ………………………………………………… (155)
复习题四 ………………………………………………… (156)
第五章 不定积分 ………………………………………… (159)
§5.1 原函数与不定积分 …………………………… (159)
练习 5.1 ………………………………………………… (162)
§5.2 基本积分公式和不定积分的性质 …………… (163)
练习 5.2 ………………………………………………… (170)
§5.3 换元积分法 …………………………………… (170)
练习 5.3 ………………………………………………… (175)

§5.4 分部积分法 …………………………………… (176)
练习 5.4 ………………………………………………… (181)
复习题五 ……………………………………………… (182)
第六章 定积分 ………………………………………… (186)
§6.1 定积分的概念 ………………………………… (187)
练习 6.1 ………………………………………………… (191)
§6.2 定积分的性质 ………………………………… (191)
练习 6.2 ………………………………………………… (194)
§6.3 定积分的计算——牛顿—莱布尼茨公式 ……………………………………………… (195)
练习 6.3 ………………………………………………… (201)
§6.4 定积分的换元积分法与分部积分法 …… (202)
练习 6.4 ………………………………………………… (207)
§6.5 定积分的应用 ………………………………… (208)
练习 6.5 ………………………………………………… (216)
§6.6 无穷区间上的广义积分 ………………… (217)
练习 6.6 ………………………………………………… (219)
§6.7 简单微分方程 ………………………………… (220)
复习题六 ……………………………………………… (223)
附录 1 初等数学的一些重要公式 ………………… (228)
附录 2 导数公式 ……………………………………… (231)
附录 3 简单积分表 …………………………………… (233)
练习答案 ……………………………………………… (236)
第一章 ………………………………………………… (236)
复习题一 ……………………………………………… (239)
第二章 ………………………………………………… (240)
复习题二 ……………………………………………… (241)
第三章 ………………………………………………… (242)
复习题三 ……………………………………………… (243)
第四章 ………………………………………………… (244)
复习题四 ……………………………………………… (246)
第五章 ………………………………………………… (247)

复习题五 …………………………………………………（249）
第六章…………………………………………………………（249）
复习题六 …………………………………………………（251）

# 第一章

# 函 数

## § 1.1 函数的定义与性质

### 一、函数的概念

在研究自然的、社会的以及工程技术的某个过程时，经常会遇到各种不同的量．例如时间、速度、质量、温度、成本和利润等．这些量一般可以分成两类．其中一类量在所研究过程中保持不变，这样的量称为常量．另一类量在所研究过程中是变化的，这样的量称为变量．由于物质的运动是绝对的，而静止是相对的，因此常量也是相对的．因此有某些量虽然是变化的，但变化幅度很小，为了简化问题，有时将这些量作为常量处理．

例如在自由下落过程中，物体垂直下落的距离与时间的关系为

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

其中 $t$ 为时间，$g$ 为重力加速度．在这个过程中，时间 $t$ 和距离 $s$ 为变量，重力加速度 $g$ 为常量．但严格地说，$g$ 也应当是一个变量．因为每点的重力加速度 $g$ 与该点所处的位置和地心距离有关．然而，如果在一个运动过程中，物体垂直下落的距离不是很大，那么重力加速度 $g$ 的变化就很小，因而可以近似地看作常数．

在同一个过程中，往往有几个变量同时变化，但是它们的变化不是孤立

的，而是按照一定的规律互相联系着．其中一个量的变化会引起另一个量变化，当前者的值确定时，后者的值按照某种关系亦就随之确定，下面我们要介绍的函数概念，其本质就是变量之间的互相依赖关系．

函数是最重要的数学概念之一，也是高等数学这门课程研究的主要对象．可以这样说，整个高等数学课程的主要内容就是研究各类函数(包括初等函数和非初等函数，显函数与隐函数等)的各种性质，特别是函数的分析性质，例如函数的导数和积分等．

人们对于函数概念的认识是随着科学技术的发展以及人们对客观世界的认识而不断深化的．17 世纪人们所理解的函数，基本上就是曲线．直到 18 世纪，占统治地位的思想仍然认为函数是一个公式表示的．这样的认识基本上局限于初等函数．然而，随着人们对于客观世界认识的不断深入，不断地出现新的类型的函数．数学家们必须为函数下一个一般的定义，这样的定义应当包括人们已知的所有类型的函数．不论是对于数学的理论，还是对于数学的应用，这都是一件非常重要的事情．数学家们为此探索了几个世纪，直至 1837 年，德国数学家狄利克雷(1805—1859) 才对于函数给出了一个与现代十分接近的定义．他说：如果对于给定区间上的每一个 $x$ 的值，有惟一的 $y$ 值与其对应，则 $y$ 就是 $x$ 的一个函数．狄利克雷还强调指出，在整个区间上，$y$ 是否按一种或多种规律依赖于 $x$，以及 $y$ 依赖于 $x$ 的方式能否用数学表达式来表达，都是无关紧要的．

对于一个自变量的函数(即一元函数)，我们给出下述定义．

**定义 1.1.1** 设 $D$ 为实数集的某个非空子集．如果按照某种确定的法则(或关系)$f$，对于每个 $x\in D$，都有惟一的一个实数 $y$ 与其对应，并且将与 $x$ 对应的 $y$ 记作 $y=f(x)$．则称这个对应关系 $f$ 为定义在 $D$ 上的函数．称 $x$ 为自变量，$y$ 为因变量．$f(x)$是当自变量为 $x$ 时，这个函数的函数值．称自变量 $x$ 的取值范围 $D$ 为函数$f$ 的定义域，函数 $f$ 的定义域用 $D(f)$表示．当自变量 $x$ 在定义域 $D(f)$上任意变动时，函数值 $y=f(x)$的变化范围称为函数 $f$ 的值域，$f$ 的值域记作 $R(f)$．

按照上述定义，$f$ 与$f(x)$的含义是有区别的．$f$ 表示自变量与因变量的对应关系(或法则)；而 $f(x)$ 则是与自变量 $x$ 对应的函数值，因此，对于任意的 $x$，$f(x)$是一个实数．但是，出于叙述的方便，有时也将$f(x)$说成是函数．在一个问题中，$f(x)$到底是指一个函数，还是指一个函数值？它的具体含义，可以结合上下文理解．

如果 $x_0$ 是一个确定的点(即事先指明的点)，则 $f(x_0)$ 表示当自变量 $x$ 等于 $x_0$ 时的函数值，如果用 $y$ 表示因变量，即 $y=f(x)$，也可以用 $y(x_0)$ 或者 $y|_{x=x_0}$ 表示 $f(x_0)$.

由函数定义可以看出，函数关系和定义域是函数的两个要素．在描述任何一个函数时，必须同时说明这两个要素．

例如指数函数 $y=a^x(a>0$，且 $a\neq 1)$ $[x\in(-\infty, +\infty)]$，这里 $y=a^x$ 表示自变量与因变量的对应关系(或法则)，即 $f(x)=a^x$．这个函数的定义域是 $D(f)=(-\infty, +\infty)$.

又如对数函数 $y=\log_a x(x>0)$．这里 $\log_a x$ 表示对应关系(或法则)，$x>0$ 表示这个函数的定义域是 $(0,+\infty)$．为什么对数函数的定义域是 $(0,+\infty)$？是因为只有当 $x>0$ 时，对数运算才有意义．

**例 1.1.1** 研究 $y=x$ 与 $y=\dfrac{x^2}{x}$ 是否为同一函数．

**解** $y=x$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，而 $y=\dfrac{x^2}{x}$ 的定义域为 $(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$．因此，虽然这两个函数在 $(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$ 上的值是相同的，但由于它们的定义域不相同，因而不是同一函数．

**例 1.1.2** 研究 $y=\cos x$ 与 $y=\sqrt{1-\sin^2 x}$ 是否为同一函数．

**解** 注意到 $\sqrt{1-\sin^2 x}=|\cos x|$，所以，当

$$2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$$

时，有

$$\sqrt{1-\sin^2 x}=\cos x$$

当 $(2k+1)\pi-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in Z)$ 时，有

$$\sqrt{1-\sin^2 x}=-\cos x$$

因此，只有当 $2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in Z)$ 时，两个函数的值才相等．这就是说，虽然它们的定义域都为 $(-\infty, +\infty)$，但由于它们的对应法则不相同，因而不是同一函数．

函数的表示方法一般有三种：图形法、表格法和公式法．

下面用三个例子说明．

**例 1.1.3**　气象站用自动温度记录仪记录一昼夜中的温度变化情况．温度记录仪在坐标纸上描出一条反映温度变化的曲线(图 1－1)．图中的横坐标是时间 $t$(时)；纵坐标是温度 $T$(℃)．图 1－1 中的曲线反映了一昼夜中的温度随时间变化的情况．温度 $T$ 是时间 $t$ 的函数．对于一昼夜中的每个时间(小时)，都可以在曲线上查到这个时刻的温度．这种用图形表示函数关系的方法称为图形法．

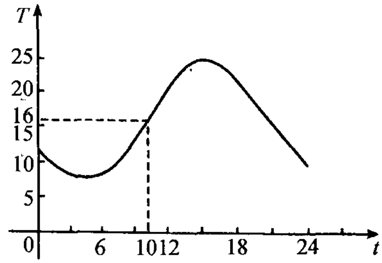


图 1－1

**例 1.1.4**　一块钢坯从温度为 1000℃的炉中取出后，放入温度为 0℃的冷水中进行冷却．每隔一分钟测量一次钢坯的温度，得到下面的数据：

**表 1－1**

| 时间(分) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 温度(℃) | 607 | 367 | 223 | 135 | 82 | 50 | 30 | 18 | 11 | 6 | 1 | 2.5 | 1.8 | 1.3 | 0.9 | 0.6 |

从这个表格可以清楚地看出钢坯的温度随时间变化的规律，随着时间的推移，钢坯的温度逐渐下降，越来越接近于冷水的温度 0℃．这种用表格表示函数关系的方法称为表格法．

**例 1.1.5**　$y=\dfrac{\sqrt{2-x^2}}{(x-1)(x+3)}$

这是一个用公式法表示的函数．这个函数的定义域是 $[-\sqrt{2},1)\cup(1,\sqrt{2}]$．在这个集合中每给定一个 $x$，就可以由公式计算得到函数 $y$ 的一个值．

## 二、函数的定义域与图形

函数的对应关系和定义域是函数的两个要素．在给出一个函数时，必须同时说明这个函数的定义域和对应关系，这样才能构成一个完整的函数．函数的定义域是自变量的取值范围，也是函数关系成立的范围．

那么应当如何确定一个函数的定义域？在纯数学的研究中，一个函数经常涉及到一定的数学运算，函数的定义域就是那些能使有关的运算得以成立的实数构成的集合．由这种方式确定的函数定义域称为函数的自然定义域．

例如 $y=\sqrt{x}$ 的定义域是 $[0, +\infty)$，因为负数不能开偶次方；又如 $y=\log_a x$ $(a>0)$ 的定义域是 $(0, +\infty)$，因为零和负数的对数没有意义等等.

但是由实际问题得到的函数，其定义域需要由问题本身的意义来确定. 例如，在自由下落运动中，垂直下落的距离 $s$ 是时间 $t$ 的函数：$s=\dfrac{1}{2}gt^2$. 从纯数学的角度看，这个函数的定义域是 $(-\infty, +\infty)$，但是实际上，运动是在某个时刻 $t_0$ 开始的，并且在另一时刻 $t_1$ 结束（落地时刻），因此定义域应当是 $[t_0, t_1]$.

**例 1.1.6** 求函数 $f(x)=\sqrt{\lg(x-1)}$ 的定义域.

**解** 当且仅当 $\lg(x-1)\geqslant 0$ 时，根式 $\sqrt{\lg(x-1)}$ 才有意义. 另一方面，当且仅当 $x-1\geqslant 1$ 时，有 $\lg(x-1)\geqslant 0$. 因此，$f(x)$ 的定义域是 $[2, +\infty)$.

**例 1.1.7** 求函数 $f(x)=\dfrac{\arcsin 2^x}{x+1}$ 的定义域.

**解** 当 $x=-1$ 时，由于分母等于零，所以 $f(-1)$ 没有意义. 另一方面，只有当 $x$ 满足 $-1\leqslant 2^x\leqslant 1$ 时，$\arcsin 2^x$ 才有意义. 即只有 $x$ 满足 $-\infty\leqslant x\leqslant 0$ 时，$\arcsin 2^x$ 才有意义. 因此，$f(x)$ 的定义域是 $(-\infty, -1)\cup(-1, 0]$.

**例 1.1.8** 函数 $f(x)$ 的定义域是 $[-1, 1]$，求函数 $g(x)=f(2x+3)$ 的定义域.

**解** 为了使 $f(2x+3)$ 有意义，必需且只需使 $x$ 满足不等式

$$-1\leqslant 2x+3\leqslant 1$$

解这个不等式得到 $-2\leqslant x\leqslant -1$. 由此便知 $g(x)=f(2x+3)$ 的定义域是 $[-2, -1]$.

函数 $y=f(x)$ 的图形是平面上所有以 $x\in D(f)$ 为横坐标、以 $y=f(x)$ 为纵坐标的点构成的集合. 也就是满足 $y=f(x)\,[x\in D(f)]$ 的点构成的集合.（图 1－2）

正确地描绘函数图形，对于认识因变量对自变量的依赖关系、认识函数所反映的客观规律，有很好的辅助作用.

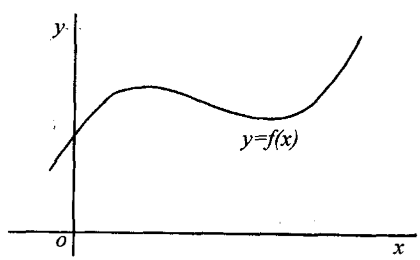


图 1－2

## 三、函数的一些重要性质

（一）偶函数与奇函数

假设函数 $f(x)$的定义域 $D(f)$是关于原点对称的非空集合.

如果对于任意的 $x\in D(f)$，都有

$$f(-x)=f(x),$$

则称 $f(x)$是偶函数.

如果对于任意的 $x\in D(f)$，都有

$$f(-x)=-f(x),$$

则称 $f(x)$是奇函数.

通常见到的偶函数和奇函数，它们的定义域是对称于原点的区间.

例如，$\cos x$ 是定义在$(-\infty, +\infty)$的偶函数；$\sqrt{1-x^2}$是定义在$[-1, 1]$的偶函数. $\dfrac{1}{x^3}$是定义在$(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$的奇函数；$\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$是定义在$(-1, 1)$ 的奇函数.

偶函数的图形关于 $y$ 轴是对称的，即，如果点$(x, y)$在函数图形上，那么，点$(-x, y)$也在函数图形上. 奇函数的图形关于坐标原点是对称的，即，如果点$(x, y)$在函数图形上，那么，点$(-x, -y)$也在函数图形上(图 1-3；图 1-4）.

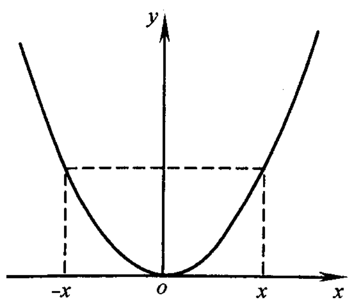


图 1-3

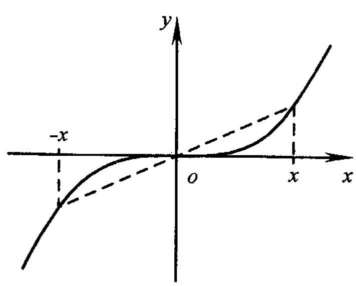


图 1-4

**例 1.1.9** 判定函数 $f(x)=\dfrac{2^x+2^{-x}}{2}$与函数 $g(x)=\dfrac{2^x-2^{-x}}{2}$的奇偶性.

**解** 因为 $f(-x)=\dfrac{2^{-x}+2^x}{2}=f(x)$，所以 $f(x)$是偶函数；又因为

$g(-x)=\dfrac{2^{-x}-2^{x}}{2}=-g(x)$，所以 $g(x)$是奇函数.

偶函数和奇函数仅仅是一种类特殊类型函数．但是，每一个定义在$(-\infty,+\infty)$的函数都可以表示成一个偶函数与一个奇函数之和．事实上，令

$$f_1(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2},\quad f_2(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

则读者容易验证，$f_1(x)$是偶函数，$f_2(x)$是奇函数，并且

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x)$$

（二）单调函数

假定 $f$ 是定义在集合 $D$ 上的函数，如果对于任意的 $x_1$，$x_2\in D$，当 $x_1<x_2$ 时恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f$ 在 $D$ 上为单调增加函数；如果当 $x_1<x_2$ 时恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f$ 在 $D$ 上为单调减少函数.

如果当 $x_1<x_2$ 时恒有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，则称 $f$ 在 $D$ 上为单调非减函数；如果当 $x_1<x_2$ 时恒有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$，则称 $f$ 在 $D$ 上为单调非增函数.

单调增加(非减)函数和单调减少(非增)函数统称为单调函数.

例如，$y=\sin x$ 在$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$单调增加；在$\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$单调减少．函数 $y=\cos x$在区间$(0,\pi)$单调减少，在区间$(-\pi,0)$单调增加．$y=\tan x$ 在$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$单调增加等等.

又如，当 $\mu>0$ 时，幂函数 $y=x^{\mu}$ 在$(0,+\infty)$单调增加；当 $\mu<0$ 时，$y=x^{\mu}$ 在$(0,+\infty)$单调减少.

当 $a>1$ 时，指数函数 $y=a^x$ 单调增加；当 $0<a<1$ 时，指数函数 $y=a^x$ 单调减少.

当 $a>1$ 时，对数函数 $y=\log_a x$ 单调增加等等.

**例 1.1.10** 证明 $f(x)=x^2$ 在$(0,+\infty)$单调增加；在$(-\infty,0)$单调减少.

**证明** 在$(0,+\infty)$任取两点 $x_1$，$x_2$，并且设 $x_1<x_2$．则有

$$f(x_2)-f(x_1)=x_2^2-x_1^2=(x_2-x_1)(x_2+x_1)$$

因为 $x_1>0$，$x_2>0$，$x_1<x_2$，所以$(x_2-x_1)>0$，$(x_2+x_1)>0$．因而

$$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)(x_2+x_1)>0.$$

于是 $f(x)=x^2$ 在 $(0,+\infty)$ 单调增加.

在 $(-\infty,0)$ 任取两点 $x_1$，$x_2$，并且设 $x_1<x_2$. 则有

$$f(x_2)-f(x_1)=x_2^2-x_1^2=(x_2-x_1)(x_2+x_1)$$

因为 $x_1<0$，$x_2<0$，$x_1<x_2$，所以 $(x_2-x_1)>0$，$(x_2+x_1)<0$. 因而

$$f(x_2)-f(x_1)=x_2^2-x_1^2=(x_2-x_1)(x_2+x_1)<0$$

于是 $f(x)=x^2$ 在 $(-\infty,0)$ 单调减少.

关于其他函数的单调性，这里不一一证明. 需要说明的是，用单调性的定义去检验函数是否单调增加或者单调减少一般比较困难. 在今后我们将详细介绍，如何用函数的导数去判定某个函数在某个区间上是否单调，是单调增加还是单调减少. 有关这方面的知识将在第四章中学习.

（三）周期函数

设 $f$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的函数，如果存在正数 $T$，使得对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$，都有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f$ 是以 $T$ 为周期的周期函数. 当 $f$ 以 $T$ 为周期时，那么对于任意的自然数 $n$，$nT$ 也是 $f$ 的周期. 这就是说，周期函数一定有无穷多个正的周期，并且没有最大周期. 当我们说 $f$ 以 $T$ 为周期时，一般是指 $T$ 是 $f$ 的最小周期. 例如，$2\pi$，$4\pi$，…，$2n\pi(n\in N)$ 都是函数 $\sin x$ 的周期，但是，我们通常只说 $\sin x$ 是以 $2\pi$ 为周期的函数.

**例 1.1.11** $y=\sin(at+b)$ 是以 $T=\dfrac{2\pi}{a}$ 为周期的函数. 其中 $a>0$，$b$ 为任意实数.

一般情况下，如果 $f(x)$ 是以 $T$ 为周期的周期函数，则 $f(ax)(a>0)$ 是以 $\dfrac{T}{a}$ 为周期的周期函数.

**证明** 令 $g(x)=f(ax)$，下面证明 $g(x)$ 是以 $\dfrac{T}{a}$ 为周期的函数，为此只需要证明对于任意实数 $x$，都有 $g\left(x+\dfrac{T}{a}\right)=g(x)$.

任取实数 $x$

$$g\left(x+\frac{T}{a}\right)=f\left[a\left(x+\frac{T}{a}\right)\right]=f(ax+T)$$

由于 $f(x)$ 以 $T$ 为周期，所以

$$f(ax+T)=f(ax)=g(x)$$

于是得到