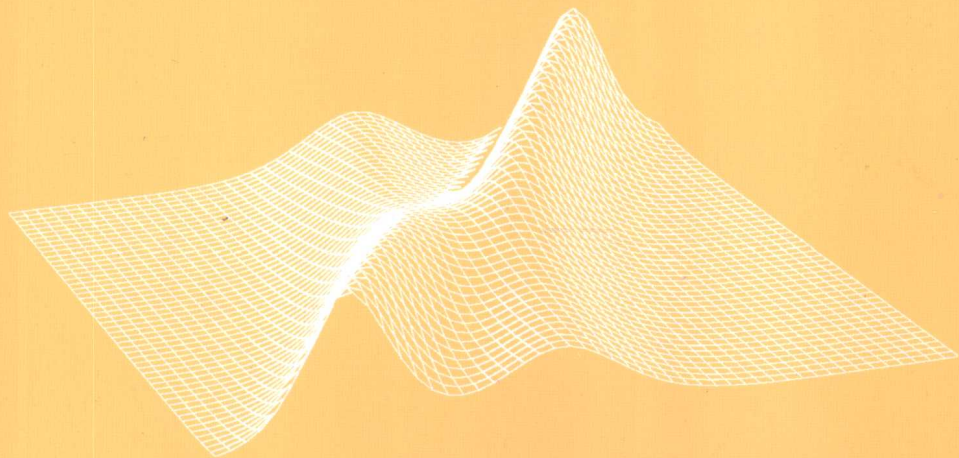


(日) 広田良吾 著

王红艳 李春霞 赵俊霄 虞国富 译

胡星标 校

# 孤子理论中的直接方法



清华大学出版社

<http://www.tup.com.cn>

(日) 広田良吾 著

王红艳 李春霞 赵俊霄 虞国富 译

胡星标 校

# 孤子理论中的直接方法

清华大学出版社  
北京

## 内 容 简 介

关于孤子(也称孤立子)理论中双线性方程的研究,国际上十分活跃,本书主要介绍处理双线性方程的技巧——“直接方法”。作者结合自己多年的研究成果,细致深入地阐述了求解非线性偏微分方程的精确解的过程,“广田方法”的要点,以及如何用 Pfaff 式统一显式表示多孤子解,由此提出了孤子方程可以看成 Pfaff 式恒等式的新观点。全书共分 4 章。第 1 章详细地描述“直接方法”的要点,以及用“直接方法”求解偏微分方程精确解的过程。第 2 章引入需要使用的数学工具,特别是行列式和 Pfaff 式理论,通过实例,深入浅出地介绍这些方面所涉及的技巧。第 3 章从直接方法的角度,讨论孤立子方程的数学结构。第 4 章详细讨论双线性 Bäcklund 变换。

本书可供高等院校和科研机构的数学、物理、力学、光学等专业高年级大学生、研究生和教师阅读,也可供从事非线性科学、理论物理、数学物理和工程等方面的科技人员参考。

北京市版权局著作权合同登记号 图字:01-2005-3352

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13701121933

### 图书在版编目(CIP)数据

孤子理论中的直接方法/(日)广田良吾著;王红艳等译;胡星标校. —北京:清华大学出版社,2008.5

ISBN 978-7-302-17378-6

I. 孤… II. ①广… ②王… ③胡… III. 孤子理论 IV. O411.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2008) 第 055131 号

责任编辑:佟丽霞 王海燕

责任校对:刘玉霞

责任印制:孟凡玉

出版发行:清华大学出版社 地 址:北京清华大学学研大厦 A 座

<http://www.tup.com.cn> 邮 编:100084

社总机:010-62770175 邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, [c-service@tup.tsinghua.edu.cn](mailto:c-service@tup.tsinghua.edu.cn)

质量反馈:010-62772015, [zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn](mailto:zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn)

印 装 者:北京铭成印刷有限公司

经 销:全国新华书店

开 本:148×210 印 张:6.625 字 数:193千字

版 次:2008年5月第1版 印 次:2008年5月第1次印刷

印 数:1~2000

定 价:29.00元

---

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题,请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话:010-62770177 转 3103 产品编号:015883-01

## 版权声明

Chokusetsuho vi yoru soliton no sari

広田良吾

400005676X

本书日文版于 1992 年出版，版权为 Iwanami Shoten Publishers (岩波书店) 所有。

本书中文版专有出版权由 Iwanami Shoten Publishers (岩波书店) 授权清华大学出版社，版权为清华大学出版社所有。

北京市版权局著作权合同登记号 图字：01-2005-3352

## 译者序

《孤子理论中的直接方法》的作者是日本数学物理界著名学者 Ryogo Hirota(広田良吾). Ryogo Hirota 教授生于 1932 年, 1954 年毕业于日本九州大学理学院物理系, 后去美国留学, 并在美国西北大学获得博士学位. 历任日本 RCA 基础研究所研究员, 日本立命馆大学理工学院教授, 广岛大学工学院教授, 早稻田大学理工学院教授, 现为早稻田大学名誉教授.

Ryogo Hirota 教授是国际公认的孤子理论的权威之一, 他的工作在国际上引起了极大的反响, 他发现的双线性方法被国际同行称为广田方法, 由他发明的双线性算子被称为广田算子. 在由 E.A. Jackson 所著的专著《非线性动力学展望》中所附的该领域大事记中两次提到 Ryogo Hirota 发现的双线性方法. Ryogo Hirota 教授著有多部学术著作, 《孤子理论中的直接方法》一书为其代表作, 自 1992 年 10 月 12 日在日本首次出版, 到 2005 年该书已 4 次印刷发行. 另外, 该书的英文版于 2004 年由英国剑桥大学出版社出版发行.

一般而言, 求解诸如孤子方程的非线性偏微分方程的精确解是非常困难的. 而由 Ryogo Hirota 教授发明的“直接方法”可以统一地用来解决各种各样的非线性偏微分方程, 这个“直接方法”简洁有效. 为了纪念 Ryogo Hirota 教授的这项工作, 该方法用作者名字命名为“广田方法”.

《孤子理论中的直接方法》一书的译者是王红艳博士、李春霞博士、赵俊霄博士和虞国富博士(以姓氏笔画为序), 他们已从事这个方面的研究若干年, 取得了不少新的有意义的成果. 其中, 虞国富翻译了第 1 章, 赵俊霄翻译了第 2 章, 李春霞翻译了第 3 章和目录、索引, 王红艳翻译了第 4 章以及前言和后记, 胡星标研究员负责整本书的统筹和校对工作, 此外王红艳和赵俊霄负责全书的协调工作. 在此译者要特别感谢导师胡星标研究员在本书翻译过程中的指导, 使得这本书

在翻译的精确性和语言的优美性上有了很大程度的提高，促成了这本书的顺利出版发行。

《孤子理论中的直接方法》一书的中文翻译工作主要是基于 A.Nagai, J.Nimmo 和 C.Gilson 三人翻译的《孤子理论中的直接方法》英文版，同时参考了 Ryogo Hirota 教授的日文版原著。原著和英译本写作优美、结构紧凑、条理清晰、文字流畅，全面细致通俗地介绍了 Ryogo Hirota 教授创造的双线性方法——广田方法。

借此机会，译校者首先向 Ryogo Hirota 教授表示由衷的感谢。Ryogo Hirota 教授自 1986 年以来先后五次访问中国，多年来本书的译校者得到了 Ryogo Hirota 教授的指导鼓励，并有机会与 Ryogo Hirota 教授进行合作研究，使得我们这个研究小组在国际上双线性方程的研究中占有一席之地，同时 Ryogo Hirota 教授对我们翻译这本专著给予了大力支持。其次，要向英文版的译者 A.Nagai, J.Nimmo 和 C.Gilson 三位教授表示感谢。感谢他们提供专著的英译版以及科研上的合作，特别感谢 J.Nimmo 教授向我们无偿提供了英译版的各种插图和  $\text{\LaTeX}$  源文件。

受中文翻译者学术水平和语言功底的限制，本书肯定存在不少遗憾之处，敬请读者批评指正。

译者

2007 年 12 月

# 前 言

孤子 (孤立子) 是一种很特殊的孤立波, 它与同种类型的波碰撞以后并没有遭到破坏, 这种现象可以通过数值模拟观察到. 但是, 孤子发生碰撞以后真的能够完全恢复到最初的形状吗? 在对这种数值模拟结果进行详细分析的过程中, 发现孤子碰撞以后可以观察到一些波纹, 因而看起来好像最初的形状并没得到完全恢复. 为了说明孤子在碰撞以后是否被破坏, 有必要找到孤子方程的精确解.

一般来说, 寻找非线性偏微分方程 (包括孤子方程) 的精确解是一件非常困难的事情. 而且, 即使能找到求解某个偏微分方程的一种方法, 通常这一方法也不适用于其他方程. 那么, 是否存在这样一种统一的方法, 它既不需要高深的数学知识, 又能够使我们成功地求解多种非线性偏微分方程呢? 基于这个目的, 作者研究了直接方法.

第 1 章从物理直观的角度讨论孤立波形成的条件, 并说明线性波的叠加不能产生非线性孤立波. 根据这种观察, 我们通过摄动法获得了一种找到非线性波动方程的解的方法, 并导出了直接方法的基本思想. 我们首先引进新的相关变量  $F$  和  $G$ , 把方程的解表示为比例  $G/F$ , 然后解关于  $F$  和  $G$  的方程 (双线性方程). 在这一过程中, 我们引进一个新的二元算子  $D$ -算子, 并给出把非线性偏微分方程转化为双线性形式 (通常称为二次形式) 的一般公式. 由于  $D$ -算子的特殊性质, 利用通常的摄动法求解双线性方程有时会使摄动展开截断为有限项的和. 这样的截断可以产生方程的精确解. 作为例子, 我们找到了著名的孤子方程之一, KdV 方程的一个精确解, 并证明了它的孤子解在碰撞以后保持原来的形状.

第 2 章介绍第 3 章要用到的数学工具, 特别是行列式和 Pfaff 式理论. 我们将通过几个例子全面解释这些技巧, 以便于只有一些基础知识的读者也能够理解. 这一章占全书四分之一的内容.

第 3 章从本书所介绍的直接方法的观点出发来研究孤子方程的结

构. 直到目前已有多种孤子方程被发现, 如果把它们全部写下来要用掉好几页的纸. 现在的问题是: 所有的孤子方程共有的基本结构是什么? 这一问题将在这一章得到解答: 孤子方程 (或者双线性形式) 不是别的, 正是“Pfaff 式恒等式”. 从这一观点出发, 我们说明一些基本孤子方程, 例如 KP、BKP、耦合的 KP、Toda 晶格以及 Toda 分子方程如何转化为 Pfaff 式恒等式.

Pfaff 式 (Pfaffian) 也许是一个比较陌生的词, 但它却与行列式紧密相连. 通常用这样一个性质来定义它: 一个 Pfaff 式的平方就是一个反对称矩阵的行列式. 这一性质经常引起一个误解, 那就是 Pfaff 式仅是行列式的一种特例. 事实上, 把 Pfaff 式作为行列式的一种推广更为自然. 例如, Plücker 关系式和 Jacobi 恒等式是关于行列式的恒等式, 它们对于 Pfaff 式同样成立. 它们实际上可以推广并统一为 Pfaff 式恒等式.

利用 Mikio Sato(佐藤幹夫) 教授设计的 Maya 图表, 一个 Pfaff 式恒等式可以用以下公式说明:

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline \end{array} \\
 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \bigcirc & \bigcirc & & \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & \bigcirc & \bigcirc \\ \hline \end{array} \\
 - \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \bigcirc & & \bigcirc & \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & \bigcirc & & \bigcirc \\ \hline \end{array} \\
 + \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \bigcirc & & & \bigcirc \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & \bigcirc & \bigcirc & \\ \hline \end{array}
 \end{array}$$

能把孤子方程简化为这样一种简单的图表, 这是一件令人惊奇的事!

第 4 章讨论 Bäcklund 变换, 它在孤子理论的发展中有着非常重要的贡献. 双线性形式的 Bäcklund 变换产生了逆散射方法里用到的 Lax 对、新的孤子方程, 以及 Miura 变换. 一个双线性形式的 Bäcklund 变换对应于一个  $D$ -算子的“交换公式”. 首先, 利用这种交换公式可以得到 KdV 方程的一个 Bäcklund 变换. 接下来, 我们演示 KdV 方程 Bäcklund 变换的一些应用. 最后, 我们阐明了其他孤子方程 Bäcklund 变换的结构, 譬如 KP, BKP 以及 Toda 方程, 同时也说明所有这些 Bäcklund 变换可以约化为 Pfaff 式恒等式.



这本书的大部分内容致力于解释关于直接方法的基本理论，因此我们没有足够的空间介绍它在其他领域的应用。尤其令人遗憾的是，我们没能涉及以 Mikio Sato 教授为首的京都学派 (Mikio Sato 教授, Yasuko Sato(佐藤泰子) 教授, Masaki Kashiwara(柏原正樹) 教授, Tetsuji Miwa(三輪哲二) 教授, Michio Jimbo(神保道夫) 教授和 Etsuro Date(伊達悦朗) 教授) 发展起来的关于双线性形式的群理论方面的内容。另外，关于逆散射方法方面的书籍已出版很多，所以这里我们完全省略。这本书的目的就是用尽可能简短的语言告诉读者蕴藏在孤子方程背后数学规则的优美和简明。

以 Mikio Sato 教授为首的京都学派以及 Junkichi Satsuma(薩摩順吉) 教授为首的实验室成员都各自为直接方法的发展做了很大的贡献，作者在这里向他们表示深深的谢意，同时也感谢 Hideyuki Kidachi(木立英行) 博士，他记录的关于作者报告 (于京都大学理学部物理系, 1979 年 2 月 1 日 ~3 日) 的笔记对第 1 章的写作很有帮助。最后，但绝不是最后一个，还要感谢 Satoshi Tsujimoto(辻本諭) 先生和 Tatsuya Imai(今井達也) 先生在绘图和书稿校订方面给予的帮助。

広田良吾

1992 年 8 月

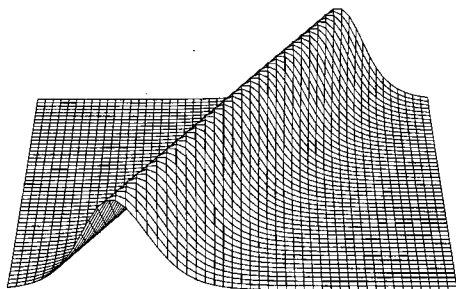
# 目 录

## 前言

第 1 章 孤子方程的双线性化	1
1.0 孤立波和孤子	1
1.1 非线性和色散	2
1.2 非线性微分方程的解	8
1.3 非线性微分方程的线性化	11
1.4 直接方法的本质	18
1.5 一种新的微分算子, $D$ -算子	25
1.6 非线性微分方程的双线性化	36
1.7 双线性方程的解	44
1.8 双线性形式到非线性形式的变换	55
第 2 章 行列式和 Pfaff 式	58
2.0 引言	58
2.1 Pfaff 式	59
2.2 外代数	62
2.3 一般行列式和 Wronski 行列式的 Pfaff 式表示	64
2.4 行列式的 Laplace 展开式和 Plücker 关系式	68
2.5 行列式的 Jacobi 恒等式	75
2.6 特殊行列式	82
2.7 Pfaff 式恒等式	89
2.8 Pfaff 式 $(a_1, a_2, 1, 2, \dots, 2n)$ 的展开公式	94
2.9 Pfaff 式的加法公式	95
2.10 Pfaff 式的微分公式	98
第 3 章 孤子方程的结构	107
3.0 引言	107

3.1	KP 方程: Wronski 行列式解	108
3.2	KP 方程: Gram 行列式解	117
3.3	BKP 方程: Pfaff 式解	123
3.4	耦合 KP 方程: Wronski 型的 Pfaff 式解	129
3.5	耦合 KP 方程: Gram 型的 Pfaff 式解	135
3.6	二维 Toda 晶格方程: Wronski 行列式解	139
3.7	二维 Toda 晶格方程: Gram 行列式解	141
3.8	二维 Toda 分子方程: 双向 Wronski 行列式解	145
3.9	二维 Toda 分子方程: 双重 Wronski 行列式解	150
<b>第 4 章</b>	<b>Bäcklund 变换</b>	<b>154</b>
4.0	什么是 Bäcklund 变换?	154
4.1	KdV-型的双线性方程的 Bäcklund 变换	157
4.2	KP 方程的 Bäcklund 变换	166
4.3	BKP 方程的 Bäcklund 变换	172
4.4	变形 BKP 方程的解	174
4.5	二维 Toda 方程的 Bäcklund 变换	175
4.6	二维变形 Toda 方程的解	180
	后记	188
	参考文献	190
	索引	194

# 第 1 章 孤子方程的双线性化



1-孤子解

## 1.0 孤立波和孤子

当我们说到波的时候,通常想到的是如图 1.1 所示的波列.但是,当我们在靠近缓坡沙滩的海上冲浪的时候,利用的则是孤立波(图 1.2).孤子是一种孤立波,它和其他的同种类型的波碰撞以后保持不变.首先让我们来研究一下描述孤立波的波动方程.

具有孤子解的波动方程同时有非线性项和色散项.在研究如何求解波动方程之前,先让我们来看一下非线性项和色散项对波的行为的影响,同时尝试从直观的角度去探察孤立波在什么条件下能够存在.

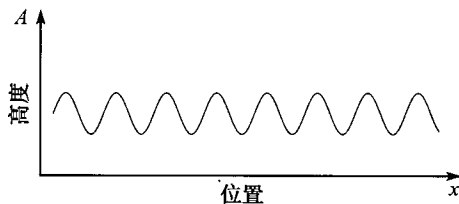


图 1.1 行波

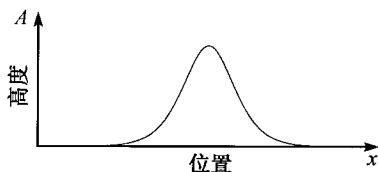


图 1.2 孤立波

## 1.1 非线性和色散

### 1. 线性非色散波

最简单的波的典型例子是声波和电磁波，它们可以用下面的方程描述：

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) f(x, t) = 0, \quad (1.1)$$

其中  $v_0$  是表示波速的常数。由于这个方程可以形式地分解为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - v_0 \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial x}\right) f(x, t) = 0,$$

让我们考虑一种更简单的情形

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial x}\right) f(x, t) = 0. \quad (1.2)$$

这个方程的解同时又是前面方程 (1.1) 的解。方程 (1.1) 给出向右和向左的行波解，然而方程 (1.2) 仅给出右行波解

$$f(x, t) = f(x - v_0 t).$$

假设这个波是周期的，则有最基本的平面波解

$$f(x, t) = \exp[i(\omega t - kx)],$$

其中角频率  $\omega$  和波数  $k$  的关系  $\omega = v_0 k$  称为色散关系，这个例子中它是线性的，常数  $v_0$  表示波的相速度。

具有线性色散关系的波称为非色散波，这种波的特征是具有不同波数  $k$  的平面波叠加产生的初始脉冲波不改变形状。这是因为所有叠

加的平面波以相同的速度传播. 保持形状不变的波作为一种通信方式有着非常重要的应用. 孤子虽然不是非色散波, 但它具有上面的性质, 就此而言, 它应该有实际用途. 接下来, 我们看一下线性色散波动方程.

## 2. 线性色散波

作为最简单的例子, 考虑波动方程

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial x} + \delta \frac{\partial^3}{\partial x^3} \right) f(x, t) = 0. \quad (1.3)$$

假设它有平面波解

$$f(x, t) \propto \exp[i(\omega t - kx)],$$

那么色散关系可以写为

$$\omega = v_0 k - \delta k^3,$$

它关于  $k$  是非线性的, 因此它的相速度与第 1 种情形的不同. 相速度为

$$\frac{\omega}{k} = v_0 - \delta k^2,$$

它依赖于波数  $k$ , 另一方面它的群速度为

$$\frac{\partial \omega}{\partial k} = v_0 - 3\delta k^2.$$

我们可以看出, 当  $\delta > 0$  时, 相速度和群速度都小于  $v_0$ . 由于构成初始波的每一个平面波的速度随  $k$  的变化而变化, 因此初始波在前进的过程中会逐渐塌陷. 这说明线性色散波不能保持它们的初始形状.

以上我们讨论的两种情形都是线性微分方程, 下面将研究非线性项的影响.

## 3. 非线性非色散波

考虑下面的非色散波动方程:

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial}{\partial t} + v(f) \frac{\partial}{\partial x} \right) f(x, t) = 0, \\ v(f) = v_0 + \alpha f^m, \end{cases} \quad (1.4)$$

它是非线性波动方程, 其中波速  $v(f)$  依赖于振幅  $f$ .

方程 (1.4) 有下面形式的解:

$$f(x, t) = f(x - v(f)t).$$

从上面的公式可以看出, 如果  $v = v(f)$  是  $f$  的增函数, 当振幅增加时波速加快. 因此, 从图 1.3 可以看出, 波先是很陡, 但很快就塌陷. 然而, 从物理上说, 在波变陡和塌陷之前, 梯度  $|\partial f / \partial x| \gg 1$ . 此时, 研究方程 (1.4) 变得毫无意义, 我们有必要研究下面的微分方程 (1.5).

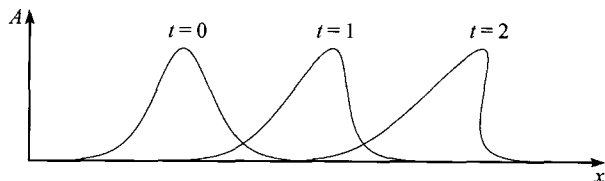


图 1.3 越来越陡的孤立波. 在  $t = 0$  时刻对称的波由于传播速度对波高的依赖性变得越来越陡, 直至最后坍塌

#### 4. 非线性色散波

方程

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial x} + \alpha f^m \frac{\partial}{\partial x} + \delta \frac{\partial^3}{\partial x^3} \right) f(x, t) = 0 \quad (1.5)$$

有一个脉冲波解, 在传播时不改变形状; 即是一种孤立波解. 在数学求解这个方程之前, 让我们看一看这种解存在的物理原因. 我们从第 2、3 种情形看出, 线性色散孤立波和非线性非色散波孤立波都不能存在. 为什么具有非线性项和色散项的波动方程中存在孤立波解呢?

假设图 1.4 中的孤立波存在, 让我们看看这个波在传播过程中是否不改变它的形状. 为了达到这个目的, 至少在波形的顶端和底部, 波速具有相同的值  $v$ . 进一步, 引入新的坐标  $\eta = px - \Omega t$ ,  $v = \Omega/p$ ,  $p$  是任意参数, 其中  $p$  越大, 脉冲波越陡. 这里引入  $\eta$  有助于描述以常速度  $v$  前进的波. 在  $t = 0$  (此时  $\eta = px$ ),  $\eta$  与位置坐标  $x$  成比例. 当  $t \neq 0$  时,  $\eta(\eta = p(x - vt))$  与  $x - vt$  成比例, 并以速度  $v$  传播. 如果波的振幅  $f$  在  $\eta = 0$  达到最大值  $A$ , 则在此点的邻域有

$$f \sim A(1 - \text{常数} \times \eta^2),$$

因为高度  $f$  在顶部可以用  $\eta$  的二次表达式逼近, 从这个方程我们有  $\partial^3 f / \partial x^3 \sim 0$ , 因此在顶部邻域,  $f$  满足下面的微分方程:

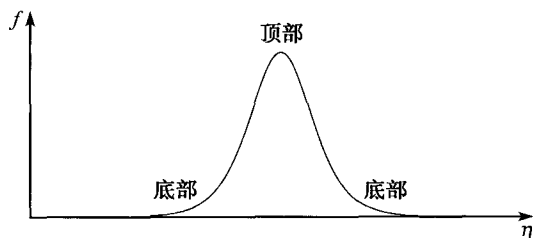


图 1.4 孤立波的波峰和波底

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + [v_0 + \alpha f(x, t)^m] \frac{\partial}{\partial x} \right) f(x, t) \sim 0.$$

这个方程和方程 (1.4) 一样, 因此, 在波的顶端, 即振幅为  $A$  时, 波速为

$$v(f) = v_0 + \alpha A^m. \quad (1.6)$$

很显然, 当  $\alpha > 0$  时,  $v(f)$  大于  $v_0$ .

另一方面, 在波的底部因为  $f$  很小, 我们可以忽略非线性项, 因此  $f$  满足下面的线性微分方程:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial x} + \delta \frac{\partial^3}{\partial x^3} \right) f(x, t) \sim 0. \quad (1.7)$$

正如我们在第 2 种情形中研究的那样, 底部的群速度  $v_{gr}$  和相速度  $v_{pf}$  分别为

$$\begin{cases} v_{gr} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = v_0 - 3\delta k^2, \\ v_{pf} = \frac{\omega}{k} = v_0 - \delta k^2. \end{cases} \quad (1.8)$$

从上面的方程可以看出, 当  $\delta > 0$  时, 群速度和相速度都小于  $v_0$ , 因此孤立波在顶端的速度要大于其在底端的速度. 这表明并没有保持原来的波形, 孤立波不可能存在. 这和实验观察到的结果不同, 原因出在哪里呢?

事实上, 我们关于波在底端的速度计算是不正确的. 因为在底端波的振幅很小, 所以微分方程当然是线性的. 而计算错误的原因在于根据我们对线性波的通常的理解, 将解估计为平面波解, 认为波速



(相速度和群速度) 是线性的. 实际上, 波的底部不是由线性平面波, 譬如

$$f \sim \exp[\pm i(kx - \omega t)]$$

或

$$f \sim \sin(kx - \omega t)$$

叠加产生的, 而应表示成以指数衰减的波

$$f \sim \exp[\pm(px - \Omega t)]. \quad (1.9)$$

而这种解通常是不被考虑的, 因为当  $x \rightarrow +\infty$  或  $x \rightarrow -\infty$  时,  $f$  趋近于无穷, 因此不满足物理边界条件. 在线性波理论里这种解是没有物理意义的. 然而在非线性的波理论里, 可以通过把如图 1.5 所示的局部解连接起来构造一个全局解.

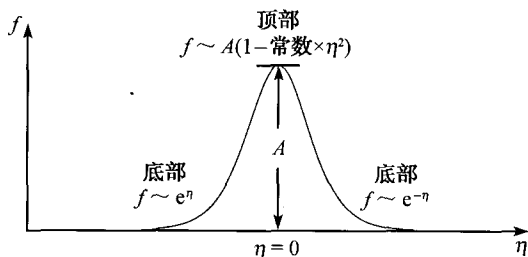


图 1.5 孤立波在波峰和波底处的逼近

现在可以将波的底端表示为上面的指数衰减形式的解  $f \sim \exp(\pm\eta)$ , 并且从式 (1.7) 得到下面的关系, 也称为是非线性色散关系,

$$\Omega = v_0 p + \delta p^3.$$

波速  $v$  表示为

$$v = \frac{\Omega}{p} = v_0 + \delta p^2, \quad (1.10)$$

要和波顶端的速度式 (1.6) 保持一致, 当且仅当下面的关系成立:

$$\delta p^2 = \alpha A^m.$$