

# 计算机视觉中的 数学方法

Mathematical Methods in Computer Vision

吴福朝 著



科学出版社  
[www.sciencep.com](http://www.sciencep.com)



# 计算机视觉中的数学方法

## Mathematical Methods in Computer Vision

吴福朝 著

国家自然科学基金项目(60575019) 资助  
国家 863 计划项目(2006AA01Z116)

科学出版社

北京

## 内 容 简 介

本书由射影几何、矩阵与张量、模型估计 3 篇组成,它们是三维计算机视觉所涉及的基本数学理论与方法。射影几何学是三维计算机视觉的数学基础,本书着重介绍射影几何学及其在视觉中的应用,主要内容包括:平面与空间射影几何,摄像机几何,两视点几何,自标定技术和三维重构理论。矩阵与张量是描述和解决三维计算机视觉问题的必要数学工具,本书着重介绍与视觉有关的矩阵和张量理论及其应用,主要内容包括:矩阵分解,矩阵分析,张量代数,运动与结构,多视点张量。模型估计是三维计算机视觉的基本问题,通常涉及变换或某种数学量的估计,本书着重介绍与视觉估计有关的数学理论与方法,主要内容包括:迭代优化理论,参数估计理论,视觉估计的代数方法、几何方法、鲁棒方法和贝叶斯方法。

本书可作为大学高年级本科生、研究生的教材。相关领域的研究人员也可以参考。

### 图书在版编目(CIP)数据

计算机视觉中的数学方法/吴福朝著. —北京:科学出版社,2008

ISBN 978-7-03-021023-4

I. 计… II. 吴… III. 计算机视觉-数学方法 IV. TP302.7

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 014655 号

责任编辑:王淑兰/责任校对:刘彦妮

责任印制:吕春珉/封面设计:三函设计

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

盛志印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2008 年 3 月第 一 版 开本:787×1092 1/16

2008 年 3 月第一次印刷 印张:24 1/4

印数:1—3 000 字数:572 000

定价:48.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈新欣〉)

销售部电话 010-62136131 编辑部电话 010-62130750

版板所有,侵权必究

举报电话:010-64030229;010-64034315;13501151303

## 前 言

计算机视觉的研究目标是使计算机具有从二维图像认知三维现实环境的能力,这种能力不仅使计算机能感知三维物体的结构与运动信息,而且能对它们进行识别与理解。自20世纪80年代初形成的Marr计算框架,以及随后发展的其他计算理论框架,使得人们相信通过计算手段能实现从二维图像对三维现实世界的感知。为适应不同计算理论框架和增强计算机视觉系统鲁棒性的需要,研究人员通过坚持不懈的努力,引进了众多数学方法和相应的计算方法。这些数学方法涉及代数学、几何学、分析学、概率论以及众多应用数学分支,这对初学者和从事多年研究的人员都感到非常困惑,真的需要这么多复杂的数学来解决计算机视觉问题吗?是数学的无能还是我们没有发现能解决计算机视觉问题的一种“好数学”?这正是计算机视觉的魅力所在,它吸引着众多学者在该领域进行探索与研究。

如果“计算能实现从二维图像对三维现实世界的感知”是正确的话,则不论使用什么数学方法其目的都是为了做两件事情,即为计算机视觉问题建立数学模型和模型估计与选择。在建立模型过程中,需要反映计算机视觉的数学理论和需要描述模型的数学工具与方法;在模型估计与选择中,需要数学计算技术,包括数值计算与统计计算。本书从以上提出的3个需要出发,介绍三维计算机视觉所涉及的基本数学理论与方法。

本书由以下3篇构成:

第一篇:射影几何。它是三维计算机视觉的数学理论基础,主要内容包括:平面与空间射影几何,摄像机几何,两视点几何,自标定理论和三维重构理论。

第二篇:矩阵与张量。它是描述三维计算机视觉模型的基本数学工具,同时也是模型估计线性算法的数学基础,主要内容包括:矩阵分解,矩阵分析,张量代数,运动与结构,多视点张量。

第三篇:模型估计。模型估计是三维计算机视觉的基本问题。本篇描述模型估计与选择的基本数学理论与方法,主要内容包括:迭代优化理论,参数估计理论,视觉模型估计的代数方法、几何方法、鲁棒方法与统计方法,以及模型选择的数学方法。

上述3篇所涉及的数学内容是相对独立的,但计算机视觉将它们组成一个有机的整体。

本书是在作者为计算机视觉方向的研究生所开设的课程讲义基础上形成

的,目的是为初学者介绍三维计算机视觉中的基本数学理论、方法及其应用。通过阅读本书,读者能提高分析、解决有关计算机视觉问题的数学能力,为进入该领域前沿研究做准备。

本书的出版得到国家自然科学基金项目(60575019)和国家 863 计划项目(2006AA01Z116)资助,特此致谢。

本书写作过程中,参考了有关书籍和文献(见本书列出的参考文献),在此向这些作者一并致谢。

作 者

于北京中关村

# 目 录

## 前言

## 第一篇 射影几何

<b>第 1 章 平面射影几何</b> .....	3
1.1 射影平面 .....	3
1.1.1 射影平面 .....	3
1.1.2 叉积 .....	4
1.1.3 交比 .....	5
1.2 二次曲线 .....	7
1.2.1 矩阵表示 .....	7
1.2.2 切点与切线 .....	8
1.2.3 配极对应 .....	9
1.2.4 对偶二次曲线 .....	10
1.2.5 圆环点及其对偶 .....	11
1.3 二维射影变换.....	13
1.3.1 二维射影变换 .....	13
1.3.2 直线与二次曲线的变换规则 .....	15
1.4 变换群与不变量.....	16
1.4.1 等距变换群 .....	16
1.4.2 相似变换群 .....	18
1.4.3 仿射变换群 .....	19
1.4.4 射影变换群 .....	21
<b>第 2 章 空间射影几何</b> .....	24
2.1 射影空间.....	24
2.1.1 空间点 .....	24
2.1.2 空间平面.....	24
2.1.3 空间直线.....	26
2.1.4 共线平面束的交比 .....	29
2.2 三维射影变换.....	29
2.2.1 三维射影变换 .....	29
2.2.2 平面与直线的变换规则 .....	30
2.3 二次曲面与变换规则.....	31
2.3.1 基本性质.....	31
2.3.2 二次曲面的对偶 .....	32

2.3.3	绝对二次曲线与绝对二次曲面 .....	35
2.4	变换群与不变量 .....	37
2.4.1	仿射变换群 .....	37
2.4.2	相似变换群 .....	39
2.4.3	等距变换群 .....	39
2.4.4	二次曲面的分类 .....	41
2.5	射影坐标系与射影坐标变换 .....	43
<b>第3章</b>	<b>摄像机几何</b> .....	<b>46</b>
3.1	摄像机模型 .....	46
3.1.1	摄像机模型 .....	46
3.1.2	摄像机矩阵的元素 .....	49
3.1.3	摄像机矩阵估计 .....	51
3.1.4	欧氏空间与射影空间 .....	52
3.2	投影与反投影 .....	53
3.2.1	空间点 .....	53
3.2.2	空间直线 .....	54
3.2.3	空间平面 .....	56
3.2.4	二次曲线 .....	57
3.2.5	二次曲面 .....	58
3.3	恢复平面景物的结构 .....	59
3.3.1	仿射结构 .....	59
3.3.2	相似结构 .....	60
3.3.3	绝对欧氏结构 .....	61
<b>第4章</b>	<b>两视点几何</b> .....	<b>63</b>
4.1	基本矩阵 .....	63
4.1.1	极几何 .....	63
4.1.2	基本矩阵 .....	64
4.1.3	几何解释 .....	67
4.2	单应矩阵 .....	68
4.2.1	单应矩阵 .....	68
4.2.2	与基本矩阵的关系 .....	71
4.2.3	不动点与不动线 .....	71
4.3	基本矩阵估计 .....	73
4.3.1	8-点算法 .....	73
4.3.2	最小点对应算法 .....	74
4.4	恢复摄像机矩阵 .....	75
4.4.1	射影相关 .....	75
4.4.2	射影意义下的摄像机矩阵 .....	77

<b>第 5 章 自标定理论</b> .....	79
5.1 正交性与摄像机内参数 .....	79
5.1.1 隐消点与隐消线 .....	79
5.1.2 正交性与摄像机内参数 .....	80
5.2 圆环点与摄像机内参数 .....	82
5.2.1 内参数的约束方程 .....	82
5.2.2 确定圆环点的图像 .....	82
5.2.3 圆环点与其正交方向 .....	84
5.3 平行性与摄像机内参数 .....	85
5.3.1 平行四边形的不变量与射影 .....	85
5.3.2 平行六面体的不变量与射影 .....	87
5.3.3 摄像机内参数 .....	89
5.4 Kruppa 方程与摄像机内参数 .....	92
5.4.1 Kruppa 方程 .....	92
5.4.2 计算焦距 .....	94
5.5 绝对二次曲线与摄像机内参数 .....	94
5.5.1 基本约束方程 .....	94
5.5.2 变化内参数 .....	95
5.5.3 恒定内参数 .....	96
5.5.4 计算尺度因子 .....	98
5.6 绝对二次曲面与摄像机内参数 .....	99
5.6.1 绝对二次曲面约束 .....	99
5.6.2 自标定约束的等价性 .....	101
<b>第 6 章 三维重构理论</b> .....	104
6.1 三角原理 .....	104
6.2 基本矩阵与射影重构 .....	105
6.3 无穷远平面与仿射重构 .....	106
6.4 绝对二次曲线与度量重构 .....	108
6.5 绝对二次曲面与度量重构 .....	110
6.6 分层重构的实例 .....	112
6.6.1 仿射点对应 .....	112
6.6.2 准仿射重构 .....	113
6.6.3 仿射重构 .....	114
6.6.4 度量重构 .....	117
6.7 多摄像机系统的标定 .....	117
6.7.1 一维标定物 .....	117
6.7.2 仿射摄像机矩阵 .....	118
6.7.3 欧氏摄像机矩阵 .....	119
6.7.4 捆绑调整 .....	120



## 第二篇 矩阵与张量

<b>第 7 章 正交对角化</b> .....	123
7.1 内积空间与正交矩阵 .....	123
7.1.1 内积空间 .....	123
7.1.2 正交矩阵 .....	123
7.2 酉空间与酉矩阵 .....	126
7.2.1 酉空间 .....	126
7.2.2 酉矩阵 .....	127
7.3 正规矩阵 .....	129
7.3.1 Schur 引理.....	129
7.3.2 正规矩阵 .....	130
7.3.3 正交谱分解 .....	133
7.4 厄米特矩阵 .....	135
7.4.1 特征值的极性 .....	135
7.4.2 半正定厄米特矩阵.....	137
7.5 反对称矩阵 .....	139
<b>第 8 章 矩阵分解</b> .....	142
8.1 正交三角分解 .....	142
8.1.1 Givens 方法 .....	143
8.1.2 Householder 方法 .....	144
8.1.3 内参数与外参数的分解 .....	145
8.2 Cholesky 分解 .....	145
8.3 奇异值分解 .....	146
8.3.1 正交对角分解 .....	147
8.3.2 奇异值分解 .....	147
8.3.3 奇异值的极性 .....	149
8.3.4 极分解 .....	150
8.4 最小二乘问题 .....	150
8.4.1 满秩最小二乘问题.....	152
8.4.2 亏秩最小二乘问题.....	153
8.4.3 数值秩的确定 .....	153
8.4.4 齐次最小二乘问题.....	154
8.4.5 约束齐次最小二乘问题 .....	155
<b>第 9 章 矩阵分析</b> .....	157
9.1 向量与矩阵范数 .....	157
9.1.1 向量范数 .....	157
9.1.2 矩阵范数 .....	160
9.1.3 矩阵条件数 .....	164

9.2	矩阵级数与矩阵函数	166
9.2.1	矩阵序列	166
9.2.2	矩阵级数	168
9.2.3	矩阵函数	169
9.3	矩阵导数	172
9.3.1	函数矩阵的导数	172
9.3.2	向量映射关于向量的导数	174
9.3.3	函数关于矩阵的导数	176
9.3.4	函数矩阵关于矩阵的导数	178
9.4	矩阵直积	181
9.4.1	基本性质	181
9.4.2	特征值与特征向量	185
<b>第 10 章</b>	<b>张量代数</b>	<b>187</b>
10.1	张量概述	187
10.1.1	张量	187
10.1.2	张量运算	189
10.2	张量积	191
10.2.1	线性映射	191
10.2.2	多重线性映射	194
10.3	张量	198
10.3.1	张量与代数运算	198
10.3.2	对称与反对称张量	201
10.4	外代数	204
10.4.1	外积	204
10.4.2	外代数	207
10.4.3	Plucker-Grassmann 坐标	210
<b>第 11 章</b>	<b>运动与结构</b>	<b>213</b>
11.1	欧氏运动与结构	213
11.1.1	本质矩阵	213
11.1.2	欧氏运动	214
11.1.3	欧氏结构	216
11.2	仿射运动与结构	217
11.2.1	仿射摄像机	217
11.2.2	仿射极几何	219
11.2.3	仿射运动与结构	221
11.3	射影运动与结构	222
11.3.1	基本原理	223
11.3.2	射影深度	224
11.3.3	迭代分解	225

<b>第 12 章 多视点张量</b> .....	227
12.1 双线性关系 .....	227
12.1.1 基本矩阵的张量形式 .....	227
12.1.2 极点的张量形式 .....	230
12.2 三线性关系 .....	230
12.2.1 三点对应 .....	230
12.2.2 点、线对应 .....	233
12.2.3 三线性关系的独立数 .....	235
12.2.4 恢复摄像机矩阵 .....	235
12.3 四线性关系 .....	237
12.3.1 四线性关系 .....	237
12.3.2 四线性约束的独立数 .....	241
<b>第三篇 模型估计</b>	
<b>第 13 章 迭代优化</b> .....	245
13.1 最优性条件 .....	245
13.1.1 最优性条件 .....	245
13.1.2 迭代格式 .....	248
13.2 一维搜索 .....	248
13.2.1 精确搜索 .....	249
13.2.2 非精确搜索 .....	251
13.3 无约束优化 .....	252
13.3.1 最速下降法 .....	252
13.3.2 Newton 法 .....	252
13.3.3 变度量法 .....	253
13.3.4 共轭方向法 .....	255
13.3.5 L-M 方法 .....	256
13.4 约束优化 .....	257
13.4.1 惩罚法 .....	257
13.4.2 乘子法 .....	260
<b>第 14 章 参数估计</b> .....	264
14.1 最大似然估计 .....	264
14.1.1 基本概念 .....	264
14.1.2 相合性与渐近正态性 .....	266
14.1.3 混合模型 .....	268
14.2 贝叶斯估计 .....	269
14.2.1 贝叶斯模型 .....	269
14.2.2 无信息先验密度 .....	271
14.2.3 共轭先验密度 .....	274

14.2.4 贝叶斯估计 .....	274
14.3 期望/最大化算法 .....	277
14.3.1 EM算法 .....	277
14.3.2 收敛性与估计精度 .....	280
14.3.3 EM算法的推广 .....	282
14.4 混合模型的EM算法 .....	283
14.4.1 一般混合模型 .....	284
14.4.2 混合高斯模型 .....	286
<b>第15章 代数方法</b> .....	289
15.1 估计问题概述 .....	289
15.1.1 模型 .....	289
15.1.2 模型参数化 .....	291
15.2 直接线性方法 .....	293
15.2.1 线性计算框架 .....	293
15.2.2 视觉估计问题 .....	293
15.3 因子化线性方法 .....	297
15.3.1 因子化计算框架 .....	298
15.3.2 视觉估计问题 .....	298
15.4 归一化线性方法 .....	304
<b>第16章 几何方法</b> .....	307
16.1 几何方法 .....	307
16.1.1 直线与二次曲线 .....	307
16.1.2 几何距离最小化 .....	309
16.2 视觉估计问题 .....	313
16.2.1 单应矩阵 .....	313
16.2.2 基本矩阵 .....	314
16.2.3 三焦张量 .....	317
16.2.4 FOE估计 .....	318
16.2.5 三维重构 .....	320
16.3 最大似然方法 .....	324
16.3.1 高斯分布 .....	324
16.3.2 最大似然估计 .....	325
16.3.3 残差与误差 .....	326
16.3.4 参数的协方差 .....	331
16.3.5 应用举例 .....	334
<b>第17章 鲁棒方法</b> .....	338
17.1 RANSAC .....	338
17.1.1 直线的RANSAC估计 .....	338
17.1.2 RANSAC .....	339

17.1.3	基本矩阵	343
17.1.4	$\chi_n^2$ 分布	343
17.2	M-估计	344
17.3	最小中值估计	346
17.4	鲁棒最大后验估计	347
17.4.1	鲁棒最大后验估计	347
17.4.2	似然项与先验项	348
17.4.3	最大化边缘后验	350
17.4.4	最大后验一致抽样算法	352
<b>第 18 章</b>	<b>模型选择</b>	<b>355</b>
18.1	似然比检验	355
18.1.1	基本运动模型	355
18.1.2	似然比检验	357
18.2	AIC 与模型选择	359
18.2.1	AIC 标准	359
18.2.2	用 AIC 选择模型	361
18.3	BIC 与模型选择	364
18.3.1	贝叶斯证据	364
18.3.2	BIC 标准	365
18.3.3	用 BIC 选择模型	367
18.4	GRIC 与模型选择	368
18.4.1	鲁棒最小二乘模型的 GRIC 标准	368
18.4.2	用 GRIC 选择模型	369
<b>参考文献</b>		<b>373</b>

---

第一篇

# 射影几何

射影几何是三维计算机  
视觉的数学基础

## 本篇提要

本篇内容分为两个部分。第一部分由第1、2章构成,主要介绍射影几何理论,这些理论不是射影几何所涉及的全部内容,而是从事三维计算机视觉研究所必须掌握的几何知识;第二部分由第3~6章构成,主要论述射影几何在三维计算机视觉中的应用,读者将会看到射影几何的重要作用。各章具体内容如下:

第1章介绍平面射影几何。主要内容包括:点、线和二次曲线的齐次表示;二次曲线与对偶二次曲线的性质;二维射影变换与基本几何元素的射影变换规则;二维射影变换群及其子群的不变量与不变性质。

第2章介绍空间射影几何。主要内容包括:点、线、面和二次曲面的齐次表示,二次曲面与对偶二次曲面的性质;三维射影变换与基本几何元素的射影变换规则;三维射影变换群及其子群的不变量与不变性质。

第3章介绍摄像机几何。首先,对摄像机进行数学建模;然后,应用前两章的射影几何知识,给出空间基本几何元素的投影性质,以及图像平面基本几何元素的反投影性质。这些投影与反投影性质,是从图像恢复物体几何结构的基础,尤其是绝对二次曲线与绝对二次曲面的投影性质。

第4章介绍两视点几何。应用射影几何知识引进两幅图像的点、线关联关系,即所谓的极几何。基本矩阵是极几何的代数描述,同时它也给出了射影意义下的摄像机矩阵。

第5章介绍自标定理论。主要介绍正交性、圆环点、平行性、Kruppa方程、绝对二次曲线和绝对二次曲面与摄像机内参数的关系。所有自标定方法均来源于射影几何理论,它们都归结为绝对二次曲线或绝对二次曲面的投影性质。

第6章介绍三维重构理论。三维重构是计算机视觉中的核心问题,本章应用射影几何知识建立三维重构理论。不需要图像以外的知识,从图像就能获得射影重构;对于仿射重构,它与确定无穷远平面的射影坐标、确定无穷远单应相互等价的;对于度量重构,它与确定绝对二次曲线、确定绝对二次曲面和确定摄像机内参数相互等价的。

# 第 1 章 平面射影几何

## 1.1 射影平面

### 1.1.1 射影平面

#### 1. 齐次坐标

在本章中,除特别说明外,均假定在平面上建立了欧氏坐标系。平面上的点可用二维有序数组  $\tilde{p} = (x, y)^T$  来表示,即该点的欧氏坐标。平面上的直线方程可以表示为

$$ax + by + c = 0 \quad (1.1.1)$$

在方程(1.1.1)两边同乘以任一非零常数  $t$ ,得到下述方程

$$axt + byt + ct = 0 \quad (1.1.2)$$

方程(1.1.1)与方程(1.1.2)有相同的几何意义,它们表示同一条直线。令

$$p = (xt, yt, t)^T, l = (a, b, c)^T$$

则方程(1.1.2)可写成

$$l^T p = 0 \quad (1.1.3)$$

其中  $p$  是变量,表示直线上的点; $l$  是一个固定的向量,代表该直线。

一般地,  $p = (xt, yt, t)^T$  称为点的齐次坐标,  $l = (a, b, c)^T$  称为直线的齐次坐标。这里的“齐次”也可以这样理解,在这种表示下直线方程(1.1.3)关于点或直线变量都是齐次的,而方程(1.1.1)则是非齐次的。

齐次坐标可以相差任意的非零常数因子,即  $\forall s \neq 0, p$  和  $q = sp$  表示同一个点,因为它们的非齐次坐标相等

$$\tilde{p} = (x/t, y/t)^T = (sx/st, sy/st) = \tilde{q}$$

直线的齐次坐标也可以相差任意的非零常数因子,因为方程  $(sl)^T p = 0$  与方程(1.1.3)确定同一条直线。

#### 2. 射影平面

齐次坐标为  $p_\infty = (x, y, 0)^T$  的点称为无穷远点,其中  $x, y$  至少有一个不为零。注意,无穷远点没有欧氏坐标,这是因为  $x/0 = \infty, y/0 = \infty$  至少有一个成立,同时也可以看出为什么将它称为无穷远点。平面上所有无穷远点所构成的集合称为无穷远直线。由于所有无穷远点  $p_\infty$  都满足方程

$$0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot 0 = 0 \quad (1.1.4)$$

所以,无穷远直线的齐次坐标为  $l_\infty = (0, 0, 1)^T$ 。

由欧氏平面与无穷远直线的并集所形成的扩展平面称为射影平面,有时也称为二维射影空间。



## 1.1.2 叉积

## 1. 三维向量的叉积

令  $\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1, t_1)^T, \mathbf{x}_2 = (x_2, y_2, t_2)^T$  是两个三维向量, 它们的叉积定义为

$$\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & t_2 \end{pmatrix} = \left( \det \begin{pmatrix} y_1 & t_1 \\ y_2 & t_2 \end{pmatrix}, -\det \begin{pmatrix} x_1 & t_1 \\ x_2 & t_2 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \right)^T \quad (1.1.5)$$

叉积和反对称矩阵相关联。由向量  $\mathbf{x} = (x, y, t)^T$ , 按下述方式定义反对称矩阵

$$[\mathbf{x}]_{\times} = \begin{pmatrix} 0 & -t & y \\ t & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} \quad (1.1.6)$$

称为由向量  $\mathbf{x}$  所确定的反对称矩阵。矩阵  $[\mathbf{x}]_{\times}$  具有下述性质:

- 1) 对任意非零向量  $\mathbf{x}$ , 有  $\text{rank}([\mathbf{x}]_{\times}) = 2$ ;
- 2) 对任意两个三维向量  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ , 有  $\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 = [\mathbf{x}_1]_{\times} \mathbf{x}_2$ ;
- 3)  $\mathbf{x}$  是  $[\mathbf{x}]_{\times}$  的右零空间, 同时也是左零空间, 即  $[\mathbf{x}]_{\times} \mathbf{x} = 0, \mathbf{x}^T [\mathbf{x}]_{\times} = 0$ ;
- 4) 对任意三维向量  $\mathbf{y}$ , 有  $\mathbf{y}^T [\mathbf{x}]_{\times} \mathbf{y} = 0$ 。

性质 1) 是明显的, 3) 与 4) 可由性质 2) 导出, 下面验证性质 2)。

令  $\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1, t_1)^T, \mathbf{x}_2 = (x_2, y_2, t_2)^T$ , 则

$$[\mathbf{x}_1]_{\times} \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -t_1 & y_1 \\ t_1 & 0 & -x_1 \\ -y_1 & x_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t_1 y_2 + y_1 t_2 \\ t_1 x_2 - x_1 t_2 \\ -y_1 x_2 + x_1 y_2 \end{pmatrix} = \mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2$$

性质 2) 表明, 两个向量的叉积可以用其中一个向量的反对称矩阵左乘另一个向量来表达。

## 2. 两点、两线的叉积

如果  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$  是射影平面上两点, 则  $\mathbf{l} = \mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2$  表示通过这两点的直线。这是因为, 对直线  $\mathbf{l}$  上的任一点, 它的齐次坐标可以表示为  $\mathbf{p} = s_1 \mathbf{p}_1 + s_2 \mathbf{p}_2$ , 根据反对称矩阵的性质 3) 和 4), 可以得到

$$\mathbf{l}^T \mathbf{p} = \sum_{j=1}^2 s_j ([\mathbf{p}_1]_{\times} \mathbf{p}_2)^T \mathbf{p}_j = 0$$

若三点  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$  共线, 则必有  $\mathbf{p}_2^T [\mathbf{p}_1]_{\times} \mathbf{p}_3 = -([\mathbf{p}_1]_{\times} \mathbf{p}_2)^T \mathbf{p}_3 = 0$ 。反之, 若  $\mathbf{p}_2^T [\mathbf{p}_1]_{\times} \mathbf{p}_3 = 0$ , 则三点  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$  必共线。因此, 有下述命题:

**命题 1.1.1** 1) 两点  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$  连线的坐标是  $\mathbf{l} = [\mathbf{p}_1]_{\times} \mathbf{p}_2$ ; 2) 三点  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$  共线的充要条件是  $\mathbf{p}_2^T [\mathbf{p}_1]_{\times} \mathbf{p}_3 = 0$ 。

**对偶原理** 在射影平面内, 点和线是一对互为对偶元素。在包含“点”和“线”元素的命题中, 如果该命题成立, 则将两个元素的角色互换, 对应的命题也成立。

例如, 命题 1.1.1 有如下对偶命题: