



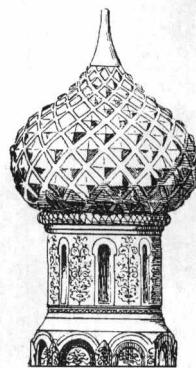
俄罗斯数学
教材选译

随机过程论

□ A. B. 布林斯基 A. H. 施利亚耶夫 著
□ 李占柄 译



高等教育出版社
Higher Education Press



俄罗斯数学
教材选译

● 数学天元基金资助项目

随机过程论

□ A. B. 布林斯基 A. H. 施利亚耶夫 著
□ 李占柄 译



高等教育出版社
Higher Education Press

图字：01-2006-2081号

Булинский А. В., Ширяев А. Н.

《Теория случайных процессов》

Copyright © FIZMATLIT PUBLISHERS RUSSIA 2003

ISBN 5-9221-0335-0

The Chinese language edition is authorized by FIZMATLIT
PUBLISHERS RUSSIA for publishing and sales in the People's
Republic of China.

图书在版编目(CIP)数据

随机过程论/(俄罗斯)布林斯基,(俄罗斯)施利亚耶夫著;
李占柄译. —北京:高等教育出版社,2008.1

ISBN 978 - 7 - 04 - 022359 - 0

I. 随... II. ①布... ②施... ③李... III. 随机过程 -
高等学校 - 教材 IV. 0211.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 191580 号

策划编辑 赵天夫 责任编辑 赵天夫 封面设计 王凌波 责任印制 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010 - 58581118
社址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800 - 810 - 0598
邮政编码	100011	网 址	http://www.hep.edu.cn
总机	010 - 58581000	网上订购	http://www.landraco.com
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
印 刷	北京未来科学技术研究所 有限责任公司印刷厂		
开 本	787 × 1092 1/16	版 次	2008 年 1 月第 1 版
印 张	24.5	印 次	2008 年 1 月第 1 次印刷
字 数	500 000	定 价	49.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 22359 - 00

本集典故出王羲之《晋书》。此段文字，用采气功令至，外变大惊奇且自面，此段中惊，对出俗风深村之反。盖背诵益育个一景出印斑驳，式装帧不由非润面式而容内学连吓置好野处学淡国姓云斑驳，来领过重柔拂幅平空酒中同立学舞学系着武关。用朴的对麻鞋发望顶，木人学淡的表外逐更养静，养素学淡高歌长，草书

· 1 ·

《俄罗斯数学教材选译》序

徐大华

2002年10月

从上世纪 50 年代初起，在当时全面学习苏联的大背景下，国内的高等学校大量采用了翻译过来的苏联数学教材。这些教材体系严密，论证严谨，有效地帮助了青年学子打好扎实的数学基础，培养了一大批优秀的数学人才。到了 60 年代，国内开始编纂出版的大学数学教材逐步代替了原先采用的苏联教材，但还在很大程度上保留着苏联教材的影响，同时，一些苏联教材仍被广大教师和学生作为主要参考书或课外读物继续发挥着作用。客观地说，从解放初一直到文化大革命前夕，苏联数学教材在培养我国高级专门人才中发挥了重要的作用，起了不可忽略的影响，是功不可没的。

改革开放以来，通过接触并引进在体系及风格上各有特色的欧美数学教材，大家眼界为之一新，并得到了很大的启发和教益。但在很长一段时间中，尽管苏联的数学教学也在进行积极的探索与改革，引进却基本中断，更没有及时地进行跟踪，能看懂俄文数学教材原著的人也越来越少，事实上已造成了很大的隔膜，不能不说是一个很大的缺憾。

事情终于出现了一个转折的契机。今年初，在由中国数学会、中国工业与应用数学学会及国家自然科学基金委员会数学天元基金联合组织的迎春茶话会上，有数学家提出，莫斯科大学为庆祝成立 250 周年计划推出一批优秀教材，建议将其中的一些数学教材组织翻译出版。这一建议在会上得到广泛支持，并得到高等教育出版社的高度重视。会后高等教育出版社和数学天元基金一起邀请熟悉俄罗斯数学教材情况的专家座谈讨论，大家一致认为：在当前着力引进俄罗斯的数学教材，有助于扩大视野，开拓思路，对提高数学教学质量、促进数学教材改革均十分必要。《俄罗斯数学教材选译》系列正是在这样的情况下，经数学天元基金资助，由高等教育出版社组织出版的。

经过认真选题并精心翻译校订，本系列中所列入的教材，以莫斯科大学的教材为主，也包括俄罗斯其他一些著名大学的教材。有大学基础课程的教材，也有适合大学高年级学生及研究生使用的教学用书。有些教材虽曾翻译出版，但经多次修订重

版, 面目已有较大变化, 至今仍广泛采用、深受欢迎, 反射出俄罗斯在出版经典教材方面所作的不懈努力, 对我们也是一个有益的借鉴。这一教材系列的出版, 将中俄数学教学之间中断多年的链条重新连接起来, 对推动我国数学课程设置和教学内容的改革, 对提高数学素养、培养更多优秀的数学人才, 可望发挥积极的作用, 并起着深远的影响, 无疑值得庆贺, 特为之序。

序 《新式林连学教材选译》

李大潜

2005年10月

量大数学学院内园, 不景昔大曲想花坛学而全植当苗, 林连升手 02 现出土从
手青丁曲带盟校育, 直气玉卦, 密气来朴林连学女, 林连学连想花坛来主领骑丁日采
嵌开内园, 升手 00 T 降, 大人学媒馆表卦卦大一丁养卦, 脚基学连想实卦表卦于学
留卦土真卦大卦卦玉卦, 林连学连想花坛来先刷丁替分走, 林连学连学大卦刷出乘融
代聚旗往, 喜参要主式卦主学师师大, 为师卦林连想花坛些一, 加同, 师师卦林连想花坛
互林连学连想花坛, 久首命革大卦文连直一味如鞭从, 师师卦容, 用卦普卦灾卦卦师卦
的影何不直且, 师师卦师卦容何不直且, 师师卦要重丁卦式中大人口寺恶高固究美深
大, 林连学连美烟卦白卦首谷土卦风爻表卦主卦正卦共融进卦圆, 来以效开革卦
进卦连想花坛从, 中间相兑一卦卦互且, 益卦味爻自卦大卦丁降卦并, 通一爻大界卦容
背卦, 翻卦互抵此卦爻互变更, 通中本基味振且, 革卦互素卦抽卦互磨卦进卦由卦连学
一最尚不游不, 龙卦卦大卦丁效卦石土灾事, 小卦来缺山人卦善顶卦连学连文卦翻
树卦的卦卦个

运用连业工园中, 会学连园中由连, 负古今, 附哭卦进卦个一丁卦出干爻卦事
学连育, 土会古茶春此卦卦卦合郑金基元天学连会员委金基元天学连然自泰园灭会学学
一而中其卦爻梦, 林连表们进一出卦卦丁卦且 025 立效思尖长卦大卦进莫, 出卦案
卦则出育卦卦高卦卦并, 斜支系(泽卦土会古对事一爻) 进出卦卦卦卦林连学连些
卦林连学连进卦进卦添卦添卦一金基元天学连味卦卦出育卦卦高卦会, 对重更高由
大卦丁卦育, 林连学连进卦进卦添卦添卦进卦, 量卦卦连学连高卦卦, 漫思卦开, 漫卦
卦进卦出育卦卦高由, 颁资金基元天学连登, 丁属卦卦卦卦亦是五国茶《卦卦林连学
卦进卦出卦卦

林连学连大卦演莫知, 林连卦人风浪中风茶本, 互交卦卦小卦卦进卦真卦卦登
大合卦育卦, 林连卦里斯卦基卦大卦, 林连卦学大卦著些一卦其棋突卦卦进卦, 仁氏
重卦卦大卦登卦, 领出卦卦曾虽林连卦育, 卦用卦连卦用卦主卦卦莫生卦进卦高卦

[38] 附录卷之三数学基础由林登伯格
讲授的本课程的讲义由林登伯格编写
于立教大学讲授, 义宝馆章本基础讲义由
章三集 (或 Brown) 基础部分要重中其
量测论与立教类一章 (第 2 章) 果然很
好, 但略缺了两个限长章 (即六、四集齐). 基础的基
本要重中类如丁数列的数列
中其数列一节处理得更深刻地于林登伯格
的 (林登伯格) 代数林登伯格 (第 8 章) 与数列同空集函数林登伯格 (附录)
且, 是福根重集群发公林登伯格, 令林登伯格 (第 1 章), 节冬书代数林登伯格章首
章的其涉定理, 由古 “最概” 语也由古 “最概”, 里宝古村的避难, 义宝古村的避难是
(2.0) 而, (01) 左公馆章二集明 (01, II), 令林登伯格 (第 1 章) 由林登伯格 (第 2 章) 明
中是福根 “区数已表林” 阅章一节古 “号林登伯格 (01) 左公馆 (2) 里宝古村的避难

前 言

这本书是由作者们在莫斯科大学数学力学系不同年代讲稿的基础上所形成的. 在基础课概率论 (第 4 学期) 和数理统计 (第 5 学期) 的基础上, 是在第 6 学期学习随机过程的. 读者会发现这里所写的材料已经大大超出了本学期课程所讲的内容. 而我们进行扩充的目的就是要体现理论的各个方面的分支及其应用. 这里所述的一共八章的内容已经大大覆盖了标准的大纲. 一些重要结果的复杂技巧证明被放到“附录”中. 除此而外, 每章增添了“补充和练习”. 这些材料可能对讨论班的作业及专业课程的准备是有用的.

随机过程的理论基础乃是 Kolmogorov 关于给定的有限分布族, 过程的存在性定理. 在他的经典小册子 [34] 中被称为“基本定理”. 直到发表以前, 随机过程的研究都作为单个的随机变量族, 主要是从它们的有限维分布的性质来考虑的 (例如马氏过程的向前、向后方程). “基本定理” 给出了随机过程按照轨道来分析的可能性, 从而奠定了被称为现代随机分析方向的基础. 特别是, 本书对有限维分布相容性 Kolmogorov 定理是在极其广泛的条件下给出了证明, 并从不同的观点加以讨论. 给出了 Donsker – Prokhorov 不变原理, Strassen 形式重对数律的基本原理 (导致测度族的一般大偏差定理), 关于 Brown 运动嵌入到 Wiener 过程的 Skorokhod 定理, Brown 运动强马氏性的不同形式以及其他深刻的深刻结果. 作为与理论相联系, 有趣的应用是借助鞅技巧所建立起来的保险数学的基本定理, 考虑具有一般马氏性的群众服务理论中著名 Erlang 公式的推导, 研究 Langevin 方程导出 Ornstein – Uhlenbeck 过程, 随机微分方程的基本理论等. 我们还可以发掘与其他数学领域的办法和结果有联系的研究问题, 例如, 用概率方法去解经典 Dirichlet 问题, 利用 Hilbert 空间工具来研究预报理论, 借助于函数理论的方法对 Kolmogorov – Szego 公式的证明. 同时给出了随机金融数学问题概念的初步表述.

随机过程是现代概率论中一个具有多方面应用的、正在广泛、蓬勃发展的分支. 因此, 尽管一再压缩书的内容, 但还是包括几乎 200 多词条的名称. 自然而然, 概率

论的资料也要作为教学参考书, 如 [85].

下面我们将较详细地介绍本书的结构。

在第一章给出了一些后面要用的基本概念的定义, 同时我们还建立了一系列辅助结果. 第二章研究了一类独立增量过程, 其中重要的代表就是 Brown 运动. 第三章完整地阐述了这类重要过程的性质. 在第四、六和七章分别介绍了鞅理论、马氏过程理论和平稳过程理论. 第五章包含了对于概率测度的弱收敛的一些结果, 其中包括随机过程轨道函数空间的测度. 第八章研究了随机积分 (主要是对 Brown 运动) 和随机微分方程的问题.

所有章都是分为许多节. 每一章的定义、推论、例子和公式都是重新标号, 且是单独的标记定义, 单独的标记定理, 等等. 这也包括“附录”在内. 在参考其他章(或附录)的材料时, 要指出它们的标号, 例如, (II, 10) 即第二章的公式 (10), 而 (6,2) 即附录 6 的公式 (2). 证明的最后要用符号 \square . 在每一章的“补充与练习”和附录中的练习是对基本内容的延伸, 所标的号码放到相应内容的右边.

应该指出的是莫斯科大学数学力学系的一系列概率统计课程是在 A. N. Kolmogorov 和 B. V. Gnedenko 直接指导和影响下形成的, 他们多年来引导着概率论教研室的成长。在我们手稿完成的过程中, 对交稿内容与教研室的同事和研究生进行了有益的讨论。在此向他们表示我们衷心的谢意!

作者要向俄罗斯基础研究基金会对这套书的出版给予的财政支持表示感谢

卷二十一

A. B. 布林斯基
A. H. 乌利耶罗夫

A. H. 施利亞耶夫

基本符号

\coloneqq — 定义符号,

\mathbb{N} — 自然数集, $\bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$,

\mathbb{Q} — 有理数集,

\mathbb{Z} — 整数集,

\mathbb{Z}_+ — 非负整数集,

\mathbb{R} — 实数集, $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$,

\mathbb{C} — 复数集,

如果 $a, b \in \mathbb{R}$, 则 $a \wedge b = \min\{a, b\}, a \vee b = \max\{a, b\}, a^+ = \max\{a, 0\}, a^- = \max\{-a, 0\}$,

$[a]$ — 数 a 的整数部分, $\operatorname{sgn} a$ — 数 a 的符号,

\overline{A} — 集 A 的补集,

$\mathbf{1}_A$ — 集 A 的示性函数,

$[A]$ — 集 A 的闭包 (在距离空间中),

∂A — 集 A 的边界 (在距离空间中),

(S, ρ) — 带有距离 ρ 的距离空间 S ,

$B_r(x)$ — 中心为 x 半径为 r 的闭球,

$C(T, S)$ — 在距离空间 T 上, 取值于距离空间 S 的连续函数空间,

$C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ — 具有紧支集的无穷可微函数空间,

$\|\cdot\|_H$ — 巴拿赫 (Banach) (希尔伯特 (Hilbert)) 空间 H 的范数,

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — 概率空间,

E — 数学期望,

D — 方差,

$\operatorname{cov}(X, Y)$ — 随机变量 X 和 Y 的协方差,

$E(X|\mathcal{A})$ — 相对于 σ -代数 \mathcal{A} , X 的条件数学期望,

- $X \in \mathcal{F}|\mathcal{B}$ — 映射 X 相对于 σ -代数 \mathcal{F} 和 \mathcal{B} 是可测的,
 $\sigma\{\mathcal{M}\}$ — 由某个空间 S (带有单位 S) 的子集族 \mathcal{M} 所生成的最小 σ -代数,
 $\mathcal{B}(S)$ — 由拓扑空间中 S 的博雷尔 (Borel) 子集所生成的最小 σ -代数,
 \mathcal{B}_T — 由可测空间 $X_t, t \in T$ 所生成乘积空间中柱集 σ -代数,
 $P_X (PX^{-1}$ 或 $\text{Law}(X))$ — 随机元 X 的分布,
 $\sigma\{X_t, t \in T\}$ — 由随机元 $X_t, t \in T$ 所生成的最小 σ -代数 (在 (Ω, \mathcal{F}, P) 中),
 $Q_n \Rightarrow Q$ — 测度 Q_n 弱收敛于测度 Q ,
 $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X - X_n$ 依分布收敛于 X ,
 $X_n \xrightarrow{P} X - X_n$ 依概率收敛于 X ,
mes — 勒贝格 (Lebesgue) 测度,
 $N(a, C)$ — 具有中值为 a 和协方差阵 C 的正态分布,
 $W = \{W(t), t \geq 0\}$ — 维纳 (Wiener) 过程 (布朗 (Brown) 运动),
 $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ — σ -代数流 (滤基),
 $\mathbb{F}^X = (\mathcal{F}_t^X)_{t \in T}$ — 由过程 $X = \{X_t, t \in T\}$ 所生成的自然 σ -代数流,
 $P(s, x, t, B)$ — 马尔可夫过程的转移函数,
 $p_{i,j}(t)$ — 齐次马尔可夫链的转移概率.

目 录

《俄罗斯数学教材选译》序

前言

基本符号

第一章 随机过程. 随机过程的分布

随机过程论的研究对象,一些问题.随机元及其分布.单调类定理.概率空间的完全化.可测映射的极限.构造具有给定分布的独立随机变量族.部分和过程,经验测度,更新过程,克拉默-卢恩伯格保险模型,泊松随机测度.柱集 σ -代数 \mathcal{B}_T .随机函数作为随机元族,又可作为一个随机映射.随机函数的有限维分布.关于柯尔莫戈洛夫相容性定理.空间 $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ 上测度的特征函数.用特征函数来表述在欧几里得空间(欧氏空间)上测度的相容性条件.对无穷大 T , \mathcal{B}_T 的描述.连续轨道过程.测度投影的相容性.等价的随机函数.可测过程.

第二章 独立增量过程、泊松过程和高斯过程

独立增量过程存在性准则. 泊松过程. 维纳过程(布朗运动). 多维正态分布. 根据中值函数和相关函数构造实高斯函数. 复高斯过程. 作为相关函数, 又作为希尔伯特空间上的再生核的非负定函数. 帕尔赞定理. 布朗运动两种定义的等价性. 哈尔和绍德尔函数. 标准高斯变量序列的摆动. 构造连续维纳过程. 多维布朗运动.

第三章 布朗运动、轨道性质

布朗运动(维纳过程)轨道的几乎处处不可微性. 维纳过程的马氏性, 滤基, 停时及它们的例子. 由停时 τ 以前, 所有观测的事件所组成的 σ -代数 \mathcal{F}_τ . 维纳过程的强

马氏性. 反射原理. 0—1 律. 在 $[0, t]$ 上维纳过程极大值的分布. 重对数律. 重对数局部律.

第四章 鞅. 离散与连续时间 92

鞅, 下鞅, 上鞅. 例子. 杜布分解. 补偿元. 田中公式离散变式. 滤基的扩充. 二次特征. 二次变差. 杜布的自由选择定理. 应用到随机游动(破产问题). 杜布的下鞅极大、极小不等式. 关于穿越数引理. 下鞅收敛定理. 高尔顿-沃森分支过程. $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 空间中鞅收敛定理. 莱维定理. 保险数学的基本定理. 具有连续时间鞅和下鞅的一些不等式.

第五章 测度的弱收敛. 不变原理 128

度量空间上的测度弱收敛. 依分布随机元的收敛. 测度的弱收敛准则. 在连续映射下测度弱收敛的保守性. 在空间 $C(T, S)$ 中测度的弱收敛. 测度族的相对紧性(弱列紧性)和绝对紧性. 普罗霍洛夫定理. 唐斯克尔-普罗霍洛夫不变原理. 林德伯格多维中心极限定理. 独立随机变量和的极大值引理. 柯尔莫戈洛夫(拟合优度)检验证明的步骤. 作为条件维纳过程的布朗桥. 一个概率空间的方法. 斯科罗霍德定理. 弱收敛的度量化. 莱维-斯科罗霍德距离.

第六章 马尔可夫过程. 离散与连续时间 160

马尔可夫过程的等价定义. 取值于 \mathbb{R}^d 独立增量过程的马氏性. 例子. 马尔可夫链, 通过初始分布及转移概率构造马尔可夫链. 作为马尔可夫链的泊松过程. 马尔可夫过程的转移函数. 寻求 d -维布朗运动的转移函数. 马尔可夫过程的有限维分布, 它们通过初始分布及转移概率的表示. 时齐马尔可夫过程. 时齐马尔可夫链的遍历性定理. 一些推论. 不变测度. 随机半群 $(P(t))_{t \geq 0}$ 的无穷小矩阵 Q . 柯尔莫戈洛夫向后、向前微分方程组. 作为 Q^* 矩阵的特征向量的平稳分布. 埃尔朗公式. 导出这些公式的群众服务系统的模型.

第七章 平稳过程. 离散与连续时间 203

正交随机测度及其 σ -有限构造(均方)测度. 根据给定的构造(均方)测度来构造正交随机测度. 对正交随机测度的积分及其性质. 关于相关函数谱分解卡鲁宁定理以及用对正交随机测度的积分来表示该过程. 广义平稳过程及其相关函数. 赫格洛茨定理. 博赫纳-辛钦定理. 连续和离散时间平稳过程的谱表示. 在 $L^2(\Omega)$ 空间中的遍历性. 滑动平均过程. 相关函数及谱密度的统计估计. 线性预测问题. 规则和奇异过程. 沃尔德分解. 规则过程作为物理上可实现的滤波器. 规则过程的柯尔莫戈洛夫准则. 柯尔莫戈洛夫-塞格定理.

第八章 随机积分. 随机微分方程	250
简单随机函数对维纳过程的随机积分. 对适应博雷尔可测随机函数的伊藤随机积分的构造. 随机积分的性质. 伊藤变量替换公式. 朗之万方程. 奥恩斯坦 - 乌伦贝克过程. 随机微分方程强解的存在、唯一性定理. 随机微分方程解的马氏性.	
附录 1 柯尔莫戈洛夫定理的证明	288
附录 2 普罗霍洛夫定理的证明	294
附录 3 林德伯格 - 杜布定理的证明	298
附录 4 博赫纳 - 辛钦定理的证明	307
附录 5 柯尔莫戈洛夫 - 塞格定理的证明	310
附录 6 布朗运动族的强马氏性的证明	315
附录 7 狄利克雷问题的概率解	325
附录 8 大偏差	336
后记	355
参考文献	357
索引	368

第一章

随机过程. 随机过程的分布

内容摘要: 随机过程论的研究对象, 一些问题. 随机元及其分布. 单调类定理. 概率空间的完全化. 可测映射的极限. 构造具有给定分布的独立随机变量族. 部分和过程, 经验测度, 更新过程, 克拉默 (Cramer) - 卢恩伯格 (Luenberger) 保险模型, 泊松 (Poisson) 随机测度. 柱集 σ -代数 \mathcal{B}_T . 随机函数作为随机元族, 又可作为一个随机映射. 随机函数的有限维分布. 关于柯尔莫戈洛夫 (Kolmogorov) 相容性定理. 空间 $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ 上测度的特征函数. 用特征函数来表述在欧几里得 (Euclid) 空间 (欧氏空间) 上测度的相容性条件. 对无穷大 T , \mathcal{B}_T 的描述. 连续轨道过程. 测度投影的相容性. 等价的随机函数. 可测过程.

§1. 现代概率论最重要的特点就是它的方法与结果不仅自身有着独立的数学意义, 而且在其他科学领域中可以找到各种各样的应用, 例如物理, 化学, 生物, 金融数学等, 甚至于在技术领域中. 这也是被人称作“随机过程”的它为什么会成为概率论一个专门分支的一种解释.

概率论最初涉及的只是随机实验 (抛硬币, 掷骰子等), 为此要计算可能发生的这样或那样事件的概率. 随后, 产生了随机变量的概念, 这样就可以定量地描述随机实验的结果, 例如, 在抽奖中, 赢利的多少等. 到后来, 在随机实验中明确地引进了时间因子, 于是就有了严格地建立随机模型的可能性, 在此基础上, 人们就可以用随机过程来描绘随机现象演化的动力学模型.

在 1827 年, 植物学家布朗 (R. Brown) 在显微镜下发现了水中花粉颗粒的随机运动. 这种自然现象中的运动, 后被称为布朗运动, 很长一段时间都解释不清. 仅仅在 19 世纪末至 20 世纪初才被认识, 它是介质原子和分子的一种热运动现象. 同时为了描绘类似形式的过程, 客观上需要通过概率 - 统计的理论来解决. 布朗运动以及更广的

扩散过程的数学和物理模型是由巴舍利耶 (Bachelier), 爱因斯坦 (Einstein), 斯莫卢霍夫斯基 (Smoluchowski), 奥恩斯坦 (Ornstein), 普朗克 (Planck), 朗之万 (Langevin), 福克尔 (Fokker), 维纳 (Wiener), 莱维 (Levy), 柯尔莫戈洛夫 (Kolmogorov), 勒俄多诺维奇 (Leodanowicz) 和其他学者所建立的. 在 1997 年默顿 (Merton) 和舒尔斯 (Scholes) 将布朗运动应用于经济模型当中, 该成果获得了诺贝尔奖.

在系统地叙述随机过程的教程之前, 将提出一些具体的, 然而本身又是很重要的问题和习题, 其中的大部分在本书中都将涉及.

1° 我们将利用对布朗运动泛函的研究来证明一个数理统计的基本结果, 即著名的 Kolmogorov 相容性准则. 此外, 借助于 Brown 运动如何来解决重要的“非随机”问题, 如 狄利克雷 (Dirichlet) 问题: 寻找在区域 $G \subset \mathbb{R}^d$ 内调和, 并且在该区域的边界上具有给定函数的解 (以后我们还会给予详细的讨论).

2° 前面所提到的扩散模型刺激了随机微分方程的发展, 随后的研究要求一种特殊的工具 —— “随机分析”. 这种特殊性是与 Brown 运动的轨道 (它是连续的, 但无论在哪一点上又都不可微) 相关的. 类似的方程还能用于, 例如, 在实际应用中借助它的帮助给出了非常有效的方法 (映像的恢复, 有线和无线广播, 形象识别等), 从杂乱无章背景 (干扰) 中提取有用的信息.

3° 对许多的实际问题来说, 显然有着十分重要意义的是预报问题: 观测在时间 t 以前随机过程的基础上来预测在时刻 $t + s (s > 0)$ 的行为. 产生这样的问题, 例如, 在金融市场上分析有价证券的行情走势, 与此相关的而且非常有趣的是期权的套期保值问题 (当这支股票的真实价格受到随机扰动情况下, 在未来的某个时刻, 根据以前确定的价格买入 — 卖出股票的模型).

4° 保险公司自身提出的任务: 在随机的时刻支付, 且支付多少也是随机的时候, 来配置固定的资金 (将包括投保者的保险费在内). 如何来刻画这样的随机时刻呢? 事实表明, 泊松过程与此极为相类似, 后面将会仔细研究. 我们指出在 Cramer – Luenberger 保险模型中, 为使公司破产的概率不超过给定的 (小的) 数 ε 前提下, 模型中的参数之间应该具有什么样的关系.

5° 最后, 我们将提到各种各样随机现象的渐近分析问题. 作为例子, 可以想象在模型中, 比如说电话局, 呼叫是在随机的时刻到来, 并且呼叫者谈话的时间长短也是随机的, 当发生了“很长时间”呼叫的时候, 它的埃尔朗 (Erlang) 公式.

应该强调的是, 在 3°~5° 中, 我们涉及了两种类型的问题. 第一, 要求建立能反映所研究现象实际的数学模型, 第二, 要求准确地提出问题, 然后解决该问题. 为此, 自然要求有足够的深厚发展的理论. 在熟识这个理论的时候, 我们既会看到许多诱人去研究的随机过程类型, 又会接触到描绘和研究它们的各种各样的方法.

第一章将给出许多技术性的, 且具有辅助性特点的知识. 在阅读以后各章时, 为解释一些问题, 最好还能回顾它们. 在初次阅读时, 可以局限于随机元的概念 (§2), 它的分布 (§6), 随机函数的定义 (§7) 和例子 (§9), 这些例子是基于独立随机元序列

(§8). 同时要求根据 Kolmogorov 定理 (§12), 掌握构造具有给定相容的所有有限维分布的随机变量族. 为了构造在第二章中的独立增量过程和实 Gauss 过程, 利用了前面所提到的, 用随机向量特征函数 (§15) 来表述的相容性条件.

§2. 以后凡涉及的概率都将是假定满足于 Kolmogorov 公理化的某个概率空间 (Ω, \mathcal{F}, P) 上, 也就是具有概率测度 P 的可测空间 (Ω, \mathcal{F}) 上. 注意到可测空间是由某个集和由该集子集所组成的 σ -代数 (一般用手写的字母来表示) 所组合而成的. 定义在可测空间中的某个 σ -代数上非负可列可加集函数称作测度. 在某些场合, 当需要强调测度的特殊性质时, 例如它的有限性或 σ -有限性, 我们经常会特别强调概率测度 P , 或简单的概率 —— 这是满足于 $P(\Omega) = 1$ 的测度. 为了简便, 经常也将概率测度称作测度.

首先, 我们需要取值于 (抽象) 集合 S 的随机变量的概念. 设 (Ω, \mathcal{F}) 和 (S, \mathcal{B}) 是可测空间 ($\Omega \neq \emptyset, S \neq \emptyset$).

定义 1. 映射 $X : \Omega \rightarrow S$ 称作 $\mathcal{F}|\mathcal{B}$ -可测的 (记作 $X \in \mathcal{F}|\mathcal{B}$), 如果 $X^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{F}$, 即对任意的 $B \in \mathcal{B}$, 有 $X^{-1}(B) := \{\omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$.

在概率论中, $\mathcal{F}|\mathcal{B}$ -可测映射通常称作随机元或取值于 S 的随机变量.

对 S 的子集类 \mathcal{M} 来说, $\sigma\{\mathcal{M}\}$ 表示带有单位元 S , 且包含 \mathcal{M} 的最小 σ -代数. 如果 S 是拓扑空间, 特别的是距离空间, 则, 根据定义, Borel σ -代数 $\mathcal{B}(S)$ 是 σ -代数 $\sigma\{\mathcal{M}\}$, 其中 \mathcal{M} 是 S 中所有开集类. 当 $S = \mathbb{R}^k$ (具有欧氏距离), $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ 和 $k > 1$, 随机元 $X(\mathcal{F}|\mathcal{B}$ -可测) 称作随机向量, 而当 $k = 1$ 时, 则称作 (实) 随机变量. 当 X 是空间 (Ω, \mathcal{F}) 上实随机变量, 则 X 的 $\mathcal{F}|\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -可测性, 作为规定, 简称 \mathcal{F} -可测性.

引理 1. 设 $X : \Omega \rightarrow S$ (映射 X 不假设对任何 σ -代数可测) 和 \mathcal{M} 是 S 的某个子集类. 这时 $X \in \mathcal{A}|\sigma\{\mathcal{M}\}$, 其中 $\mathcal{A} := \sigma\{X^{-1}(\mathcal{M})\}$. 此外有 $\sigma\{X^{-1}(\mathcal{M})\} = X^{-1}(\sigma\{\mathcal{M}\})$.

证. 很容易看出, 集合类 $\mathcal{D} = \{D \subset S : X^{-1}(D) \in \mathcal{A}\}$ 是 σ -代数, 因为 \mathcal{A} 是 σ -代数, 并且是由映射原像集组成, 满足抽象集合的运算律. 根据构造 $\mathcal{M} \subset \mathcal{D}$, 因此 $\sigma\{\mathcal{M}\} \subset \mathcal{D}$, 这就是说 $X \in \mathcal{A}|\sigma\{\mathcal{M}\}$, 即 $X^{-1}(\sigma\{\mathcal{M}\}) \subset \mathcal{A}$. 另一方面, $X^{-1}(\mathcal{M}) \subset X^{-1}(\sigma\{\mathcal{M}\})$, 并且 $X^{-1}(\sigma\{\mathcal{M}\})$ 是 σ -代数, 因此 $\mathcal{A} = \sigma\{X^{-1}(\mathcal{M})\} \subset X^{-1}(\sigma\{\mathcal{M}\})$. 这样有 $\mathcal{A} = X^{-1}(\sigma\{\mathcal{M}\})$. \square

推论 1. 假设在引理 1 的条件中, 附带有 Ω 上的 σ -代数 \mathcal{F} . 如果 $X^{-1}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{F}$, 则 $X \in \mathcal{F}|\sigma\{\mathcal{M}\}$.

证. 考虑到 $\sigma\{X^{-1}(\mathcal{M})\} \subset \mathcal{F}$, 利用引理 1 可证. \square

推论的思想在于当 $\mathcal{B} = \sigma\{\mathcal{M}\}$ 时, 为了证明 X 的 $\mathcal{F}|\mathcal{B}$ - 可测性, 必须考虑 \mathcal{B} 中所有集合的原像, 而这时只须考虑 \mathcal{M} 中所有集合 $B, X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ 就足够证明. 正是如此, 在定义取值于 \mathbb{R}^k 中的随机向量时, 只须要求对任意的 $z = (z_1, \dots, z_k) \in \mathbb{R}^k$, 集合 $\{\omega : X(\omega) \leq z\} := \{\omega : X_1(\omega) \leq z_1, \dots, X_k(\omega) \leq z_k\} \in \mathcal{F}$ 就足够了. (请解释)

注 1. 值得注意的是, 不仅仅是由于集合产生 σ -代数, 而且还可以由函数产生. 符号 $\mathcal{A} = \sigma\{X_t, t \in T\}$, 这里 $X_t : \Omega \rightarrow S_t, (S_t, \mathcal{B}_t)$ 是可测空间, $t \in T$, 表示包含对每个 $t \in T$ 使得 $X_t \in \mathcal{A}|_{\mathcal{B}_t}$, 集合 Ω 中的子集所产生的最小 σ -代数. 显而易见 $\mathcal{A} = \sigma\{X_t^{-1}(B_t) : B_t \in \mathcal{B}_t, t \in T\}$, 并且如果 $X_t \in \mathcal{F}|_{\mathcal{B}_t}$ 对每个 $t \in T$, 则有 $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$.

§3. 除 σ -代数之外我们不得不涉及更狭的一类集合. 称 S 的子集类 \mathcal{C} 为 π -系, 如果对有限交封闭, 即如果 $A, B \in \mathcal{C}$, 则 $A \cap B \in \mathcal{C}$ (对 \mathcal{C} 中的元素, 通常是在补充了集合 S). 定义 S 子集类 \mathcal{D} 为 λ -系, 如果是满足如下性质的子集类: $S \in \mathcal{D}$ 和如果 $A, B \in \mathcal{D}, A \subset B$ 则 $B \setminus A \in \mathcal{D}$, 此外, 如果 $A_n \in \mathcal{D}, n \in \mathbb{N}$ 和 $A_n \uparrow A$ (即 $A_n \subset A_{n+1}, n \in \mathbb{N}$ 和 $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$), 则 $A \in \mathcal{D}$. 对任意 S 的子集类 \mathcal{K} 都存在包含 \mathcal{K} 的最小 π -系 $\pi\{\mathcal{K}\}$ (请解释) 和包含 \mathcal{K} 最小 λ -系 $\lambda\{\mathcal{K}\}$. S 的子集类 \mathcal{M} 是 σ -代数当且仅当 \mathcal{M} 是 π -系又是 λ -系.

定理 1 (单调类定理). 设空间 S 的子集类 π -系 \mathcal{C} 和 λ -系 \mathcal{D} , 且 $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$. 这时有 $\sigma\{\mathcal{C}\} = \lambda\{\mathcal{C}\} \subset \mathcal{D}$.

证. 不失一般性, 可以设 $\mathcal{D} = \lambda\{\mathcal{C}\}$, 这时只要验证 \mathcal{D} 是 π -系. 因为这时 \mathcal{D} 是包含 \mathcal{C} 的 σ -代数. 这样要验证, 如果 $A, B \in \mathcal{D}$, 则 $A \cap B \in \mathcal{D}$. 固定任意集合 $B \in \mathcal{C}$, 定义集合类 $\mathcal{F}_B = \{A \subset S : A \cap B \in \mathcal{D}\}$. 这时 \mathcal{F}_B 是 λ -系, 并且 $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}_B$. 因此 $\mathcal{D} = \lambda\{\mathcal{C}\} \subset \mathcal{F}_B$. 从而, 对任意的 $A \in \mathcal{D}$ 和 $B \in \mathcal{C}$ 有 $A \cap B \in \mathcal{D}$. 现取任意的 $A \in \mathcal{D}$, 研究集合类 $\mathcal{G}_A = \{B \subset S : B \cap A \in \mathcal{D}\}$. 对每个 $A \in \mathcal{D}$, 类似方法可以证明 $\mathcal{D} \subset \mathcal{G}_A$. 这样, \mathcal{D} 对有限交封闭, 于是有 $\sigma\{\mathcal{C}\} \subset \lambda\{\mathcal{C}\}$, 而 $\lambda\{\mathcal{C}\} \subset \sigma\{\mathcal{C}\}$ 是显然的. \square

定理 1 的证明是谢尔品斯基 (Sierpinski) 给出的, 在概率中这个结果得到广泛的应用是与邓肯 (Dynkin) 的工作分不开的. 因此 λ -系也称作 Dynkin 系或 \mathcal{D} -系.

前面所说的单调类定理, 对下面的一些结论的证明是非常有用的.

引理 2. 设可测空间 (Ω, \mathcal{F}) 上, 给定测度 P 和 Q , 并且 $\mathcal{F} = \sigma\{\mathcal{C}\}$. 这里 \mathcal{C} 是 Ω 的子集类组成的 π -系. 则在 \mathcal{F} 上 $P = Q$ 的充分必要条件是在 \mathcal{C} 上有 $P = Q$.

证. 必要性是显而易见的. 充分性是因为所有满足 $P(A) = Q(A)$, \mathcal{F} 中的集合类构成一个 λ -系. \square

引理 3. 设 (Ω, \mathcal{F}, P) 是概率空间, 而 \mathcal{A} 是某个由 \mathcal{F} 的子集组成的代数. 这时对任意的 $C \in \sigma\{\mathcal{A}\}$ 则有

$$\inf_{A \in \mathcal{A}} P\{C \Delta A\} = 0 \quad (1)$$

这里 $C \Delta A = (C \setminus A) \cup (A \setminus C)$. 从而对每个 $C \in \sigma\{\mathcal{D}\}$ 和任意的 $\varepsilon > 0$ 都存在 $A_\varepsilon \in \mathcal{A}$ 使得 $P(C \Delta A_\varepsilon) < \varepsilon$, 由此可得 $|P(C) - P(A_\varepsilon)| < \varepsilon$.

证. 对代数 \mathcal{A} 中任意 A , 满足关系式 (1) 组成 π -系. 而不难验证, 所有满足 (1) 式的集合类组成 λ -系. 根据定理 1 结论得证. \square

引理 4 (测度的正则性). 设 S 是距离空间, Q 是 $\mathcal{B}(S)$ 上的测度. 这时对任意的 Borel 集 B , 有

$$Q(B) = \sup_F Q(F) = \inf_G Q(G), \quad (2)$$

这里上确界是取自对所有的闭集 $F \subset B$, 而下确界是取自对所有的开集 $G \supset B$.

证. 设 ρ 是空间 S 的距离, 并且 $\rho(x, D) = \inf\{\rho(x, y) : y \in D\}$, 这里 $x \in S, D \subset S$. 对 $\delta > 0$ 和闭集 F , 设 $F^\delta = \{x \in S : \rho(x, F) < \delta\}$. 不难验证 F^δ 是开集, 并且当 $\delta \downarrow 0$ 时, $F^\delta \downarrow F$. 因此, 对任意的闭集 B , (2) 式成立. 对 (2) 式成立的所有 Borel 集 B 构成一个 σ -代数 (请证明, 参见 [2; p.16]). 由于 $\mathcal{B}(S)$ 是包含所有 S 的闭子集的最小 σ -代数, 引理的结论得证. \square

§4. 以后我们经常不得不利用已知概率空间 (Ω, \mathcal{F}, P) 的完全化. 设 \mathcal{N} 是 Ω 中满足 $C \in \mathcal{N} \Leftrightarrow \exists D \in \mathcal{F} : C \subset D$ 和 $P(D) = 0$ 的子集类. $\overline{\mathcal{F}}$ 是形如 $A \cup C$ 子集类, 这里 $A \in \mathcal{F}$ 和 $C \in \mathcal{N}$. 很容易验证 $\overline{\mathcal{F}}$ 是 σ -代数 (称作 \mathcal{F} 关于测度 P 的完全化 σ -代数). 根据

$$\overline{P}(A \cup C) = P(A), \quad \text{这里 } A \in \mathcal{F} \text{ 和 } C \in \mathcal{N}, \quad (3)$$

于是有, 在 σ -代数 $\overline{\mathcal{F}}$ 上测度 P 的扩张 (就是说 \mathcal{N} 中的集合具有 0 测度). 如果 $F = A \cup C = B \cup D$, 这里 $A, B \in \mathcal{F}$ 和 $C, D \in \mathcal{N}$, 则 $\overline{P}(F) = P(A) = P(B)$, 不难看出 \overline{P} 是一个在 $\overline{\mathcal{F}}$ 上完全确定的测度.

空间 $(\Omega, \overline{\mathcal{F}}, \overline{P})$ 称作概率空间 (Ω, \mathcal{F}, P) 的完全化 (关于测度 P). 不作特别声明, 一般地在开始时都已经完全化了, 将都用 \mathcal{F}, P 来代替 $\overline{\mathcal{F}}, \overline{P}$ (此时, \mathcal{N} 就是所有 0 概率的事件类). 如果 σ -代数 $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ 则一般地同样也补充了 $P=0$ 子集类 \mathcal{N} , 因此, 得到扩张的 σ -代数 $\mathcal{A}^{(P)} = \mathcal{A} \cup \mathcal{N}$ (与 (3) 式一样地在 $\mathcal{A}^{(P)}$ 上测度的扩张). 很容易看出 $\mathcal{A}^{(P)} = \sigma\{\mathcal{A}, \mathcal{N}\}$. 值得注意的是, 如果取从 σ -代数 \mathcal{F} 到 σ -代数 $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ 上的测度 $P|_{\mathcal{A}}$, 并且关于测度 $P|_{\mathcal{A}}$, \mathcal{A} 完全化, 则一般地说, 所得到的 σ -代数要在 $\mathcal{A}^{(P)}$ 中. 当概率空间 (Ω, \mathcal{F}, P) 是固定的, 则用 \mathcal{A} 表示 $\mathcal{A}^{(P)}$.