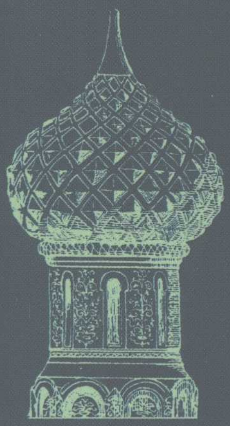
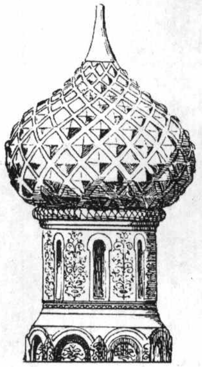


俄罗斯数学
教材选译

随机过程论

□ A.B. 布林斯基　A.H. 施利亚耶夫　著
□ 李占柄　译

高等教育出版社
Higher Education Press



俄 罗 斯 数 学
教 材 选 译

● 数学天元基金资助项目

随机过程论

□ A.B.布林斯基　A.H.施利亚耶夫　著
□ 李占柄　译

高等教育出版社
Higher Education Press

图字: 01–2006–2081 号

Булинский А. В., Ширяев А. Н.

《Теория случайных процессов》

ISBN 5-9221-0335-0

图书在版编目 (CIP) 数据

随机过程论/(俄罗斯)布林斯基,(俄罗斯)施利亚耶夫著;李占柄译 .—北京:高等教育出版社,2008.1

ISBN 978-7-04-022359-0

Ⅰ.随 ... Ⅱ.①布 ...②施 ...③李 ... Ⅲ.随机过程-高等学校-教材 Ⅳ.0211.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 191580 号

策划编辑 赵天夫 **责任编辑** 赵天夫 **封面设计** 王凌波 **责任印制** 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京未来科学技术研究所有限责任公司印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com

开　　本	787×1092　1/16	版　　次	2008 年 1 月第 1 版
印　　张	24.5	印　　次	2008 年 1 月第 1 次印刷
字　　数	500 000	定　　价	49.00 元

物料号 22359-00

《俄罗斯数学教材选译》序

从上世纪 50 年代初起, 在当时全面学习苏联的大背景下, 国内的高等学校大量采用了翻译过来的苏联数学教材. 这些教材体系严密, 论证严谨, 有效地帮助了青年学子打好扎实的数学基础, 培养了一大批优秀的数学人才. 到了 60 年代, 国内开始编纂出版的大学数学教材逐步代替了原先采用的苏联教材, 但还在很大程度上保留着苏联教材的影响, 同时, 一些苏联教材仍被广大教师和学生作为主要参考书或课外读物继续发挥着作用. 客观地说, 从解放初一直到文化大革命前夕, 苏联数学教材在培养我国高级专门人才中发挥了重要的作用, 起了不可忽略的影响, 是功不可没的.

改革开放以来, 通过接触并引进在体系及风格上各有特色的欧美数学教材, 大家眼界为之一新, 并得到了很大的启发和教益. 但在很长一段时间中, 尽管苏联的数学教学也在进行积极的探索与改革, 引进却基本中断, 更没有及时地进行跟踪, 能看懂俄文数学教材原著的人也越来越少, 事实上已造成了很大的隔膜, 不能不说是一个很大的缺憾.

事情终于出现了一个转折的契机. 今年初, 在由中国数学会、中国工业与应用数学学会及国家自然科学基金委员会数学天元基金联合组织的迎春茶话会上, 有数学家提出, 莫斯科大学为庆祝成立 250 周年计划推出一批优秀教材, 建议将其中的一些数学教材组织翻译出版. 这一建议在会上得到广泛支持, 并得到高等教育出版社的高度重视. 会后高等教育出版社和数学天元基金一起邀请熟悉俄罗斯数学教材情况的专家座谈讨论, 大家一致认为: 在当前着力引进俄罗斯的数学教材, 有助于扩大视野, 开拓思路, 对提高数学教学质量、促进数学教材改革均十分必要. 《俄罗斯数学教材选译》系列正是在这样的情况下, 经数学天元基金资助, 由高等教育出版社组织出版的.

经过认真选题并精心翻译校订, 本系列中所列入的教材, 以莫斯科大学的教材为主, 也包括俄罗斯其他一些著名大学的教材. 有大学基础课程的教材, 也有适合大学高年级学生及研究生使用的教学用书. 有些教材虽曾翻译出版, 但经多次修订重

版, 面目已有较大变化, 至今仍广泛采用、深受欢迎, 反射出俄罗斯在出版经典教材方面所作的不懈努力, 对我们也是一个有益的借鉴. 这一教材系列的出版, 将中俄数学教学之间中断多年的链条重新连接起来, 对推动我国数学课程设置和教学内容的改革, 对提高数学素养、培养更多优秀的数学人才, 可望发挥积极的作用, 并起着深远的影响, 无疑值得庆贺, 特为之序.

李大潜

2005 年 10 月

前 言

这本书是由作者们在莫斯科大学数学力学系不同年代讲稿的基础上所形成的.

在基础课概率论 (第 4 学期) 和数理统计 (第 5 学期) 的基础上, 是在第 6 学期学习随机过程的. 读者会发现这里所写的材料已经大大超出了本学期课程所讲的内容. 而我们进行扩充的目的就是要体现理论的各个方面的分支及其应用. 这里所述的一共八章的内容已经大大覆盖了标准的大纲. 一些重要结果的复杂技巧证明被放到 "附录" 中. 除此而外, 每章增添了 "补充和练习". 这些材料可能对讨论班的作业及专业课程的准备是有用的.

随机过程的理论基础乃是 Kolmogorov 关于给定的有限分布族, 过程的存在性定理. 在他的经典小册子 [34] 中被称为 "基本定理". 直到发表以前, 随机过程的研究都作为单个的随机变量族, 主要是从它们的有限维分布的性质来考虑的 (例如马氏过程的向前、向后方程). "基本定理" 给出了随机过程按照轨道来分析的可能性, 从而奠定了被称为现代随机分析方向的基础. 特别是, 本书对有限维分布相容性 Kolmogorov 定理是在极其广泛的条件下给出了证明, 并从不同的观点加以讨论. 给出了 Donsker – Prokhorov 不变原理, Strassen 形式重对数律的基本原理 (导致测度族的一般大偏差定理), 关于 Brown 运动嵌入到 Wiener 过程的 Skorokhod 定理, Brown 运动强马氏性的不同形式以及其他的深刻结果. 作为与理论相联系, 有趣的应用是借助鞅技巧所建立起来的保险数学的基本定理, 考虑具有一般马氏性的群众服务理论中著名 Erlang 公式的推导, 研究 Langevin 方程导出 Ornstein – Uhlenbeck 过程, 随机微分方程的基本理论等. 我们还可以发掘与其他数学领域的方法和结果有联系的研究问题, 例如, 用概率方法去解经典 Dirichlet 问题, 利用 Hilbert 空间工具来研究预报理论, 借助于函数理论的方法对 Kolmogorov – Szego 公式的证明. 同时给出了随机金融数学问题概念的初步表述.

随机过程是现代概率论中一个具有多方面应用的、正在广泛、蓬勃发展的分支. 因此, 尽管一再压缩书的内容, 但还是包括几乎 200 多词条的名称. 自然而然, 概率

论的资料也要作为教学参考书, 如 [85].

下面我们将较详细地介绍本书的结构.

在第一章给出了一些后面要用的基本概念的定义, 同时我们还建立了一系列辅助结果. 第二章研究了一类独立增量过程, 其中重要的代表就是 Brown 运动. 第三章完整地阐述了这类重要过程的性质. 在第四、六和七章分别介绍了鞅理论、马氏过程理论和平稳过程理论. 第五章包含了对于概率测度的弱收敛的一些结果, 其中包括随机过程轨道函数空间的测度. 第八章研究了随机积分 (主要是对 Brown 运动) 和随机微分方程的问题.

所有章都是分为许多节. 每一章的定义、推论、例子和公式都是重新标号, 且是单独的标记定义, 单独的标记定理, 等等. 这也包括 "附录" 在内. 在参考其他章 (或附录) 的材料时, 要指出它们的标号, 例如, (Ⅱ, 10) 即第二章的公式 (10), 而 (6,2) 即附录 6 的公式 (2). 证明的最后要用符号 □. 在每一章的 "补充与练习" 和附录中的练习是对基本内容的延伸, 所标的号码放到相应内容的右边.

应该指出的是莫斯科大学数学力学系的一系列概率统计课程是在 A. N. Kolmogorov 和 B. V. Gnedenko 直接指导和影响下形成的, 他们多年来引导着概率论教研室的成长. 在我们手稿完成的过程中, 对交稿内容与教研室的同事和研究生进行了有益的讨论. 在此向他们表示我们衷心的谢意!

作者要向俄罗斯基础研究基金会对这套书的出版给予的财政支持表示感谢!

A. B. 布林斯基

A. H. 施利亚耶夫

莫斯科大学数学力学系概率论教研室

基本符号

$:=$ — 定义符号,

$\mathbb{N}$ — 自然数集, $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \bigcup \{\infty\}$,

$\mathbb{Q}$ — 有理数集,

$\mathbb{Z}$ — 整数集,

$\mathbb{Z}_+$ — 非负整数集,

$\mathbb{R}$ — 实数集, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \bigcup \{\infty\}$,

$\mathbb{C}$ — 复数集,

如果 $a, b \in \mathbb{R}$, 则 $a \wedge b = \min\{a, b\}, a \vee b = \max\{a, b\}, a^+ = \max\{a, 0\}, a^- = \max\{-a, 0\}$,

$[a]$ — 数 a 的整数部分, $\operatorname{sgn} a$ — 数 a 的符号,

$\overline{A}$ — 集 A 的补集,

$\mathbf{1}_A$ — 集 A 的示性函数,

$[A]$ — 集 A 的闭包 (在距离空间中),

∂A — 集 A 的边界 (在距离空间中),

(S, ρ) — 带有距离 ρ 的距离空间 S,

$B_r(x)$ — 中心为 x 半径为 r 的闭球,

$C(T, \mathsf{S})$ — 在距离空间 T 上, 取值于距离空间 S 的连续函数空间,

$C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ — 具有紧支集的无穷可微函数空间,

$\|\cdot\|_H$ — 巴拿赫 (Banach) (希尔伯特 (Hilbert)) 空间 H 的范数,

$(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ — 概率空间,

E — 数学期望,

D — 方差,

$\operatorname{cov}(X, Y)$ — 随机变量 X 和 Y 的协方差,

$\mathsf{E}(X|\mathscr{A})$ — 相对于 σ - 代数 $\mathscr{A}$, X 的条件数学期望,

$X \in \mathscr{F}|\mathscr{B}$ — 映射 X 相对于 σ – 代数 $\mathscr{F}$ 和 $\mathscr{B}$ 是可测的,
$\sigma\{\mathscr{M}\}$ — 由某个空间 S (带有单位 S) 的子集族 $\mathscr{M}$ 所生成的最小 σ – 代数,
$\mathscr{B}(\mathsf{S})$ — 由拓扑空间中 S 的博雷尔 (Borel) 子集所生成的最小 σ – 代数,
$\mathscr{B}_T$ — 由可测空间 $X_t, t \in T$ 所生成乘积空间中柱集 σ – 代数,
P_X (PX^{-1} 或 $\mathrm{Law}(X)$) — 随机元 X 的分布,
$\sigma\{X_t, t \in T\}$ — 由随机元 $X_t, t \in T$ 所生成的最小 σ – 代数 (在 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 中),
$Q_n \Rightarrow Q$ — 测度 Q_n 弱收敛于测度 Q,
$X_n \xrightarrow{\mathscr{D}} X$ — X_n 依分布收敛于 X,
$X_n \xrightarrow{\mathsf{P}} X$ — X_n 依概率收敛于 X,
mes — 勒贝格 (Lebesgue) 测度,
$\mathsf{N}(a, C)$ — 具有中值为 a 和协方差阵 C 的正态分布,
$W = \{W(t), t \geqslant 0\}$ — 维纳 (Wiener) 过程 (布朗 (Brown) 运动),
$\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t \in T}$ — σ – 代数流 (滤基),
$\mathbb{F}^X = (\mathscr{F}_t^X)_{t \in T}$ — 由过程 $X = \{X_t, t \in T\}$ 所生成的自然 σ – 代数流,
$P(s, x, t, B)$ — 马尔可夫过程的转移函数,
$p_{i,j}(t)$ — 齐次马尔可夫链的转移概率.

目 录

第一章

随机过程. 随机过程的分布

内容摘要: 随机过程论的研究对象, 一些问题. 随机元及其分布. 单调类定理. 概率空间的完全化. 可测映射的极限. 构造具有给定分布的独立随机变量族. 部分和过程, 经验测度, 更新过程, 克拉默 (Cramer) – 卢恩伯格 (Luenberger) 保险模型, 泊松 (Poisson) 随机测度. 柱集 σ – 代数 $\mathscr{B}_T$. 随机函数作为随机元族, 又可作为一个随机映射. 随机函数的有限维分布. 关于柯尔莫戈洛夫 (Kolmogorov) 相容性定理. 空间 $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n))$ 上测度的特征函数. 用特征函数来表述在欧几里得 (Euclid) 空间 (欧氏空间) 上测度的相容性条件. 对无穷大 T, $\mathscr{B}_T$ 的描述. 连续轨道过程. 测度投影的相容性. 等价的随机函数. 可测过程.

§1. 现代概率论最重要的特点就是它的方法与结果不仅自身有着独立的数学意义, 而且在其他科学领域中可以找到各种各样的应用, 例如物理, 化学, 生物, 金融数学等, 甚至于在技术领域中. 这也是被人称作"随机过程"的它为什么会成为概率论一个专门分支的一种解释.

概率论最初涉及的只是随机实验 (抛硬币, 掷骰子等), 为此要计算可能发生的这样或那样事件的概率. 随后, 产生了随机变量的概念, 这样就可以定量地描述随机实验的结果, 例如, 在抽奖中, 赢利的多少等. 到后来, 在随机实验中明确地引进了时间因子, 于是就有了严格地建立随机模型的可能性, 在此基础上, 人们就可以用随机过程来描绘随机现象演化的动力学模型.

在 1827 年, 植物学家布朗 (R. Brown) 在显微镜下发现了水中花粉颗粒的随机运动. 这种自然现象中的运动, 后被称为布朗运动, 很长一段时间都解释不清. 仅仅在 19 世纪末至 20 世纪初才被认识, 它是介质原子和分子的一种热运动现象. 同时为了描绘类似形式的过程, 客观上需要通过概率 – 统计的理论来解决. 布朗运动以及更广的

扩散过程的数学和物理模型是由巴舍利耶 (Bachelier), 爱因斯坦 (Einstein), 斯莫卢霍夫斯基 (Smoluhowski), 奥恩斯坦 (Ornstein), 普朗克 (Planck), 朗之万 (Langevin), 福克尔 (Fokker), 维纳 (Wiener), 莱维 (Levy), 柯尔莫戈洛夫 (Kolmogorov), 勒俄多诺维奇 (Leodonowicz) 和其他学者所建立的. 在 1997 年默顿 (Merton) 和舒尔斯 (Scholes) 将布朗运动应用于经济模型当中, 该成果获得了诺贝尔奖.

在系统地叙述随机过程的教程之前, 将提出一些具体的, 然而本身又是很重要的问题和习题, 其中的大部分在本书中都将涉及.

1° 我们将利用对布朗运动泛函的研究来证明一个数理统计的基本结果, 即著名的 Kolmogorov *相容性准则*. 此外, 借助于 Brown 运动如何来解决重要的 "非随机" 问题, 如 狄利克雷 (Dirichlet) *问题*: 寻找在区域 $G \subset \mathbb{R}^d$ 内调和, 并且在该区域的边界上具有给定函数的解 (以后我们还会给予详细的讨论).

2° 前面所提到的扩散模型刺激了*随机微分方程的发展*, 随后的研究要求一种特殊的工具 —— "随机分析". 这种特殊性是与 Brown 运动的轨道 (它是连续的, 但无论在哪一点上又都不可微) 相关的. 类似的方程还能用于, 例如, 在实际应用中借助它的帮助给出了非常有效的方法 (映像的恢复, 有线和无线广播, 形象识别等), 从杂乱无章背景 (干扰) 中提取有用的信号.

3° 对许多的实际问题来说, 显然有着十分重要意义的是*预报问题*: 观测在时间 t 以前随机过程的基础上来预测在时刻 $t+s(s>0)$ 的行为. 产生这样的问题, 例如, 在金融市场上分析有价证券的行情走势, 与此相关的而且非常有趣的是期权的*套期保值问题* (当这支股票的真实价格受到随机扰动情况下, 在未来的某个时刻, 根据以前确定的价格买入 — 卖出股票的模型).

4° 保险公司自身提出的任务: 在随机的时刻支付, 且支付多少也是随机的时候, 来配置固定的资金 (将包括投保者的保险费在内). 如何来刻画这样的随机时刻呢? 事实表明, 泊松过程与此极为相类似, 后面将会仔细研究. 我们指出在 Cramer – Luenberger 保险模型中, 为使公司破产的概率不超过给定的 (小的) 数 ε 前提下, 模型中的参数之间应该具有什么样的关系.

5° 最后, 我们将提到各种各样随机现象的渐近分析问题. 作为例子, 可以想象在模型中, 比如说电话局, 呼叫是在随机的时刻到来, 并且呼叫者谈话的时间长短也是随机的, 当发生了 "很长时间" 呼叫的时候, 它的*埃尔朗* (Erlang) *公式*.

应该强调的是, 在 3°~5° 中, 我们涉及了两种类型的问题. 第一, *要求建立能反映所研究现象实际的数学模型*, 第二, *要求准确地提出问题, 然后解决该问题*. 为此, 自然要求有足够深厚发展的理论. 在熟识这个理论的时候, 我们既会看到许多诱人去研究的随机过程类型, 又会接触到描绘和研究它们的各种各样的方法.

第一章将给出许多技术性的, 且具有辅助性特点的知识. 在阅读以后各章时, 为解释一些问题, 最好还能回顾它们. 在初次阅读时, 可以局限于随机元的概念 (§2), 它的分布 (§6), 随机函数的定义 (§7) 和例子 (§9), 这些例子是基于独立随机元序列

(§8). 同时要求根据 Kolmogorov 定理 (§12), 掌握构造具有给定相容的所有有限维分布的随机变量族. 为了构造在第二章中的独立增量过程和实 Gauss 过程, 利用了前面所提到的, 用随机向量特征函数 (§15) 来表述的相容性条件.

§2. 以后凡涉及的概率都将是假定满足于 Kolmogorov 公理化的某个概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 上, 也就是具有概率测度 P 的可测空间 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上. 注意到可测空间是由某个集和由该集子集所组成的 σ - 代数 (一般用手写的字母来表示) 所组合而成的. 定义在可测空间中的某个 σ - 代数上非负可列可加集函数称作测度. 在某些场合, 当需要强调测度的特殊性质时, 例如它的有限性或 σ - 有限性, 我们经常会特别强调. *概率测度* P, 或简单的*概率* —— 这是满足于 $\mathsf{P}(\Omega) = 1$ 的测度. 为了简便, 经常也将概率测度称作测度.

首先, 我们需要*取值于 (抽象) 集合 S 的随机变量的概念*. 设 $(\Omega, \mathscr{F})$ 和 $(S, \mathscr{B})$ *是可测空间* $(\Omega \neq \varnothing, S \neq \varnothing)$.

定义 1. 映射 $X : \Omega \to S$ 称作 *$\mathscr{F}|\mathscr{B}$ - 可测的* (记作 $X \in \mathscr{F}|\mathscr{B}$), 如果 $X^{-1}(\mathscr{B}) \subset \mathscr{F}$, 即对任意的 $B \in \mathscr{B}$, 有 $X^{-1}(B) := \{\omega : X(\omega) \in B\} \in \mathscr{F}$.

在概率论中, $\mathscr{F}|\mathscr{B}$ - 可测映射通常称作*随机元*或*取值于 S 的随机变量*.

对 S 的子集类 $\mathscr{M}$ 来说, $\sigma\{\mathscr{M}\}$ 表示带有单位元 S, 且包含 $\mathscr{M}$ 的*最小* σ - 代数. 如果 S 是拓扑空间, 特别的是距离空间, 则, 根据定义, Borel σ - 代数 $\mathscr{B}(S)$ 是 σ - 代数 $\sigma\{\mathscr{M}\}$, 其中 $\mathscr{M}$ 是 S 中所有*开*集类. 当 $S = \mathbb{R}^k$ (具有欧氏距离), $\mathscr{B} = \mathscr{B}(\mathbb{R}^k)$ 和 $k > 1$, 随机元 X($\mathscr{F}|\mathscr{B}$ - 可测) 称作*随机向量*, 而当 $k = 1$ 时, 则称作 (实) *随机变量*. 当 X 是空间 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上实随机变量, 则 X 的 $\mathscr{F}|\mathscr{B}(\mathbb{R})$ - 可测性, 作为规定, 简称 $\mathscr{F}$ - 可测性.

引理 1. *设 $X : \Omega \to S$ (映射 X 不假设对任何 σ - 代数可测) 和 $\mathscr{M}$ 是 S 的某个子集类. 这时 $X \in \mathscr{A}|\sigma\{\mathscr{M}\}$, 其中 $\mathscr{A} := \sigma\{X^{-1}(\mathscr{M})\}$. 此外有 $\sigma\{X^{-1}(\mathscr{M})\} = X^{-1}(\sigma\{\mathscr{M}\})$.*

证. 很容易看出, 集合类 $\mathscr{D} = \{D \subset S : X^{-1}(D) \in \mathscr{A}\}$ 是 σ - 代数, 因为 $\mathscr{A}$ 是 σ - 代数, 并且是由映射原像集组成, 满足抽象集合的运算律. 根据构造 $\mathscr{M} \subset \mathscr{D}$, 因此 $\sigma\{\mathscr{M}\} \subset \mathscr{D}$, 这就是说 $X \in \mathscr{A}|\sigma\{\mathscr{M}\}$, 即 $X^{-1}(\sigma\{\mathscr{M}\}) \subset \mathscr{A}$. 另一方面, $X^{-1}(\mathscr{M}) \subset X^{-1}(\sigma\{\mathscr{M}\})$, 并且 $X^{-1}(\sigma\{\mathscr{M}\})$ 是 σ - 代数, 因此 $\mathscr{A} = \sigma\{X^{-1}(\mathscr{M})\} \subset X^{-1}(\sigma\{\mathscr{M}\})$. 这样有 $\mathscr{A} = X^{-1}(\sigma\{\mathscr{M}\})$. □

推论 1. *假设在引理 1 的条件中, 附带有 Ω 上的 σ - 代数 $\mathscr{F}$. 如果 $X^{-1}(\mathscr{M}) \subset \mathscr{F}$, 则 $X \in \mathscr{F}|\sigma\{\mathscr{M}\}$.*

证. 考虑到 $\sigma\{X^{-1}(\mathscr{M})\} \subset \mathscr{F}$, 利用引理 1 可证. □

推论的思想在于当 $\mathscr{B}=\sigma\{\mathscr{M}\}$ 时, 为了证明 X 的 $\mathscr{F}|\mathscr{B}$ - 可测性, 必须考虑 $\mathscr{B}$ 中所有集合的原像, 而这时只须考虑 $\mathscr{M}$ 中所有集合 $B, X^{-1}(B)\in\mathscr{F}$ 就足够证明. 正是如此, 在定义取值于 $\mathbb{R}^k$ 中的随机向量时, 只须要求对任意的 $z=(z_1,\cdots,z_k)\in\mathbb{R}^k$, 集合 $\{\omega: X(\omega)\leqslant z\}:=\{\omega: X_1(\omega)\leqslant z_1,\cdots,X_k(\omega)\leqslant z_k\}\in\mathscr{F}$ 就足够了. (请解释)

注 1. 值得注意的是, 不仅仅是由集合产生 σ - 代数, 而且还可以由函数产生. 符号 $\mathscr{A}=\sigma\{X_t, t\in T\}$, 这里 $X_t:\Omega\to S_t, (S_t,\mathscr{B}_t)$ 是可测空间, $t\in T$, 表示包含对每个 $t\in T$ 使得 $X_t\in\mathscr{A}|\mathscr{B}_t$, 集合 Ω 中的子集所产生的最小 σ - 代数. 显而易见 $\mathscr{A}=\sigma\{X_t^{-1}(B_t): B_t\in\mathscr{B}_t, t\in T\}$, 并且如果 $X_t\in\mathscr{F}|\mathscr{B}_t$ 对每个 $t\in T$, 则有 $\mathscr{A}\subset\mathscr{F}$.

§3. 除 σ - 代数之外我们不得不涉及更狭的一类集合. 称 S 的子集类 $\mathscr{C}$ 为 π - 系, 如果对有限交封闭, 即如果 $A,B\in\mathscr{C}$, 则 $A\bigcap B\in\mathscr{C}$ (对 $\mathscr{C}$ 中的元素, 通常是补充了集合 S). 定义 S 子集类 $\mathscr{D}$ 为 λ - 系, 如果是满足如下性质的子集类: $S\in\mathscr{D}$ 和如果 $A,B\in\mathscr{D}, A\subset B$ 则 $B\backslash A\in\mathscr{D}$, 此外, 如果 $A_n\in\mathscr{D}, n\in\mathbb{N}$ 和 $A_n\uparrow A$ (即 $A_n\subset A_{n+1}, n\in\mathbb{N}$ 和 $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$), 则 $A\in\mathscr{D}$. 对任意 S 的子集类 $\mathscr{K}$ 都存在包含 $\mathscr{K}$ 的最小 π - 系 $\pi\{\mathscr{K}\}$ (请解释) 和包含 $\mathscr{K}$ 最小 λ - 系 $\lambda\{\mathscr{K}\}$. S 的子集类 $\mathscr{M}$ 是 σ - 代数当且仅当 $\mathscr{M}$ 是 π - 系又是 λ - 系.

定理 1 (单调类定理). 设空间 S 的子集类 π - 系 $\mathscr{C}$ 和 λ - 系 $\mathscr{D}$, 且 $\mathscr{C}\subset\mathscr{D}$. 这时有 $\sigma\{\mathscr{C}\}=\lambda\{\mathscr{C}\}\subset\mathscr{D}$.

证. 不失一般性, 可以设 $\mathscr{D}=\lambda\{\mathscr{C}\}$, 这时只要验证 $\mathscr{D}$ 是 π - 系. 因为这时 $\mathscr{D}$ 是包含 $\mathscr{C}$ 的 σ - 代数. 这样要验证, 如果 $A,B\in\mathscr{D}$, 则 $A\bigcap B\in\mathscr{D}$. 固定任意集合 $B\in\mathscr{C}$, 定义集合类 $\mathscr{F}_B=\{A\subset S: A\bigcap B\in\mathscr{D}\}$. 这时 $\mathscr{F}_B$ 是 λ - 系, 并且 $\mathscr{C}\subset\mathscr{F}_B$. 因此 $\mathscr{D}=\lambda\{\mathscr{C}\}\subset\mathscr{F}_B$. 从而, 对任意的 $A\in\mathscr{D}$ 和 $B\in\mathscr{C}$ 有 $A\bigcap B\in\mathscr{D}$. 现取任意的 $A\in\mathscr{D}$, 研究集合类 $\mathscr{G}_A=\{B\subset S: B\bigcap A\in\mathscr{D}\}$. 对每个 $A\in\mathscr{D}$, 类似方法可以证明 $\mathscr{D}\subset\mathscr{G}_A$. 这样, $\mathscr{D}$ 对有限交封闭, 于是有 $\sigma\{\mathscr{C}\}\subset\lambda\{\mathscr{C}\}$, 而 $\lambda\{\mathscr{C}\}\subset\sigma\{\mathscr{C}\}$ 是显然的. □

定理 1 的证明是谢尔品斯基 (Sierpinski) 给出的, 在概率中这个结果得到广泛的应用是与邓肯 (Dynkin) 的工作分不开的. 因此 λ - 系也称作 Dynkin 系或 $\mathscr{D}$ - 系.

前面所说的单调类定理, 对下面的一些结论的证明是非常有用的.

引理 2. 设可测空间 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上, 给定测度 P 和 Q, 并且 $\mathscr{F}=\sigma\{\mathscr{C}\}$. 这里 $\mathscr{C}$ 是 Ω 的子集类组成的 π - 系. 则在 $\mathscr{F}$ 上 $\mathsf{P}=\mathsf{Q}$ 的充分必要条件是在 $\mathscr{C}$ 上有 $\mathsf{P}=\mathsf{Q}$.

证. 必要性是显而易见的. 充分性是因为所有满足 $\mathsf{P}(A)=\mathsf{Q}(A)$, $\mathscr{F}$ 中的集合类构成一个 λ - 系. □

引理 3. 设 $(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P})$ 是概率空间, 而 $\mathscr{A}$ 是某个由 $\mathscr{F}$ 的子集组成的代数. 这时对任意的 $C\in\sigma\{\mathscr{A}\}$ 则有

$$\inf_{A\in\mathscr{A}}\mathsf{P}\{C\triangle A\}=0 \tag{1}$$

这里 $C\triangle A=(C\backslash A)\bigcup(A\backslash C)$. 从而对每个 $C\in\sigma\{\mathscr{D}\}$和任意的 $\varepsilon>0$ 都存在 $A_\varepsilon\in\mathscr{A}$ 使得 $\mathsf{P}(C\triangle A_\varepsilon)<\varepsilon$, 由此可得 $|\mathsf{P}(C)-\mathsf{P}(A_\varepsilon)|<\varepsilon$.

证. 对代数 $\mathscr{A}$ 中任意 A, 满足关系式 (1) 组成 $\pi-$系. 而不难验证, 所有满足 (1) 式的集合类组成 $\lambda-$系. 根据定理 1 结论得证. □

引理 4 (测度的正则性). 设 S 是距离空间, Q 是 $\mathscr{B}(\mathsf{S})$ 上的测度. 这时对任意的 Borel 集 B, 有

$$\mathsf{Q}(B)=\sup_F\mathsf{Q}(F)=\inf_G\mathsf{Q}(G), \tag{2}$$

这里上确界是取自对所有的闭集 $F\subset B$, 而下确界是取自对所有的开集 $G\supset B$.

证. 设 ρ 是空间 S 的距离, 并且 $\rho(x,D)=\inf\{\rho(x,y):y\in D\}$, 这里 $x\in\mathsf{S},D\subset\mathsf{S}$. 对 $\delta>0$ 和闭集 F, 设 $F^\delta=\{x\in\mathsf{S}:\rho(x,F)<\delta\}$. 不难验证 F^δ 是开集, 并且当 $\delta\downarrow0$ 时, $F^\delta\downarrow F$. 因此, 对任意的闭集 B, (2) 式成立. 对 (2) 式成立的所有 Borel 集 B 构成一个 $\sigma-$代数 (请证明, 参见 [2; p.16]). 由于 $\mathscr{B}(\mathsf{S})$ 是包含所有 S 的闭子集的最小 $\sigma-$代数, 引理的结论得证. □

§4. 以后我们经常不得不利用已知概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P})$ 的完全化. 设 $\mathscr{N}$ 是 Ω 中满足 $C\in\mathscr{N}\Leftrightarrow\exists D\in\mathscr{F}:C\subset D$ 和 $\mathsf{P}(D)=0$的子集类. $\overline{\mathscr{F}}$ 是形如 $A\bigcup C$ 子集类, 这里 $A\in\mathscr{F}$ 和 $C\in\mathscr{N}$. 很容易验证 $\overline{\mathscr{F}}$ 是 $\sigma-$代数 (称作 $\mathscr{F}$ 关于测度 P 的完全化 $\sigma-$代数). 根据

$$\overline{\mathsf{P}}(A\bigcup C)=\mathsf{P}(A),\quad \text{这里 } A\in\mathscr{F} \text{ 和 } C\in\mathscr{N}, \tag{3}$$

于是有, 在 $\sigma-$代数 $\overline{\mathscr{F}}$ 上测度 P 的扩张 (就是说 $\mathscr{N}$ 中的集合具有 0 测度). 如果 $F=A\bigcup C=B\bigcup D$, 这里 $A,B\in\mathscr{F}$ 和 $C,D\in\mathscr{N}$, 则 $\overline{\mathsf{P}}(F)=\mathsf{P}(A)=\mathsf{P}(B)$, 不难看出 $\overline{\mathsf{P}}$ 是一个在 $\overline{\mathscr{F}}$ 上完全确定的测度.

空间 $(\Omega,\overline{\mathscr{F}},\overline{\mathsf{P}})$ 称作概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P})$ 的完全化 (关于测度 P). 不作特别声明, 一般地在开始时都已经完全化了, 将都用 $\mathscr{F}$, P 来代替 $\overline{\mathscr{F}},\overline{\mathsf{P}}$ (此时, $\mathscr{N}$ 就是所有 0 概率的事件类). 如果 $\sigma-$代数 $\mathscr{A}\subset\mathscr{F}$ 则一般地同样也补充了 $\mathsf{P}-0$ 子集类 $\mathscr{N}$, 因此, 得到扩张的 $\sigma-$代数 $\mathscr{A}^{(\mathsf{P})}=\mathscr{A}\bigcup\mathscr{N}$ (与 (3) 式一样地在 $\mathscr{A}^{(\mathsf{P})}$ 上测度的扩张). 很容易看出 $\mathscr{A}^{(\mathsf{P})}=\sigma\{\mathscr{A},\mathscr{N}\}$. 值得注意的是, 如果取从 $\sigma-$代数 $\mathscr{F}$ 到 $\sigma-$代数 $\mathscr{A}\subset\mathscr{F}$ 上的测度 P 的压缩 $\mathsf{P}|_{\mathscr{A}}$, 并且关于测度 $\mathsf{P}|_{\mathscr{A}}$, $\mathscr{A}$ 完全化, 则一般地说, 所得到的 $\sigma-$代数要在 $\mathscr{A}^{(\mathsf{P})}$ 中. 当概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P})$ 是固定的, 则用 $\overline{\mathscr{A}}$ 表示 $\mathscr{A}^{(\mathsf{P})}$.