21世纪高职高专精品规划教材

高等数学

GAODENG SHUXUE

◎主编　马颖

中国传媒大学出版社

·21世纪高职高专精品规划教材

高等数学

主　编　马　颖
副主编　贾明斌

中国传媒大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学／马颖主编．—北京：中国传媒大学出版社，2007.8
ISBN 978-7-81085-775-8
Ⅰ.高…　Ⅱ.马　Ⅲ.高等数学　Ⅳ.013
中国版本图书馆CIP数据核字（2007）第134865号

高等数学

作　　者：马　颖
责任编辑：虚　实
责任印制：曹　辉
封面设计：千山书业
出 版 人：蔡　翔

出版发行：中国传媒大学出版社（原北京广播学院出版社）
社　　址：北京市朝阳区定福庄东街1号　　邮编：100024
电　　话：65450532或65450528　　传真：010-65779405
网　　址：http://www.cucp.com.cn
经　　销：新华书店总店北京发行所
印　　刷：徐水宏远印刷有限公司

开　　本：787×1092毫米　1/16
印　　张：19.5
版　　次：2007年9月第1版　2007年9月第1次印刷

ISBN 978-7-81085-775-8/K·775　　定价：36.00元

前 言

《高等数学》是高职高专理工类专业学生的一门必修的重要基础课程，在培养学生的综合素质和创新意识方面起着十分重要的作用.为适应当前迅速发展的高等职业教育的需要，我们依据教育部制订的《高职高专教育高等数学课程教学的基本要求》，并结合我们多年来的教学经验，编写这本供高职高专学生使用的教材，本教材需讲授 140～150 学时，其中带“*”为选学内容，各校可根据教学计划酌情选用.

我们本着以培养高等技术应用性专门人才为根本任务；以适应社会需要为目标，以“应用”为主旨，以必需、够用为度的原则，力求教材的内容易学、实用.因此，本教材的编写体现以下特点：

第一，概念的引入尽量用实例引入，在内容的安排上打破传统的教材结构，精选教材内容，既考虑高等数学本身的连贯性，又注重高职的教育特点，以便更好地体现高职教材的特色.

第二，减少系统的理论推导，加强了法则和公式的实际应用.中学学过的内容，尽量不讲，重点的起纽带作用的知识，少而精.全书以实用性为主.它涵盖了高等职业学院理工类及相关专业必要的数学基础，便于学生自学.

第三，叙述由浅入深，循序渐进，编写时把我们的教学特点和思想，融合到教材中，除传授给学生数学知识外，还传授一种新的、易懂的学习方法和数学思想，尽量使教材简明实用.

第四，本课程力求使学生系统地获得极限、导数、微分、导数的应用、积分及应用、向量代数与空间解析几何、多元函数微积分学、曲线积分与格林公式、无穷级数、常微分方程的基础知识、必要的基础理论和常用的运算方法.通过学习，使学生得到基本数学方法的训练和运用.这些方法解决简单的实际问题的初步训练，为学生学习理工类各专业的后续课程和进一步扩大数学知识打好必要的数学基础.

第五，本书每章有教学目标、本章内容精要、每节后配有习题，每章后有自测题，习题的答案与解法提示．书后附有中学数学常用公式、基本初等函数和常用积分公式.

本书由马颖担任主编，由贾明斌担任副主编。参加本书编写的有(以姓氏笔画为序)：马颖、冯金顺、安宗灵、邱法玉、沈建国、贾明斌、盛宗生、彭敬、戴兴波。

由于编者水平有限，书中难免存在错误和不妥之处，殷切期望广大读者给予指正.

编 者

2007 年 8 月

目　　录

第 1 章　极限、导数与微分

本章教学目标

理解极限的定义，掌握双侧极限与单侧极限之间的关系；熟练应用极限的四则运算法则；理解无穷小、无穷大的概念及其相互关系与性质，会利用无穷小的性质求特殊类型的极限；熟练掌握两个重要极限；理解函数连续的概念，掌握判断函数连续的方法；会求函数的间断点及其类型；理解闭区间上连续函数的三个性质，会用函数的连续性求极限；熟练掌握导数的定义及其演绎形式，掌握左右导数与导数之间的相互关系；理解导数的几何意义，弄清可导与连续的关系，熟练掌握基本初等函数导数公式及运算法则；掌握复合函数的链式求导原理，会求隐函数、幂指函数及参数方程的导数；理解微分的概念，掌握微分与导数的相互关系，会利用微分近似公式作常规近似运算.

§1.1　极限的概念

1.1.1　数列的极限

引例　2000 多年前，我国《庄子・天下篇》中就有记载“一尺之棰，日取其半，万世不竭”，这其中除了蕴涵辩证的哲学思想外，还展现出在变化和运动中观察事物变化的趋势和目标——极限的方法，即每日余量构成的数列$\{\frac{1}{2^n}\}$的极限

$$\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\frac{1}{2^3},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots,\to 0\ (n\to\infty)\ \text{记作}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$$

定义 1　设数列$\{y_n\}$：$y_1,y_2,y_3,\cdots,y_n,\cdots$，若 n 无限增大时，y_n 无限趋近一个确定的常数 A，则称数列y_n的极限存在且为 A，（或称数列收敛于 A，）记作

$$\lim_{n\to\infty}y_n=A\quad \text{或}\ y_n\to A\ (n\to\infty)$$

否则，称数列y_n的极限不存在，（或称数列是发散的），记作$\lim\limits_{n\to\infty}y_n$不存在.

【例 1.1.1】　列出下列数列y_n，并观察其极限$\lim\limits_{n\to\infty}y_n$：

(1)$\{(-1)^n\}$；　(2)$\{(\frac{-2}{3})^n\}$；　(3)$\{(\frac{-3}{2})^n\}$；　(4)$\{2-\frac{1}{n^2}\}$；　(5)$\{3\}$.

解　(1)$\{(-1)^n\}$：$-1,1,-1,1,\cdots$，$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ 不存在——原因是“趋势摇摆不定”；

(2)$\{(\frac{-2}{3})^n\}$：$\frac{-2}{3},\frac{4}{9},\frac{-8}{27},\frac{16}{81},\cdots$，$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{-2}{3})^n=0$；

(3)$\{(\frac{-3}{2})^n\}$：$\frac{-3}{2},\frac{9}{4},\frac{-27}{8},\frac{81}{16},\cdots$，$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{-3}{2})^n=\infty$不存在——“趋势是绝对值越来越大，但不是常数”；

(4)$\{(2-\frac{1}{n^2})\}$：$2-\frac{1}{1},2-\frac{1}{4},2-\frac{1}{9},2-\frac{1}{16},\cdots$，$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}(2-\frac{1}{n^2})=2-0=2$；

(5) $\{3\}$：3,3,3,3…，∴ $\lim\limits_{n\to\infty}3=3$.

推广得到

1. 结论

$$(1)\lim_{n\to\infty}q^n=\begin{cases}\text{不存在}, & q=-1\\ 1, & q=1\\ 0, & |q|<1\\ \infty, & |q|>1\end{cases}$$

$$(2)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}=\begin{cases}0, & \alpha>0\\ +\infty, & \alpha<0\\ 1, & \alpha=0\end{cases}$$

如 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}\overset{\alpha>0}{=}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}=0$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\frac{-2}{3}}}\overset{\alpha<0}{=}=\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{2}{3}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{n^2}=+\infty$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}C=C$（$C$ 为常数）.

注意：$+\infty$、$-\infty$、∞分别读正无穷大、负无穷大、无穷大，区别是运动的方向不同.

2. 性质

(1)惟一性：收敛数列的极限是惟一的，即若 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A$，则常数 A 是惟一的.

(2)有界性：收敛数列是有界的，即若 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A$，则数列 $\{y_n\}$ 必有界.

注意：反之不成立，即有界数列不一定收敛，如 $\{(-1)^n\}$.

3. 法则（前提条件） 若两数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的极限都存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$，则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}b_n=A\pm B$——代数和的极限等于各极限的代数和；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(Ca_n)=C\cdot\lim\limits_{n\to\infty}a_n=C\cdot A$——极限中的常数因子可以先提出来；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_nb_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}b_n=A\cdot B$——乘积的极限等于各极限的乘积；

(4)当 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B\neq0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}=\frac{A}{B}$ ——当分母的极限不为零时，商的极限等于极限的商.

【例 1.1.2】 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=5$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=2$，求

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(3a_n)$； (2) $\lim\limits_{n\to\infty}(3a_n-\frac{b_n}{5})$； (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_nb_n}{3a_n-5b_n}$.

解 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}(3a_n)=3\lim\limits_{n\to\infty}a_n=3\times5=15$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(3a_n-\frac{b_n}{5})=3\lim\limits_{n\to\infty}a_n-\frac{1}{5}\lim\limits_{n\to\infty}b_n=15-\frac{2}{5}=14\frac{3}{5}$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_nb_n}{3a_n-5b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(a_nb_n)}{\lim\limits_{n\to\infty}(3a_n-5b_n)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}b_n}{3\lim\limits_{n\to\infty}a_n-5\lim\limits_{n\to\infty}b_n}=\frac{5\times2}{3\times5-5\times2}=2$.

【例 1.1.3】 求以下各极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(3-\frac{1}{n}+\frac{100}{n^2})$； (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2-n+100}{2n^2+1}$； (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2-n+100}{2n^3+1}$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^3+1}{3n^2-n+100}$； (5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_0n^l+a_1n^{l-1}+\cdots+a_l}{b_0n^m+b_1n^{m-1}+\cdots+b_m}$ $(l,m\in N)$.

解　(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(3-\frac{1}{n}+\frac{100}{n^2})=\lim\limits_{n\to\infty}3-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+100\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=3-0+0=3$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2-n+100}{2n^2+1}\overset{同除n^2}{=}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3-\frac{1}{n}+\frac{100}{n^2}}{2+\frac{1}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(3-\frac{1}{n}+\frac{100}{n^2})}{\lim\limits_{n\to\infty}(2+\frac{1}{n})}=\frac{3-0+0}{2+0}=\frac{3}{2}$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2-n+100}{2n^3+1}\overset{同除n^3}{=}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{100}{n^3}}{2+\frac{1}{n^3}}=\frac{0-0+0}{2+0}=\frac{0}{2}=0$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^3+1}{3n^2-n+100}\overset{同除n^3}{=}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n^3}}{\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{100}{n^3}}=\infty$ (注："$\frac{2}{0}=\infty$")，

或 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^3+1}{3n^2-n+100}\overset{同除n^2}{=}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+\frac{1}{n^2}}{3-\frac{1}{n}+\frac{100}{n^2}}=\infty$ (注："$\frac{\infty}{3}=\infty$")；

归纳可得以下结论：

(5) $$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_0n^l+a_1n^{l-1}+\cdots+a_l}{b_0n^m+b_1n^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}\frac{a_0}{b_0}, & l=m\\ 0, & l<m \quad (l,m\in N)\\ \infty, & l>m\end{cases}$$

定理 1

(1) **夹逼准则**：若三数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ 满足 $a_n\le b_n\le c_n$　$(n=1,2,3,\cdots)$，则当

$$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}c_n=A\text{ 时，必有}\lim\limits_{n\to\infty}b_n=A$$

【例 1.1.4】　求极限$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}})$.

解　$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\le(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}})\le\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$，

而　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\overset{同除n}{=}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=\frac{1}{\sqrt{1+0}}=1$，　$\lim\limits_{n\to\infty}=\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=1$，

∴由两边夹定理得　$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{n^2+n})=1$.

(2) **单调有界准则**：单调有界数列必有极限.

即若数列$\{y_n\}$单调增加$(y_1\le y_2\le\cdots\le y_n\le y_{n+1}\le\cdots)$且有上界，则极限$\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 必存在；

若数列$\{y_n\}$单调减少$(y_1\ge y_2\ge\cdots\ge y_n\ge\ge y_{n+1}\ge\cdots)$且有下界，则极限$\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 必存在.

如数列$\{\frac{n}{n+1}\}$：$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n}{n+1},\cdots$单调增加且有上界"1"，即$\frac{n}{n+1}<1$，所以，极限

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}$必存在.

又如数列$\{\frac{1}{n}\}$：$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}\cdots,\frac{1}{n},\cdots$单调递减且有下界“0”，即$\frac{1}{n}>0$，所以，极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}$必存在.

我们知道，数列$\{y_n\}$：$y_1,y_2,y_3,\cdots,y_n,\cdots$的通项$y_n$是一种以自然数$n$为自变量的特殊函数，即$y_n=f(n),(n\in N)$，如数列$\{\frac{1}{n}\}$：$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$的通项$y_n=f(n)=\frac{1}{n}$，特殊函数的极限已基本解决，那么一般函数，如$y=f(x)=\frac{1}{x}$的极限如何？

1.1.2　函数的极限

引例　如图1—1所示闭合电路，电源的电动势E和内阻r均为定值，外电路的可变电阻为R，当开关K接通后，电路中的电流i随R的变化而改变，由欧姆定律：

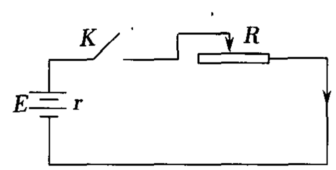

图1—1

电流 $i=i(R)=\dfrac{E}{R+r}\begin{cases}\to 0, & R\to+\infty \quad \text{断路时}\\ \to\dfrac{E}{r}, & R\to 0^+ \quad \text{短路时}.\end{cases}$

(一)$x\to+\infty(-\infty、\infty)$时函数的极限

定义2

(1) 如果$x\to+\infty$时，函数$f(x)$无限接近一个确定的常数A，则称A为函数$f(x)$当$x\to+\infty$时的极限，记作$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

(2) 如果$x\to-\infty$时，函数$f(x)$无限接近一个确定的常数A，则称A为函数$f(x)$当$x\to-\infty$时的极限，记作$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

(3) 如果$x\to\infty$时，函数$f(x)$无限接近一个确定的常数A，则称A为函数$f(x)$当$x\to\infty$时的极限，记作$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

注意：$x\to\infty$指$x\to-\infty$同时$x\to+\infty$.

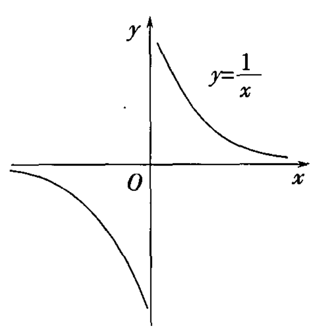

图1—2

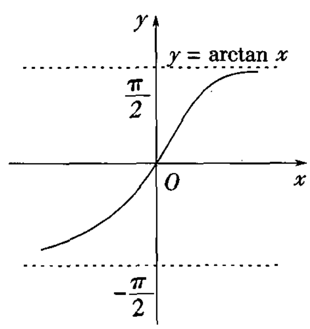

图1—3

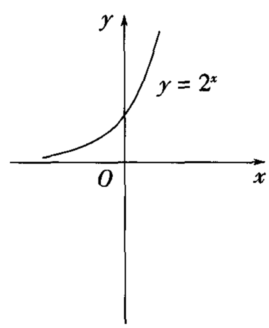

图1—4

由定义2，$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$　　$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$　　$\lim\limits_{x\to+\infty}2^x=+\infty$(不存在)

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$　　$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=\frac{-\pi}{2}$　　$\lim\limits_{x\to-\infty}2^x=0$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$　　$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在　　$\lim\limits_{x\to\infty}2^x$ 不存在

由此可得如下结论.

定理 2

(1) **双侧极限与单侧极限的关系:**

极限$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$存在的充分必要条件是$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$与$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$都存在且相等,

即
$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A\\ \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=B\\ A=B\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\lim_{x\to\infty}f(x)=A$$

也可以表示为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A \quad\Leftrightarrow\quad \lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$

问:$\lim\limits_{x\to\infty}\text{arc cot}\,x$是否存在?为什么?

(2) **夹逼准则**:若$x\to\infty$的过程中,三函数满足$h(x)\le f(x)\le g(x)$,且

$$\lim_{x\to\infty}h(x)=\lim_{x\to\infty}g(x)=A,\text{必有}\lim_{x\to\infty}f(x)=A$$

(二)$x\to x_0^{+}$(x_0^{-}、x_0)时函数的极限

引例 我们知道,函数$y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$的定义域是$\{x\,|\,x\neq1\}$,也就是说函数在$x=1$点无定义,我们的新问题是:"函数在$x=1$点有没有极限呢?是不是有定义就有极限、无定义就无极限呢?"下面,我们先从代数角度分别就自变量按三种不同的方式趋近于1时,观察函数$y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$的极限情况.

x	0.9;0.99,0.999,⋯ $\to1\leftarrow$⋯,1.001,1.01,1.1 左侧$x\to1^-$(且$x<1$),两侧$x\to1$(且$x\neq1$),右侧$x\to1^+$且$x>1$
$y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ $=x+1(x\neq1)$	1.9,1.99,1.999,⋯ $\to2\leftarrow$ ⋯.2.001,2.01,2.1 左极限$\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$,极限$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$,右极限$\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$

再从几何图像(如图1—5)角度看,可得同样的结论.一般地,

定义 3

(1) 如果$x\to x_0^{+}$时,函数$f(x)$无限接近一个确定的常数A,则称A为函数$f(x)$当$x\to x_0^{+}$时的右极限,记作$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$.

(2) 如果$x\to x_0^{-}$时,函数$f(x)$无限接近一个确定的常数A,则称A为函数$f(x)$当$x\to x_0^{-}$时的左极限,记作$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$.

(3) 如果$x\to x_0$时,函数$f(x)$无限接近一个确定的常数A,则称A为函数$f(x)$当$x\to x_0$时的极限,记作$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

注意:(1)$x\to x_0$指$x\to x_0^{+}$同时$x\to x_0^{-}$,且三个过程中都有$x\neq x_0$;

(2)由于分段函数在其分段点的两侧的函数表达式一般不同,所以涉及分段点处的双侧极限时,一般要按左右单侧极限讨论.

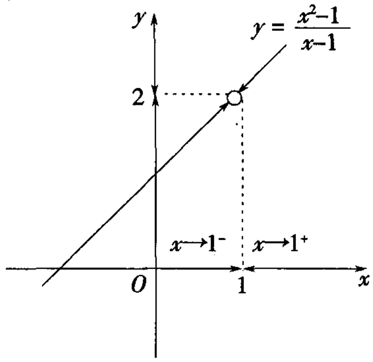

图 1—5

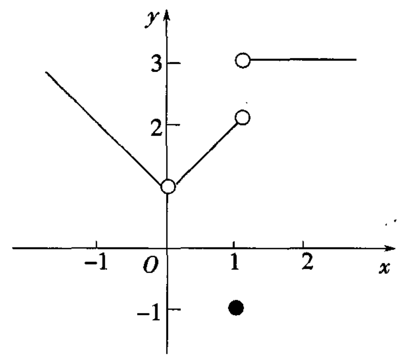

图 1—6

【例 1.1.5】 已知分段函数 $f(x)=\begin{cases}1-x, & x<0\\ 1+x, & 0<x<1\\ -1, & x=1\\ 3, & x>1\end{cases}$ （如图 1—6），

(1)函数的分段点是________和________.

(2)函数在分段点________处没有定义，在分段点________处有定义.

(3) 函数在 $x=0$ 点的： 左极限 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(\quad)=$________；

右极限 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(\quad)=$________；

极限 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=$________.

(4) 函数在 $x=1$ 点的： 左极限 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(\quad)=$________；

右极限 $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(\quad)=$________；

极限 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=$________.

(5) 函数在某一点的极限是否存在与函数在该点的函数值是否存在有无关系？也就是说，讨论函数在某一点的极限时是否受函数在该点的定义值的影响？

解 (1)$x=0,x=1$. (2)$x=0,x=1$. (3)$1-x,1;1+x,1;1$.

(4)$1+x,2$； $3,3$； 不存在. (5) 无，不受.

定理 3

(1)双侧极限与两个单侧极限的关系：

函数 $f(x)$ 在 x_0 点的极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在的充分必要条件是左右极限 $\lim\limits_{x\to x^-}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 都存在且相等，

即
$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A\\ \lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=B\\ \quad A=B\end{cases}\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}f(x)=A$$

也即
$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}f(x)=A$$

(2)**夹逼准则：** 若 $x\to x_0$ 的过程中，三函数满足 $h(x)\leq f(x)\leq g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0^-} h(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} g(x)=A$，必有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

【例 1.1.6】 求证：极限 $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{arc\,cot}\dfrac{1}{x}$ 不存在(提示：参考 $y=\dfrac{1}{x}$ 和 $y=\operatorname{arc\,cot} x$ 的图像).

证 当 $x\to 0^-$ 时，$\dfrac{1}{x}\to-\infty$，此时 $\operatorname{arc\,cot}\dfrac{1}{x}\to\pi$，即 $\lim\limits_{x\to 0^+}\operatorname{arc\,cot}\dfrac{1}{x}=\pi$，

当 $x\to 0^+$ 时，$\dfrac{1}{x}\to+\infty$，此时 $\operatorname{arc\,cot}\dfrac{1}{x}\to 0$，即 $\lim\limits_{x\to 0^+}\operatorname{arc\,cot}\dfrac{1}{x}=0$，

由于 $\lim\limits_{x\to 0^-}\operatorname{arc\,cot}\dfrac{1}{x}\neq\lim\limits_{x\to 0^+}\operatorname{arc\,cot}\dfrac{1}{x}$，所以极限 $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{arc\,cot}\dfrac{1}{x}$ 不存在.

(三)函数极限的性质 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$(或 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$)，则

1. 惟一性：极限 A 是惟一的.
2. 局部保号性：当 $A>0$ 时，在 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)的过程中，都有 $f(x)>0$；

   当 $A<0$ 时，在 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)的过程中，都有 $f(x)<0$.
3. 局部有界性：在 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)的过程中，函数 $f(x)$ 是有界的.

习题 1—1

1. 先列出数列 $\{y_n\}$：$y_1,y_2,y_3,\cdots,y_n,\cdots$，再观察其极限 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

(1) $\{(-1)^n+1^n\}$； (2) $\{\sin\dfrac{n\pi}{2}\}$； (3) $\{\dfrac{(-1)^n}{n}\}$； (4) $\{\dfrac{2^n+(-1)^n}{2^n}\}$.

2. 填空 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{-4}{5})^n=$______； (2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{-5}{4})^n=$______； (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{2}{3}}}=$____；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{-2}{3}}}=$______； (5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-1}{3n^2+1}=$______； (6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+100}{3n^2-1}=$ ______；

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3}{3n^2+1}=$______； (8) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cos n\pi}{n}=$______.

3. 求极限 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{3}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2})$(提示：通分、等差数列求和)；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}[\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(n+n)^2}]$(提示：两边夹定理).

4. 填空 (1) $\lim\limits_{x\to x_0} C=$______($C$ 为常数)； (2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x}{x}=$______； (3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x}=$______；

(4) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|}{x}=$______； (5) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|}{x}=$______； (6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}=$______.

5. 画出 $y=\dfrac{1}{x}$ 的图像并填空

(1) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=$____； (2) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=$____； (3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=$____； (4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=$____.

6. 画出 $y=\arctan x$ 的图像并填空

(1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=$______； (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=$______；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x=$______； (4) $\lim\limits_{x\to 0}\arctan x=$______.

7. 综合上面 5、6 两题填空

(1) $\lim\limits_{x\to 0^-}\arctan\dfrac{1}{x}=$______； (2) $\lim\limits_{x\to 0^+}\arctan\dfrac{1}{x}=$______；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\arctan\dfrac{1}{x}=$______；　　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan\dfrac{1}{x}=$______．

8. 数形结合填空

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=$______；　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$______；　(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\sin\dfrac{1}{x}=$______；

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$______；　(5) $\lim\limits_{x\to 0^+}2^{\frac{1}{x}}=$______；　(6) $\lim\limits_{x\to 0^-}2^{\frac{1}{x}}=$______．

9. 已知分段函数 $f(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 2^x, & x>0.\end{cases}$ 求 $f(x)$ 在 $x=0$ 点的：

(1)函数值 $f(0)$；(2)左极限 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$；(3)右极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$；(4)极限 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

10. 已知 $f(x)=\begin{cases}x+a, & x>0\\ 2^{\frac{1}{x}}+3, & x<0\end{cases}$，若极限 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在，求常数 a．

§1.2　极限的运算法则

1.2.1　四则运算法则

与数列极限相仿，稍复杂的函数极限也需要用到极限的四则运算法则.

(一)法则（前提条件）　设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$ 都存在，则

1. $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\pm B$——代数和的极限等于各极限的代数和；

2. $\lim\limits_{x\to x_0}[Cf(x)]=C\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=C\cdot A$——极限中的常数因子可以先提出来；

3. $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\cdot B$——乘积的极限等于各极限的乘积；

4. 当 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B\neq 0$ 时，$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}=\dfrac{A}{B}$——当分母的极限不为零时，商的极限等于各自极限的商.

注意：(1) 上述法则对 $x\to\infty$ 时的情形也是成立的；

(2) 法则 1 和 3 可推广到有限个具有极限的函数的情形；

(3) 当 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 不存在时，不能使用该法则.

问："$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}\sin x}{\lim\limits_{x\to\infty}x}$ 不存在"，对吗？为什么？

(二)题型与解法

1. 直接代入型

【例 1.2.1】　求 (1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-3}{x^2-9}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}}$．

解　(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-3}{x^2-9}=\dfrac{2-3}{2^2-9}=\dfrac{1}{5}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}}=\dfrac{0}{2}=0$.

2. 当 $A\neq 0$ 时，"$\frac{A}{0}=\infty$"型

【例 1.2.2】 (1)$\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x^2-1}{x-3}$；　　(2)$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-1}{x-3}$.

解 (1)$\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x^2-1}{x-3}\overset{\text{“}\frac{17}{0}=\infty\text{”}}{=}\infty$；　　(2)$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-1}{x-3}\overset{\text{同除}x^2}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}}\overset{\text{“}\frac{2}{0}=\infty\text{”}}{=}\infty$.

3. "$\frac{0}{0}$"型——因式分解或有理化因式揪出上下两个致"0"因式，然后约去

【例 1.2.3】 (1)$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}$；　　(2)设 $f(x)=\sqrt{x}$，求$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

解 (1)$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}\overset{\text{“}\frac{0}{0}\text{”}}{=}\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(x+3)}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{1}{x+3}=\frac{1}{6}$(致"0"因式为"$x-3$")；

$$(2)\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\overset{\text{“}\frac{0}{0}\text{”}}{=}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\text{(致“0”因式为“}h\text{”)}.$$

4. "$\frac{\infty}{\infty}$"型——上下同除以变化最快的项

【例 1.2.4】 (1)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n+1}{4^n-1}$；　　(2)$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3-4x^2+2}{7x^3+5x^2-1}$；　　(3)$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x-1}{2x^3-x^2+5}$.

解 (1)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n+1}{4^n-1}\overset{\text{同除}4^n}{=}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{2^n}{4^n}+\frac{1}{4^n}}{1-\frac{1}{4^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\frac{1}{2})^n+(\frac{1}{4})^n}{1-(\frac{1}{4})^n}=\frac{0+0}{1-0}=\frac{0}{1}=0$；

$$(2)\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-4x^2+2}{7x^3+5x^2-1}\overset{\text{同除}x^3}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^3}}{7+\frac{5}{x}-\frac{1}{x^3}}=\frac{3-0+0}{7+0-0}=\frac{3}{7};$$

$$(3)\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x-1}{2x^3-x^2+5}\overset{\text{同除}x^3}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{2-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^3}}=\frac{0-0-0}{2-0+0}=\frac{0}{2}=0.$$

由【例 1.2.2】(2)和【例 1.2.4】(2)、(3)可得

结论：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^l+a_1x^{l-1}+\cdots+a_l}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}\frac{a_0}{b_0}, & l=m\text{ 时}\\ 0, & l<m\text{ 时}\quad(l,m\in N)\\ \infty, & l>m\text{ 时}\end{cases}$$

5. "$\infty-\infty$"型——通分或有理化，转化为"$\frac{0}{0}$"或"$\frac{\infty}{\infty}$"等类型

【例 1.2.5】 (1)$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})$；　　(2)$\lim\limits_{x\to 2}(\frac{x^2}{x^2-4}-\frac{1}{x-2})$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})\overset{\text{“}\infty-\infty\text{”}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{1}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}=0$;

(2) $\lim\limits_{x\to2}(\dfrac{x^2}{x^2-4}-\dfrac{1}{x-2})\overset{\text{“}\infty-\infty\text{”}}{=}\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-4}\overset{\text{“}\frac{0}{0}\text{”}}{=}\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x+1}{x+2}=\dfrac{3}{4}$.

1.2.2 复合函数的极限

定理 若函数 $y=f[\varphi(x)]$ 由 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成，两极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$ 且 $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=f(u_0)$，则复合函数的极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f[\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)]=f(u_0)$.

【例 1.2.6】 (1) $\lim\limits_{x\to\pi}\ln\sin\dfrac{x}{2}$； (2)已知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ ，求 $\lim\limits_{x\to0}\ln\dfrac{\sin x}{x}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to\pi}\ln\sin\dfrac{x}{2}=\ln(\lim\limits_{x\to\pi}\sin\dfrac{x}{2})=\ln[\sin(\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{x}{2})]=\ln(\sin\dfrac{\pi}{2})=\ln 1=0$;

(2) $\lim\limits_{x\to0}\ln\dfrac{\sin x}{x}=\ln(\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x})=\ln 1=0$.

习题 1—2

1. 填空：$x\to\infty$ 时，关于 x 的两多项式商的极限

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^l+a_1x^{l-1}+\cdots+a_l}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}\_\_\_\_\_\_, & l=m\\ \_\_\_\_\_\_, & l<m\\ \_\_\_\_\_\_, & l>m\end{cases}$$

2. 依上面公式，(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x-1}{3x^2+10x+1}=$____； (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-1}{3x^2+10x+1}=$____；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x+-1}{3x^2+10x+1}=$____； (4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2}{n^2-1}=$____ ； (5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{3n^2+10n+1}=$____ ；

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^3-1}{10n^2+1}=$____； (7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(a-1)n^3+bn^2+2n+1}{3n^2+10n+1}=1$ 时，$a=$____，$b=$____.

3. (1) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{x+2}=$____； (2) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x+2}{x-2}=$____.

4. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{x^2-9}$ ； (2) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-5x+6}$ ； (3) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x^2-9}$；

(4) $\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$ ； (5) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-x+a}{x-3}=b$ ，求常数 a 和 b 的值；

(6) $\lim\limits_{x\to1}(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3})$ ； (7) $\lim\limits_{n\to\infty}[\dfrac{1}{1\times2}+\dfrac{1}{2\times3}+\dfrac{1}{3\times4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}]$；

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+2n}+3n}$ ； (9) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$.

5. 已知 $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$，求：(1) $\lim\limits_{x\to0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$；(2) $\lim\limits_{x\to0}[(1+x)^{\frac{1}{x}}]^3$.

§1.3 两个重要极限

1.3.1 第一重要极限

我们知道,对任意有限数 R, 都有 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^R=(1+0)^R=1^R=1$,或 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^R=(1+0)^R=1^R=1$,当我们将条件从"有限数 R"变为"无穷大"时,伴随着量变往往引起质变,也就是说"$(1+0)^\infty\neq 1$",那么"$(1+0)^\infty$"型的极限$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=?$

$-\infty\leftarrow\cdots$	-100000	-10000	-1000	x	1000	10000	100000	$\cdots\rightarrow+\infty$
$e\leftarrow\cdots$	2.71828	2.7183	2.720	$(1+\frac{1}{x})^x$	2.705	20717	2.718	$\cdots\rightarrow e$

可以证明以下重要极限:

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e \text{ 或} \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

注意:(1)无理数 $e\approx 2.71828$; (2)本质:"$(1+0)^\infty=e$".

1. $\lim\limits_{\Delta\to 0}(1+\Delta)^{\frac{1}{\Delta}}=e$ 型

【例 1.3.1】 (1)$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{-3}{x}}$; (2)$\lim\limits_{x\to\pi}(1-3\tan x)^{\cot x}$; (3)$\lim\limits_{x\to 1}(1+3\ln x)^{\frac{2}{\ln x}}$.

解 (1)$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{-3}{x}}\overset{“1^\infty”}{=}\lim\limits_{x\to 0}[(1+x)^{\frac{1}{x}}]^{-3}=e^{-3}$;

(2)$\lim\limits_{x\to\pi}(1-3\tan x)^{\cot x}=\lim\limits_{x\to\pi}(1-3\tan x)^{\frac{1}{\tan x}}=\lim\limits_{x\to\pi}\{[1+(-3\tan x)]^{\frac{1}{-3\tan x}}\}^{-3}=e^{-3}$;

(3)$\lim\limits_{x\to 1}(1+3\ln x)^{\frac{2}{\ln x}}=\lim\limits_{x\to 1}[(1+3\ln x)^{\frac{1}{3\ln x}}]^{3\times 2}=e^6$.

2. $\lim\limits_{\Delta\to\infty}(1+\frac{1}{\Delta})^\Delta=e$ 型

【例 1.3.2】 (1)$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x}$; (2)$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x}\right)^x$; (3)$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$.

解 (1)$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}[\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}]^{3\times 2}=e^6$;

(2)$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x}\right)^x\overset{“1^\infty”}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}[\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}]^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}$;

(3)$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\overset{“1^\infty”}{=}\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n}=\lim\limits_{n\to\infty}[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n]^{-1}=e^{-1}$.

3. 公式:

(1)$\lim\limits_{x\to 0}(1+k_1x)^{\frac{k_2}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}[(1+k_1x)^{\frac{1}{k_1x}}]^{k_1k_2}=e^{k_1k_2}$;

(2)$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{k_1}{x})^{k_2x}=\lim\limits_{x\to\infty}[(1+\frac{k_1}{x})^{\frac{x}{k_1}}]^{k_1k_2}=e^{k_1k_2}$.