



中国科学院规划教材

ZHONGGUO KEXUEYUAN GUIHUA JIAOCAI

博弈论及其应用

汪贤裕 肖玉明 编著



科学出版社

www.sciencep.com

0225/32

2008

中国科学院规划教材

博弈论及其应用

汪贤裕 肖玉明 编著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书是学习博弈论的入门教材,系统地介绍了博弈论的主要内容。全书共五章,分别为:绪论、纳什均衡、纳什均衡的扩展与精练、协调与谈判、合作博弈。本书对博弈论中最基本的概念、各种博弈数学模型、模型的解概念、各种解概念求解的规范方法,以及在不同环境下的应用进行了详细的介绍。书中设有必要的例题,并给出了详细的解答过程,在每章末附有适量的习题。

本书可供高等院校管理类、经济类、应用数学类专业选作本科生或研究生教材,也可供企业管理人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

博弈论及其应用/汪贤裕,肖玉明编著. —北京:科学出版社,2008

ISBN 978-7-03-021047-0

I. 博… II. ①汪…②肖… III. 对策论 IV. 0225

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 015714 号

责任编辑:张 兰 王国华/责任校对:陈玉凤

责任印制:张克忠/封面设计:耕者设计工作室

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

北京市安泰印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2008 年 2 月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2008 年 2 月第一次印刷 印张:14 1/2

印数:1—4 000 字数:268 000

定价:23.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈安泰〉)



前言

自冯·诺依曼和奥斯卡·摩根斯坦的里程碑著作《博弈论与经济行为》(1944年)问世以来,博弈论在理论基础和应用上得到了广泛的发展,并且诺贝尔经济学奖多次授予了与博弈论相关的学者。本书作为学习博弈论的入门教材,对博弈论中最基本的概念、各种博弈数学模型、模型的解概念、各种解概念求解的规范方法,以及在不同环境下的应用进行了介绍。

非合作博弈的各种解概念和合作博弈的各种解概念是本书的重点。这些解概念和求解的方法原理,不仅是构成博弈论的理论基础体系,也是博弈论实际应用的基础。

本书作为博弈论学习的入门教材,其内容包括了非合作博弈和合作博弈中的主要内容。在非合作博弈中,以纳什均衡的概念和求解为中心,介绍了在不同环境下纳什均衡的扩展和精炼;在合作博弈中,介绍了各种思想指导下的解概念和求解方法,并以协调博弈和纳什谈判解的介绍,作为非合作博弈和合作博弈的纽带。在各个部分的介绍中都给出了进行应用的范例。

学习本书的预备知识是大学数学所学的初等微积分、概率论的基础知识。本书的读者对象是管理类、经济类、数学类的本科生、低年级研究生,以及具备一般大学数学知识的其他自学读者。

作者为管理类和数学类的本科生和研究生讲授了十多年的博弈论课程,采用过不少国内外博弈论方面的教材。这些教材都有各自的组材思想和特色,明显分为两类:一类是以“对策论”冠名的教材,着重于博弈论中的数学理论体系;另一类是以“博弈论”冠名的教材,着重于非合作博弈及其在经济学中的应用。因

而在教学过程中,往往同时采用两本教材,这给学生的学习带来了不便。

作者作为“管理科学与工程”专业的博士生导师,审阅了不少硕、博士学位论文,也为不少杂志进行论文审稿。在这些工作中,作者发现不少学生对博弈论中一些基本模型的概念理解不准确,甚至在对博弈论中解概念的求解时得到错误结果,而现在流行的各种博弈论教科书中,也缺少博弈中各种解概念的规范的求解方法。

上面两个动因促成了作者写一本有关博弈论教材的念头。而每一次教学中,作者都面临着给学生选订教材的任务,于是下定决心写一本能满足上面两个要求的教材。

在教材的编写过程中,作者本着如下三个指导思想进行编写:

1. 突出博弈论学科的性质和教学目的。

迈尔森(R. B. Myerson, 2007年诺贝尔经济学奖获得者)所著的《博弈论——矛盾冲突分析》(1991年)一书中,开篇的第一句话是:“博弈论可以定义为对智能的理性决策者之间冲突与合作的数学模型的研究。”他明确地指明了博弈论学科的性质。多人博弈和多目标规划是在两种不同的背景下从两种不同的思维出发推演出的不同的数学模型体系,这是学习博弈论必须明确的学科特征,教材应该说明这两者的差别。例如“囚徒困境”中的纳什均衡,从多目标规划的角度来理解就是劣解。博弈论根据理性决策者之间不同背景的冲突和合作的行为特征,构建了不同的博弈数学模型,并针对不同的博弈数学模型,提出了不同的解概念及研究求解相应的解概念的方法原则。博弈论的应用,就是选择相适应的博弈模型,通过解概念的求解,进而对研究的问题给以分析,对决策者的行为或决策的策略进行研究和揭示。因而本教材对不同背景要求下的博弈数学模型给出确切的背景意义,对各种解概念给出明确的定义,对各种解概念的求解给出规范式的计算依据和算例。

作为一本入门教材,考虑到读者的数学基础知识,对个别复杂的数学概念尽量进行简化,但不影响对概念的理解和计算方法的应用。教材的一个重要特征就是对所介绍的解概念都针对简单的情况给出了详细的算例。大学教材,是对学生进行素质训练的蓝本。如果博弈论课程学习后,不能明确各种博弈模型的背景和特征,不懂得各种解概念的正确内涵,不会对解概念进行求解,将导致科学的博弈分析堕落为“口水博弈”,也不会实现有价值的博弈论的应用。

2. 选材范围要体现博弈论学科的主流结构和发展趋势。

半个多世纪以来,博弈论在自身的理论研究领域,以及在与其它学科相结合的应用研究中(特别是经济学和政治学),都取得了丰硕的成果。R. J. Aumann (2005年诺贝尔经济学奖获得者)和S. Hart编写了《博弈论和应用手册》I (1992年)、II (1994年)、III (2002年),共三大卷,总结和揽括了近50年来

的主要成果。本书作为一本入门教科书，显然不可能对浩瀚的成果给以全部介绍。非合作博弈和合作博弈是博弈论中两个主要部分，在应用中取得大量成果的主要是基于非合作博弈，而对合作博弈的研究是当前学术研究中的一个重要前沿。教材中分别用占本书二分之一和四分之一的篇幅对这两个部分给予了介绍。对非合作博弈与合作博弈相互联系的纽带——纳什谈判解，以及由非合作博弈的规范式表述转换为特征函数表述，教材中也给以充分注意。对当前迅速发展的实验博弈，也专门用一节“协调博弈”给以介绍。这些内容构成全书另外四分之一的内容。博弈论研究领域中的演化博弈，其本质是对纳什均衡的再精炼；微分博弈和不可转移效用函数的合作博弈，需要较高要求的数学基础。因此，本书中对这三个方面内容未给予详细介绍，只作了一般提及。因而该教材选材范围既体现了博弈论学科的主流结构，也对当今的发展趋势给予了提示。教材五章的结构和标题体现了教材编写的结构思想。

在教材内容选取上，还有两点需要说明：

(1) 在教材编写中，曾设想增加一些打“*”的选读内容，但在写出来后感到写得不得要领，反而会冲淡本书的主题内容，因此将这部分去掉了。

(2) 教材中对三个重要的定理（纳什均衡点存在性定理、纳什谈判解的推导定理、Shapley 值公式的推导定理）给出了详细的证明。这三个定理对于需要掌握博弈论基础理论的读者是必需的；但跳过其证明，对全书的学习也是无影响的。

3. 教材要体现博弈论学科发展的思想特征，培养读者的科学思维和创新思维。

教材编写不是相关内容的简单堆积，要体现出该学科发展的思想特征，体现出科研工作者应有的思维特征，这也体现出教材作者对学科领域发展思想的认识。这表现在教材中对所介绍内容的逻辑性和反映在对发展思维的描述上。这是一个仁者见仁、智者见智的问题，依各人主观体会不同而不同。

作者根据自己十多年的课程教学和相关工作经验，试图使上述思想在本书中给予体现，现举例如下：

(1) 非合作博弈中的纳什均衡概念是核心内容。本书首先讨论在纳什均衡出现以前，人们对非合作博弈解概念的理解，进而引入纳什均衡概念，再针对不同环境下对非合作博弈模型要求的不同，引入对纳什均衡的扩展与精炼。对具有完美理论的矩阵博弈，则作为一般纳什均衡中的一个特例来进行介绍。

(2) 合作博弈中，联盟的形成、联盟的分配、联盟的稳定性，构成了合作博弈研究的重要组成部分。本书仅介绍了联盟分配中的各种解概念。但博弈论专家为什么要提出这些不同的解概念，而这些解概念体现了什么样的研究思路呢？本书中提出核心（core）和稳定集（stable set）是从正面看待对分配好坏的评价而

提出的解概念,而谈判解(bargaining set)是从反面对分配不公的评价而提出的解概念,内核(kernel)和核仁(nucleolus)则是由对分配不公的不满意度量而提出的解概念。这5个解概念都是从转归间的占优关系出发而提出的,而这种思想也同样体现在用估值方法得到的解概念中。例如,有从获胜联盟基础上的“D-P 势指标”(Deegan-Packel index of power)(教材中定义 5.3.7),就有阻止取胜联盟的“反联盟 D-P 势指标”(教材中定义 5.3.9)。

(3) 纳什谈判解是公认的从非合作博弈向合作博弈过渡的纽带,教材指出纳什均衡是在不考虑效率情况下的一种解概念,从而引出决策者之间希望通过谈判合作,以实现更高的效率,这是纳什谈判解产生的背景。在合作博弈部分,进一步地介绍了 n 人纳什谈判解的作用。除了纳什谈判解之外,有无其他的谈判解呢?教材中进一步介绍了 R-K-S 谈判解。而一种新概念的产生是相当重要的,但更重要的是这种新概念的理論依据是什么? R-K-S 谈判解与纳什谈判解在理论依据上有什么差异?教材中介绍了 R-K-S 谈判解的公理化体系(未介绍证明),这体现了科学研究中严谨的科学态度。

以上例子是想体现出科学研究的思路,让读者在博弈论知识的学习中,领悟科学研究的思路,启发其创新思维。

本教材已在四川大学进行试用,读者以管理类、经济类、数学类学生为主,效果良好。在教学中对书中的一些错误进行了勘正。

由于作者的学识有限,有不当之处,恳请指正。

汪贤裕

2007 年 10 月



前言

第1章	
	绪论..... 1
1.1	博弈论概况及本书的结构 1
1.1.1	博弈论的定义 1
1.1.2	博弈论的发展与分类 2
1.1.3	本书的结构 4
1.2	博弈研究的三种基本表示法 5
1.2.1	规范式 5
1.2.2	扩展式 7
1.2.3	联盟式 (特征函数式) 11
1.2.4	三种表示式的关系 12
	练习题 14
第2章	
	纳什均衡 15
2.1	完全信息静态博弈..... 15
2.1.1	基本概念..... 15

2.1.2 占优均衡	17
2.2 纳什均衡	19
2.2.1 纯策略纳什均衡	19
2.2.2 双矩阵博弈的划线法	21
2.2.3 无限策略的纯策略纳什均衡	23
2.3 混合策略纳什均衡	32
2.3.1 基本概念	32
2.3.2 混合策略纳什均衡点的存在性定理	33
2.3.3 2×2 双矩阵博弈的纳什均衡	35
2.4 矩阵博弈	42
2.4.1 基本概念	42
2.4.2 保守策略与纳什均衡	43
2.4.3 混合策略纳什均衡	45
2.4.4 矩阵博弈的求解	48
练习题	54

第3章

纳什均衡的扩展与精炼	57
3.1 不完全信息的静态博弈	58
3.1.1 不完全信息博弈与海萨尼转换	58
3.1.2 规范式表述和贝叶斯纳什均衡	59
3.1.3 贝叶斯静态博弈的应用	66
3.2 完全且完美信息动态博弈	76
3.2.1 动态博弈	76
3.2.2 子博弈与子博弈完美纳什均衡	80
3.2.3 完全且完美信息的动态博弈的应用	86
3.2.4 完全不完美信息的两阶段博弈	96
3.3 重复博弈	99
3.3.1 基本概念	99
3.3.2 触发策略	102
3.3.3 重复博弈的应用	108
3.4 不完全信息的动态博弈	113
3.4.1 基本概念	113
3.4.2 信号博弈	122
练习题	128

第4章

协调与谈判	132
4.1 协调博弈	132
4.1.1 多重纳什均衡	132
4.1.2 协调博弈与博弈实验	135
4.2 相关均衡	139
4.3 纳什谈判解	141
4.4 初始参考点和其他谈判解	151
4.4.1 初始参考点	151
4.4.2 其他谈判解	152
4.5 威胁	155
练习题	159

第5章

合作博弈	160
5.1 基本概念	160
5.1.1 纳什谈判解与联盟	160
5.1.2 联盟与特征函数	162
5.1.3 特征函数的性质	168
5.1.4 合作博弈中的解概念	171
5.2 占优方法：合作博弈一类解概念	171
5.2.1 转归与占优原则	171
5.2.2 核心和 ϵ -核心	173
5.2.3 稳定集	179
5.2.4 谈判解	182
5.2.5 内核	187
5.2.6 核仁	191
5.3 估值方法：合作博弈的一类解概念	196
5.3.1 Shapley 值	196
5.3.2 势指标	204
5.4 合作博弈的应用	209
5.4.1 成本分摊博弈	209
5.4.2 石油市场博弈	213
练习题	216

参考文献	218
------	-----



章

绪 论

1.1 博弈论概况及本书的结构

1.1.1 博弈论的定义

博弈论来自英文 game theory, 又称对策论。

从博弈论的名称可以看到, 博弈论与游戏有着密切的关系。博弈论最早是从游戏开始的, 如象棋、桥牌、扑克牌、“石头、剪刀、布”等游戏。人们试图研究, 在游戏中如何用智慧和机智去赢得对方, 其中有什么规律。这种研究的特点是: 参加游戏的人不仅要考虑自己如何行动, 还要考虑对方如何行动。简言之, 它研究在竞争环境中, 如何进行决策。这种游戏研究的思想, 很自然地出现在我们实际生活的各个方面。例如, 经济领域中的生产管理、价格竞争、营销活动、贸易谈判, 企业管理领域中的战略制定、薪酬设计、契约制定、劳资纠纷, 政治领域中的谈判策略、斗争策略、选举策略、政策制定, 军事领域中的进攻和防御、战略和战术, 社会领域中的税收、治安、和谐等都需要我们在竞争冲突的环境下, 用智慧和机智去分析和认识问题, 做出自己如何行动的决策。因而博弈论也从游戏这种单纯的竞争研究, 发展成今天一个朝气蓬勃的学科分支。

如何给博弈论下一个确切的定义, 至今无统一的结论。海萨尼 (Harsanyi, 1994 年诺贝尔奖获得者) 对博弈论的论述为: 博弈论是关于策略相互作用的理论。就是说, 它是关于社会局势中理性行为的理论, 其中每个局中人对自己行动的选择

必须以他对其他局中人将如何反应的判断为基础。奥曼(Aumann, 2005 年诺贝尔奖获得者)将博弈论称为“相互有影响的决策论”。国外著名教材《博弈论基础》(罗伯特·吉本斯著)称:博弈论是研究多人决策问题的理论。而国外不少著名教材,如《博弈论》(Fudenberg 和 Tirole 合著),则未给出博弈论的定义。可见,要给出博弈论完整准确的定义是困难的。博弈论研究的范畴是多方面的,因而难以给出一个包罗一切的定义,我们只能在对博弈论的学习过程中去体会它。但从上面各种表述,我们可以将博弈论理解为竞争环境下的多人决策理论,并从这个角度进行学习和研究。

博弈论可以看作是多人决策理论。而决策论一般是单人决策,因此也可以说博弈论是决策论的拓展。但博弈论与决策论是有本质的区别:第一,博弈论是一种多人决策,而决策论一般是单人决策。若将决策问题认为是一种双人博弈,除决策者一方外,另一方是一个虚拟的参与人——“自然”。“自然”是基于一种决定“自然状态”的随机装置而进行决策;而决策人的效用由决策人的行为和意识与自然状态共同决定。博弈论中所称的单人决策,实质上就是决策讨论的范畴。而在博弈论中参与人都不是虚拟的,都是理性的决策人,都在用智慧和机智追求自己效用的最大化。第二,在决策论中,“自然”一方的随机行动是外生确定的,决策人一方的行动,是基于对“自然”外生的不确定的信念进行行动决策;在博弈论中,参加博弈的多个决策人的行动都是内生的,任一决策人对其他决策人的行动的不确定性来自于内生的信念,从而在不确定性的环境下决定自己策略。第三,在决策论中,“自然”一方的随机行为是被动的,并且不构成对决策人一方有意的威胁,决策人一方的行为是主动的,是在一种无恶意威胁的自然面前来取得自己单方面有利的行动,决策人一方的行为对“自然”一方是无损害的;而在博弈论中,决策的任何一方都在斗智斗勇,任何一方的收益不仅要受到自身行为的影响,还要受到对方行为的影响,其决策的环境是“竞争冲突”的。第四,在决策论中,也存在多目标决策或多属性决策,但决策的主体是一个;在博弈论中,多个局中人都在选择自己的策略以使自己的目标最大化,这看似一个多目标决策,其实是一个多人决策,决策主体是多人。

博弈论正是由于上述与决策论不同的特征,因此更能反映人类经济和社会活动的本质特点,因而在经济、社会和管理领域中受到了人们更大的关注,也得到了更多的应用。

1.1.2 博弈论的发展与分类

在经济学文献中,对博弈论最早研究的是古诺(Cournot, 1897)、伯川德(Bertrand, 1883)和埃奇沃斯(Edgeworth, 1981)对垄断和生产的论文,但这些研究工作当时都被视为特例,而未引起经济学家的重视。20 世纪初,越来越多的人开始关

注并研究博弈论。其中的多数人是数学家,如泽梅罗(Zermelo, 1913)、波雷尔(Borel, 1924)、波塞尔(de Possel, 1936)等。值得一提的是泽梅罗给出定理,说明国际象棋的输赢是严格确定的。1944年,冯·诺伊曼(J. Von Neumann)和奥斯卡·摩根斯坦(Oskar Morgensten)发表了对博弈论建立具有里程碑意义的标志著作《博弈论与经济行为》(*Game Theory and Economic Behaviour*)。在这本里程碑式的巨著中,他们提出了博弈论的两个经典框架:非合作博弈和合作博弈。

非合作博弈中,博弈的参与人根据他们可察觉的环境和自身利益进行决策。参与人效用不仅取决于自己的行为选择,而且受到其他参与人行为的影响。在非合作博弈中,强调的重点主要在个人行为:理性参与人在竞争环境中可选择的行动是什么?博弈可能出现的结果是什么?理性参与人会做出什么样的决策?

合作博弈中,假定参与人有一个可实施的共同行动的协议,即合作是外生的。这时强调的重点在于:这些参与人会组成什么样的联盟?在联盟中,如何确定参与人之间的权势的大小?如何合理地去分配联盟所得的合作收益(或分摊成本)?

在非合作博弈中,由各参与人之间的均衡而产生的结果是竞争的产物,一般来说,并不令人满意。因此他们可能表现出一种“合作的意向”,这种合作意向是内生的,但这种合作意向没有严格的执行协议。在合作博弈中,参与人之间已有一个外生的合作协议,这构成了两类博弈的根本区别,以及两类博弈各自研究的重点。

冯·诺伊曼和奥斯卡·摩根斯坦的名著问世以后的30年是博弈论辉煌发展的时期。不少数学家、经济学家都为此做出巨大贡献,并且博弈论沿着这个分类框架进行发展。

在合作博弈的研究中,继冯·诺伊曼提出的稳定集(stable set)的概念后(他称为合作博弈的解),1959年吉里斯(Gillies)提出了核心(core)的概念;1953年,沙普利提出了公理化体系的分配方案,即著名的Shapley值;1965年戴维斯(Davis)和马斯克莱(Maschler)提出了内核(kernel)的概念;1969年,斯克梅德尔(Schmeidler)提出了核仁(nucleolus)的概念;1965年班契夫(Banzhaf)提出了班契夫势指标的概念。这些概念一直沿用至今。合作博弈其后的研究更多地体现在基于数学理论的分析(如无旁支付下的合作博弈、缺原子博弈、随机结盟博弈),其有效的应用不多,这使得合作博弈的内容至今仍是一个非常有潜力的研究领域。

在非合作博弈的研究中,则表现出更为丰富和突出的成就。1950年,纳什(Nash)提出了后来称为纳什均衡的概念,奠定了非合作博弈研究的基石。1965年,泽尔腾(Selten)证明了非合作博弈中不是所有纳什均衡是同样合理的,进一步将非合作博弈从静态博弈发展到非合作动态博弈以及子博弈完美均衡的概念。1967年,海萨尼(Harsanyi)针对非合作博弈中不完全信息提出了海萨尼转换,将不完全信息(incomplete information)的非合作博弈转化成不完美信息(imperfect information)博弈,从而奠定了现在对非合作博弈所称的完全信息博弈和不完全信

息博弈研究的基础。纳什、泽尔腾、海萨尼三人也因此共获 1994 年诺贝尔经济学奖。他们三人的工作奠定了现在对非合作博弈研究的习惯性分类:完全信息静态博弈、不完全信息静态博弈、完全信息动态博弈以及不完全信息动态博弈。这四种分类研究的成果从某种意义上说,是对纳什均衡多重性的“精炼”和扩展。

纳什均衡是各个参与人在竞争环境下独立决策的产物,纳什均衡未考虑到均衡结果的“效率”(即纳什均衡的结果与其他结果相比可能更差)。纳什本人认识到纳什均衡的不足,因而在 1950 年,纳什提出了公理化体系下的纳什谈判解,以弥补纳什均衡对“效率”考虑的不足。1974 年,奥曼(Aumann)提出了在非合作博弈之前,建立一种参与人可接受的“信号装置”,从而得到比纳什均衡效益更好的“相关均衡”的概念。1971 年,弗里德曼(Friedman)提出并证明了“无名氏定理”,提出在多次重复博弈中,通过均衡分析的技术,可以实现效率最优的子博弈完美均衡。这一系列分析,架起了非合作博弈与合作博弈之间沟通的桥梁。

1944 年冯·诺依曼和奥斯卡·摩根斯坦合著的《博弈与经济行为》一书,是公认的博弈论的奠基著作。半个多世纪以来,博弈论理论逐步成熟(特别是非合作博弈),并且广泛结合经济学研究应用于实际。有四次诺贝尔经济学奖授予了用博弈论研究经济学的经济学家。他们分别是:纳什、泽尔腾和海萨尼(1994 年);维克瑞和莫里斯(1996 年);奥曼和谢林(2005 年);赫维奇、马斯金和迈尔森(2007 年)。他们的获奖不仅表现出博弈论在理论和实践中的成就,也揭示了博弈论在未来的理论研究和应用中的广阔前景。

1.1.3 本书的结构

本书第 2 章是对经典的非合作博弈的介绍,重点是对纳什均衡的定义和均衡点求解算法的介绍。第 3 章是针对纳什均衡进行进一步精炼和扩展的介绍。第 4 章针对纳什均衡未考虑效率问题,着重对协调博弈、相关均衡和纳什谈判解进行介绍。该章也在非合作博弈与合作博弈之间起到一种桥梁的作用。第 5 章则是对具有旁支付下的 n 人合作博弈进行介绍,包括一些常用的概念,如核心、核、核仁、沙普利值等。

本书作为一本博弈学习的入门教材,不可能对博弈进行全面的介绍。从上面提出的内容可以看出,本书仅对博弈论的基础结构给予了介绍,对非合作博弈中各种均衡的经济意义和合作博弈中一些概念和求解过程进行了基础知识介绍,力求让读者在以后的实际应用中有有所借鉴。

本书的一个重要特色,是力求对非合作博弈中的均衡求解、各种谈判解、合作博弈中的不同“解概念”,在给出定义后,给出一种规范式的求解过程。在长期的教学和科研工作中,作者感到能否求解博弈中这些相应的结论,是进行规范的博弈论学习的基础,亦是对博弈论进行应用的基础。若无这些相应结论的正确

求解过程,就得不到均衡或“解概念”的结果,这样的博弈就成为了人们常说的“口水博弈”。

本书对一些重要的研究领域,如微分博弈、演化博弈、无旁支付的合作博弈等重要内容没有介绍。有兴趣的读者可以在奥曼和哈特所编著的《博弈论手册》I、II、III卷中进行内容更广、更接近前沿问题的学习。对博弈论最新研究和应用的进展情况,可通过下面两种期刊中的相关文章进行学习: *International Journal of Game Theory, Games and Economic Behavior*。

博弈论是一门以数学为主要工具的学科,因此在教材中少不了用数学语言表达的定义、定理以及定理的证明。我们尽量用通俗的语言进行表达。因此本书的读者应有微积分和概率论的一些基本知识。博弈论在经济学中得到广泛而深入的应用,例如泰勒尔(Tirole)用博弈论改写了传统的产业组织理论(*The Theory of Industrial Organization*)。因此,本书中不少应用例题是与经济学有关的。这就要求本书的读者要有一些初等的经济学知识。

作者在该课程十多年的教学中,也用过不少教材。本书也只是作者在十多年教学组织和教材组织中的一些体会。由于水平有限,难免存在着不少的缺点和不足,欢迎读者提出批评和建议。

1.2 博弈研究的三种基本表示法

博弈论研究理性参与人如何用智慧和机智在竞争冲突的环境下决策行为,所使用的基本工具是数学模型和逻辑推理,通过数学模型的求解和分析,探讨局中人的决策行为。不同的博弈问题所采用的数学模型是不一样的。博弈论研究的三种基本表示法,也就是三种基本的数学模型,本节对此作一简介。

1.2.1 规范式

首先看一个博弈的例子。

【例 1.2.1】 囚犯困境(prisoners' dilemma)

警察拘捕了两个犯罪嫌疑人进行隔离审讯,检察官认为他们犯有某项罪行,但又缺乏足够的证据指证他们的罪行。如果两个嫌疑犯中至少有一个供认犯罪,就能确定罪名成立。为了获得所需的口供,警察将两人分别关押以防止他们串供,并分别向两个嫌疑人指出两条路:承认犯罪和不承认。如果两人都承认,则两人都将被判刑,每人各判8个月。如果两个人都不承认,由于检察官没有足够的证据,他们将作为犯小案件处理,分别判刑1个月。如果其中一个人承认,而另一个人不承认,则承认罪行者,将得到立功宽大处理,不判刑而释放,而不承认者将受到严惩,

判刑 10 个月。此时,犯罪嫌疑人将如何采取自己的行动呢?

如上所述,犯罪嫌疑人的行为与行为后的结果,可用表 1.2.1 中特殊的矩阵形式表示。

表 1.2.1 囚犯困境规范式表示

		嫌疑犯 B	
		承认	不承认
嫌疑犯 A	承认	$(-8, -8)$	$(0, -10)$
	不承认	$(-10, 0)$	$(-1, -1)$

在这类博弈中,有三个基本要素。

1. 局中人集 N

局中人即博弈的参与人。局中人的全体记为 N 。一般对 $|N|=n$, 即有 n 个局中人的博弈称为 n 人博弈。例 1.2.1 中的局中人为 $N=\{\text{嫌疑犯 A}, \text{嫌疑犯 B}\}$ 。

2. 局中人 i 的策略集 S_i

局中人 $i(i \in N)$ 的策略集 S_i , 指局中人 i 可能采取的可行的策略集合。一般记为 $S_i = \{s_i\}$ 。局中人 i 的策略集 S_i 中所含的具体策略可以是有限个, 也可以是无限个。当每个局中人 i 的策略集 S_i 是有限集时, 称博弈为有限博弈, 否则称为无限博弈。在例 1.2.1 中局中人简记为 A 和 B。则

$$S_A = \{\text{承认}, \text{不承认}\} \quad S_B = \{\text{承认}, \text{不承认}\}$$

若每个局中人 i 都取定一个策略 s_i , 其中 $s_i \in S_i$, 则所有 n 个局中人的策略全体 $(s_1, \dots, s_n)$ 称为一个策略组合, 记为 $s = (s_1, \dots, s_n)$ 。

3. 局中人 i 的支付函数 P_i

对任意一个策略组合, 带给局中人 i 的损益称为局中人 i 的支付函数 P_i 。根据不同问题研究的背景, 支付函数可以是损益函数, 也可以是效用函数。

在例 1.2.1 中, 简记两个局中人分别为 A 和 B, 则有:

$$P_A(\text{承认}, \text{承认}) = -8, P_A(\text{承认}, \text{不承认}) = 0,$$

$$P_A(\text{不承认}, \text{承认}) = -10, P_A(\text{不承认}, \text{不承认}) = -1;$$

$$P_B(\text{承认}, \text{承认}) = -8, P_B(\text{承认}, \text{不承认}) = -10,$$

$$P_B(\text{不承认}, \text{承认}) = 0, P_B(\text{不承认}, \text{不承认}) = -1。$$

具有这三个基本要素并能明确地给定, 这时博弈称为规范式(normal form)或策略式(strategic form)表示, 并记为 $G = [N, \{S_i\}, \{P_i\}]$ 。若局中人的策略允许使用混合策略 X_i , 则混合策略集记为 $X_i = \{x_i\}$ (关于混合策略将在第 2 章介绍)。

这时,博弈也称为规范式表示,并记为 $G=[N, \{X_i\}, \{P_i\}]$ 。

【例 1.2.2】 古诺(Cournot)模型

现有两个寡头垄断厂商:厂商 1 和厂商 2。他们生产同一种产品,其生产的边际成本分别为 c_1 和 c_2 。该产品的市场逆需求函数为 $P=a-(q_1+q_2)$,其中 P 是该市场出清价格, q_1 和 q_2 分别是两个厂商对产品的生产数量。 a 是一个正常数,即市场对该产品的市场最高价。市场需求情况和各厂商可能的收益对两个厂商都是共同知识。厂商 1 和厂商 2 在无协商的情况下,独立作出生产数量的决策。问他们各自作出什么样的决策,以使自己利润最大。

例 1.2.2 同样是一个非合作博弈,可以规范式 $G=[N, \{S_i\}, \{P_i\}]$ 表示。这里 $N=\{\text{厂商 1}, \text{厂商 2}\}$, $S_1=[0, \bar{q}_1]$, $S_2=[0, \bar{q}_2]$, 即两个厂商的策略集分别是他们可以生产产品的数量, $\bar{q}_1$ 和 $\bar{q}_2$ 分别是两个厂商的最大生产能力。支付函数为

$$P_1(q_1, q_2) = (p - c_1)q_1 = (a - q_1 - q_2 - c_1)q_1$$

$$P_2(q_1, q_2) = (p - c_2)q_2 = (a - q_1 - q_2 - c_2)q_2$$

例 1.2.1 和例 1.2.2 的差别在于局中人的策略集一个是有限集,而另一个是无限集。

1.2.2 扩展式

首先看一个例子。

【例 1.2.3】 有一个二人参加取数的游戏,游戏分三步进行。第一步,局中人 1 在 $\{0, 1\}$ 中取一个数记为 r_1 ,并告知局中人 2。第二步,局中人 2 也在 $\{0, 1\}$ 中取一个数记为 r_2 ,但不告知局中人 1。第三步,又轮到局中人 1 取数。若局中人 1 在第一步中取 0,则可以在 $\{0, 1\}$ 中取一个数,若局中人 1 在第一步中取 1,则可以在 $\{0, 1, 2\}$ 中取一个数,记第三步局中人 1 取得数为 r_3 。三步后取数结束。现记 $S=r_1+r_2+r_3$ 。若 S 为偶数,则局中人 1 赢 S 记分点,局中人 2 输 S 记分点。若 S 为奇数,则局中人 1 输 S 记分点,局中人 2 赢 S 记分点。在这个游戏中,两个局中人各自采取什么行动? 若你参加,你愿意当局中人 1 还是局中人 2?

对上述问题,经过简单计算,可以用如图 1.2.1 所示的树形图表示。

这种树形图称为博弈的扩展式(extensive form)表示,也称博弈树。

【例 1.2.4】 将上述二人取数游戏作一个改变,游戏仍然分三步进行。第一步,有一个局外人称为“自然”,在 $\{0, 1\}$ 中取一个数记为 r_1 ,并告知局中人 1,但不告知局中人 2。第二步,局中人 1 在 $\{0, 1\}$ 中取一个数记为 r_2 ,并告知局中人 2。第三步,局中人 2 取数,若看到局中人 1 取 $r_2=0$,则在 $\{0, 1\}$ 中取 1 个数,记该数为 r_3 ;若看到局中人 1 取 $r_2=1$ 在 $\{0, 1, 2\}$ 中取 1 个数,记该数为 r_3 。三步后取数结束。仍记 $S=r_1+r_2+r_3$ 。若 S 为偶数,则局中人 1 赢 S 记分点,局中人 2 输 S 记分点。若 S 为奇数,则局中人 1 输 S 记分点,局中人 2 赢 S 记分点。在这个游戏