刘焕彬　库在强　廖小勇　陈文略　张忠诚　编著

数学模型与实验

SHUXUE MOXING YU SHIYAN

科学出版社
www.sciencep.com

数学模型与实验

刘焕彬 库在强 廖小勇 陈文略 张忠诚 编著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书分为上、下两篇，共11章．上篇以介绍数学建模方法为主线，内容包括：数学建模概论、初等数学模型、微分与差分方程模型、数学规划模型、概率统计模型、图论模型、模糊数学和灰色系统模型；下篇以介绍数学实验方法为主线，内容包括：Matlab软件介绍、LINGO软件简介、SAS软件主要功能模块介绍、具有代表性的数学实验．

本书适合高等学校本、专科学生作为数学建模课程教材，也可作为大学生数学建模竞赛科技活动的培训教材，还可供科技工作者和学习应用数学知识的自学者参考．

图书在版编目（CIP）数据

数学模型与实验/刘焕彬等编著．—北京：科学出版社，2008

ISBN 978-7-03-022104-9

Ⅰ．数…　Ⅱ．刘…　Ⅲ．①数学模型②高等学校－实验　Ⅳ．O22 O13-33

中国版本图书馆CIP数据核字（2008）第074131号

责任编辑：王雨舸／责任校对：梅　莹

责任印制：董艳辉／封面设计：苏　波

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉中科兴业印务有限公司印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2008年5月第 一 版　开本：B5（720×1000）

2008年5月第一次印刷　印张：22 1/4

印数：1—4 000　字数：434 000

定价：36.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

序

数学模型与数学实验课在我国大多数高等院校中普遍开设，它是当前我国高等教育基础课程教学改革的前沿课程之一. 这一课程对学生正确理解数学教育的重要性以及数学学科与其他诸多专业课之间的内在联系有着非常重要的作用——它是学生在校学习期间弥合基础理论与各应用学科之间鸿沟的一座桥梁. 同时，作为数学师范教育的一门重要的辅助课程，这门课程的开设也为整合大学数学教学过程中不同数学专业课程理论在解决实际问题时彼此之间的横向联系成为可能.

数学模型与实验是数学理论及电子计算机技术与实际问题相结合的产物. 它首先将现实问题归结为相应的数学问题，并在此基础上利用数学的概念、方法和理论进行深入的分析和研究，从而从定性或定量的角度来刻画实际问题，并为解决现实问题提供精确的数据或可靠的指导. 其次，运用计算机模拟技术，借助于数学软件，设计合理的近似算法，进而给出一个最优或近似最优决策. 努力提高建立数学模型方面的修养，自觉培养这方面的能力并注意积累有益的知识和经验，对于有志于学习与运用数学的广大本科学生以及众多的应用科学工作者来说，均是一项十分重要的基本建设.

本书作者均是辅导学生参加最近几年全国大学生数学建模竞赛的优秀教练员，他们较早地将数学模型与实验课作为全校公共选修课的应用数学专业本科生的基础课，对本课程教学改革进行立项研究，应当说这门课程的教学实践是相当成功的——愈来愈多的学生注册选修本课程和参加有关的数学建模竞赛活动，学生受益广. 本书得以成功编著，可以说是作者最近几年在数学模型课课程教学以及数学建模活动的开展过程中所积累下来的资料所进行的一次较为全面的整理，其内容包括：①几位老师数学模型课教学以及组织培训参加数学建模竞赛队员过程中所编写的讲义、有关数学建模教学的交流文稿等；②1999 年以来，该校学生参加全国大学生数学建模竞赛时所完成的参赛论文，甚至包括一些师生相互交流研讨与数学建模有关的实训论文(这些论文有的在一些比较有影响的学术刊物上已发表)；③参考国内外大量相关教材、专著、文献并吸纳个人一些科研成果. 另外，在数学建模案例的选择和数学实验设计方面体现了课时少，容量大，留给学生想象空间广，适合于师范类本科生学习特点，这使得本教材具有自己鲜明特色.

根据建立数学模型的特点，学习这门课程，重要的不仅在于知识的积累，而且应着眼于能力的提高. 希望广大读者将本书提供的一些实例作为案例来对待，通过实例训练和计算机模拟，体会数学建模的思想和方法，掌握数学实验的一般规

律，而不要满足于学习一些数学理论知识，更不要满足于对个别实例进行机械模仿. 这样，才可能开拓思路，培养分析问题和解决问题的能力，真正达到学习这门课程的效果.

全国大学生数学建模竞赛湖北赛区组委会专家组组长

费浦生

2008 年 4 月 8 日

前　言

现代教育的核心是培养创新思维、意识及能力，为了能对被研究对象进行系统和深入的分析、掌握它的特征和规律，对它的静态和动态性能予以评价，并预测它的变化趋势，进而作出正确的决策，对它进行有效的管理和控制，就必须建立被研究对象的数学模型，数学建模已成为对被研究对象的特性进行系统研究和仿真的必不可少的基础. 我们作为多年从事数学建模教学和指导学生在课外开展数学建模竞赛科技活动的教师，深刻体会到：一方面，只有通过大量的从社会生产、生活、管理等部门中抽象出的实际问题为范例的练习，才能逐渐掌握数学建模方法和技巧；另一方面，在数学教学加强对学生进行“用数学”的教育，使之与计算机应用结合起来，培养学生进行数值计算与数据处理能力，这样可以激发学生学习数学的兴趣.

本书内容分为两篇，共 11 章，上篇以介绍数学建模方法为主线，着重培养学生运用代数、微积分、数学规划、概率统计、图论、模糊数学等方法建立数学模型，强调从事现代科技研究活动的能力和相关素质的培养，重视激发学生原创性思维、唤醒学生进行创造性工作的意识，培养学生从整体把握事物特征的能力及掌握科研论文的写作方法等. 下篇以介绍数学实验方法为主线，让学生懂得利用计算机这一现代化计算工具是非常重要和十分有效的，它既可以进行数据处理，又可以进行数值计算、绘制图形和进行仿真模拟. 实验结束后要求学生写出实验报告，实验报告可以包括问题分析与建立数学模型过程、算法设计及编程实现，结果分析、讨论、评价或推广.

本书由刘焕彬、库在强、廖小勇、陈文略、张忠诚编著.

第 1 章由刘焕彬编写，第 5 章、第 7 章、第 8 章和第 11 章由库在强编写，第 3 章、第 4 章和第 9 章由廖小勇编写，第 2 章由陈文略编写，第 6 章和第 10 章由张忠诚编写. 另外，书中一些典型案例的收集和整理是由数学建模教练组部分青年教师刘志兵、饶从军、李平、任全玉、王艳完成的.

本书适合高等学校本、专科学生作为数学建模课程教材，也可作为大学生数学建模竞赛科技活动的培训教材，以及供科技工作者和自学者参考.

武汉大学费浦生教授和清华大学彭锦教授仔细审阅了本稿，他们提出了不少中肯的意见和宝贵的建议，在编写及试用过程中，得到湖北省数学建模竞赛组委会部分专家组成员及学校领导和各级部门的大力支持，在此一并表示衷心的感谢!

由于时间仓促和限于作者水平，书中难免有错误及疏漏之处，恳请同行专家和广大读者不吝指教.

编　者

2008 年 4 月 2 日

目　　录

第1章　数学建模概论

§1.1　数学建模类型、步骤和方法

1.1.1　原型和模型

事物的原型是指人们所研究的对象、系统或过程，而模型则是为了某种特定目的、加工提炼出的一种替代物，它集中反映了事物的本质.

1.1.2　数学模型

数学模型是用数学描述实际问题的产物，一般可表述为：针对或参照某一现实对象，为了某种特定目的，根据有关信息和规律，采用形式化语言，概括或近似地表达出来的一种数学结构，它可以是反映该现象的性态和数量规律的数学表达式、图形、图表或算法.

建立数学模型一般有如下要求：

(1) 足够的精度，即要求把本质的关系和规律反映进去，把非本质的去掉.

(2) 简单、便于处理.

(3) 依据要充分，即要依据科学规律、经济规律来建立公式和图表.

(4) 尽量借鉴标准形式.

(5) 模型所表示的系统要能操纵和控制，便于检验和修改.

建立数学模型一般步骤是：

(1) 对问题(事件或系统)进行观察，想象其运动变化情况，用非形式预言(自然语言)进行描述，初步确定描述问题的变量及相互关系.

(2) 确定问题的所属系统(力学系统、生态系统、管理系统等)模型大概的类型(离散模型、连续模型、随机模型等)以及描述这类系统所用的数学工具(图论方法、常微分方程等)，提出假说.

(3) 将假说进行扩充或形式化，选择具有关键性作用的变量及其相互关系(主要矛盾)，进行简化或抽象，将问题的内在规律用数字、图表、公式、符号表示出来，经过数学上的推导或分析，得到定量(或定性)关系，初步形成数学模型.

(4) 根据现场实验或对实验数据的统计分析估计模型参数.

(5) 检查修改模型，这是在反映问题的真实性与便于数学处理之间的折中过程，模型只有在被检查、评价、确认基本符合要求后，才能被接受；否则需要修改模型，这种修改有时是局部的，有时甚至要推倒重来.

1.1.3 数学模型分类及建模方法

建立数学模型，可能会涉及许多数学分支，一个问题，往往可以利用不同方法建立不同的模型. 因此绝对的分类，对于建立数学模型是不利的，但是大致的分类，对初学者，在确立原型所属系统或采用数学工具时，会有一定的帮助. 数学模型按不同标准可分为不同的类型：

(1) 按时间变化对模型的影响，可分为时变与是不变模型，静态与动态模型等.

(2) 按变量情况可分为离散模型与连续模型，确定性或随机性模型等.

(3) 按实际系统与周围环境相互关系可分为自治的或非自治模型.

(4) 按研究方法和对象的数学特征，可分为优化模型、逻辑模型、稳定性模型、扩散模型等.

(5) 按研究对象的实际领域可分为人口模型、交通模型、生态模型、经济模型、社会模型等.

常用的建模方法有：

1) 机理分析法

机理分析法是立足于事物内在规律的一种常见建模方法，主要是对现实对象的特性有较为清楚的了解与认识，通过分析其因果关系，找出反映其内部机理的规律性而建立其模型的一种方法.

2) 类比法

类比法是建立数学模型的一个常见而有力的方法. 其方法是把问题归结或转化为我们熟知的模型上去给以类似的解决. 实际上，许多来自不同领域的问题在数学模型上看确实具有相类似的甚至相同的结构.

3) 平衡原理

平衡原理是指自然界的任何物质在其变化的过程中一定受到某种平衡关系的支配. 注意发掘实际问题中的平衡原理是从物质运动机理的角度组建数学模型的一个关键问题，就像中学的数学应用题中等量关系的发现是建立方程的关键一样.

4) 微元法

微元法是指在组建对象随着时间或空间连续变化的动态模型时，经常考虑其在时间或空间的微小单元变化情况，这是因为在这些微元上的平衡关系比较简单，而且容易使用微分学的手段进行处理. 这类模型基本上是以微分方程的形式给出的.

5）图示法

图示法是指利用几何图示建模. 有不少实际问题的解决只要从几何上给予解释和说明就足以了，这时，我们只需建立其图模型即可. 这种方法既简单又直观，且其应用面很宽.

6）数据分析法

数据分析法（基于测试数据的经验模型）的基本流程如下：

（1）给出实际调查数据. 调查的数据一定要具有充分的代表性，可以通过系统抽样、分层抽样等抽样方法获得样本数据. 另外，样本容量也不要太小，否则所得结果不具有代表性.

（2）将样本数据绘制成数据散布图. 这是对数据进行分析最有效的第一步. 为此，务必使用坐标纸绘制以求图像准确，为进一步的分析打好基础. 当然能利用计算机绘制更好.

（3）对散布图进行分析. 这一步往往可获得对所表达变量关系的一定认识，形成初步看法，确定整体数据结构是否脱离实际. 若所反映的实际现象与散布图出现太大差距，则这批数据应当废弃.

（4）根据散布图分析结果选择相类似函数关系，采用适当方法建立经验公式. 这里也同样有一个简单化原则：即在满足问题精度要求的前提下，尽量选择形式简单的数学表达式.

（5）模型分析、检验与修改. 由于经验模型本身具有不确定性，并且这类模型的作用也常常是为了对所关心系统做出某种预测、控制. 因此，检验其结果的合理性，误差分析和修改模型等是必要的.

数学模型的修改与化简，是建模中技巧性较强的环节. 由于实际情况是复杂多变的，往往不能简单用现有模型. 例如，有的参数在某个场合容易得到，而在另一场合却得不到，这就迫使人们改用其他形式的模型；有时在构造模型的过程中发现必须拥有这样或那样的数据，或指出模型应朝哪一个方向修正；有时，虽然复杂的模型已经构出，但做实验或求解却十分困难，这也迫使人们采用较简单的近似模型.

常用简化模型的方法有：

（1）除去一些变量. 在机理分析中，在一定条件下，常将描述分布参数分散的偏微分方程，简化为集中参数的常微分方程.

在统计分析中，则采用主成分分析法、向后回归法（淘汰法）和逐步回归方法，以减少变量个数；或在建模之前，采用正交实验方法，在众多因数（变量）中找出对指标有显著影响的少量因数再进行优化实验，进而建立模型.

（2）合并一些变量. 在构造模型时，把一些性质相同或相似的变量合并成少数

有代表性的变量. 尽管这样做降低了模型的精度,但只要能满足建模的基本要求,则是可行的. 例如,在经济系统建模中,经过多年研究探索,将国民经济上千个部门合并成 61 个变量.

(3) 改变变量的性质. 常用的方法是,把某些非主要的或暂时的变量视为常量,把连续变量视为离散变量,或把离散变量视为连续变量.

(4) 改变变量之间的函数关系. 当处理非线性问题遇到困难时,或建模精度不高时,常将非线性函数在某一个点处展开(Taylor 展开),取前两项作为近似表达式,即用线性关系逼真非线性关系式. 这一线性化方法在工程界被广泛采用. 也可以采用二次函数或其他函数进行逼近,而使模型简化.

(5) 改变约束关系. 为简化模型有时还可以对变量的约束条件加以改变,如增加一些约束,或去掉一些约束,对约束进行一些修改等. 例如,在求解数学规划问题时,若要求目标函数的极大值,而真正解不一定能找到时,则增加约束后求得的可行解一般是偏低的,称之为保守解或悲观解;去掉一些约束求得的解往往偏高,称之为冒进解或乐观解. 虽然它们不是问题真正的解,但是可以通过他们来了解真正解的范围,这对问题进行初步评价是有用的.

(6) 模型结构的转换. 若某种模型在理论上很漂亮,但求解很困难,甚至无法求解,或者某种模型,要求具备某种数据,而这种数据不具备或不易得到,我们只有改用其他形式的模型,即改变模型的结构.

模型结构的转换,需要在对问题透彻理解和想象的基础上,实现视角的转换,即从不同的角度观察问题,进而采用不同的数学工具来描述同一问题.

1.1.4 在数学建模学习中一般应注意的几个方面

建立数学模型是一种积极的思维活动,从认识论角度看,是一种极为复杂且应变能力很强的心理现象,因此没有统一的模式,没有固定的方法,其中既有逻辑思维方法,又有非逻辑思维方法. 在数学建模学习中,应注意以下几个方面:

(1) 要深刻体会数学的重要性不仅体现在数学知识的应用,更重要的是数学思维方法,这里包括思考问题的方式、所运用的数学方法及处理技巧等,特别要注意抽象概括、逻辑推理、联想和洞察四种基本能力的培养.

(2) 要提高动手能力,这包括自学、文献检索、计算机应用、科技论文写作和相互交流能力,特别应有意识地增强文字表述方面的准确性和简明性.

(3) 要勇于克服学习中的困难,消除畏难情绪. 由于数学建模课程属于拓宽性广的、启发性强的、难度较深的课程、它提倡创造性思维方法的训练,因而文字习题解题中找不到感觉或求解有出入是一种正常现象,对此不必丧失信心. 相信通过摸索会逐步有所改进,如能解决几个问题或真正动手完成一两个实际题目都应视为有所收获. 从长远看这种学习有益于开拓人们的思路和眼界,有利于知识结构的改善和综合素质的提高.

§1.2　数学建模示例

1.2.1　方桌问题

例 1.1　把方桌置于地面上时，常常是只有三只脚着地而放不稳，通常需要调整几次方可将方桌放稳，试用数学语言对此问题给以表述，并用数学工具给予说明：方桌能否在地面上放稳？若能，请给予证明并给出做法，否则说明理由.

步骤一　问题分析

所谓方桌能否在地面放稳是指方桌的 4 个桌脚能否同时着地，而 4 个桌脚是否同时着地是指 4 个桌脚与地面的距离是否同时为零. 于是我们可以转而研究 4 个桌脚与地面的距离（函数）是否同时等于零. 这个距离是变化的，于是可视为函数，那么作为函数，它随哪个量的改变而改变？构造这个距离函数就成为主要的建模目的.

为了构造函数和设定相关参数，让我们实际操作一下，从中搜集信息，弄清其特征. 要想 4 个桌脚同时着地，通常有两种方法：其一是将方桌搬离原地，换个位置试验；另一个做法是原地旋转试验. 前法需要研究的范围可能要很大，这里采取第二种做法. 通过实地操作，易得出结论：只要地面相对平坦，没有地面大起大落情况，那么随着旋转角度的不同，3 个桌脚同时落地后，第四个桌脚与地面距离也不同（不仅如此，旋转中总有两个桌脚同时着地，另两个桌脚不稳定）. 也就是说，这个距离函数与旋转角度有关，是旋转角度的函数. 于是一个确定的函数关系找到了，不仅如此，我们的问题也顺其自然地转化为：是否存在一个角度，使得 4 个距离函数同时为零？

综上分析，问题可以归结为证明函数的零点的存在性，遂决定试用函数模型予以处理.

步骤二　合理的简化假设

依前面的问题分析，我们可作如下假设：

(1) 桌子的 4 个桌腿同长（这个假设显然合理，而且避免了问题与桌腿长度有关使问题变复杂）.

(2) 将方桌的桌脚与地面接触处视为一个几何点，四脚连线为正方形（这是因为问题本身考虑的是能否四脚着地而与方桌样式、桌腿粗细等无关）.

(3) 地面相对平坦，即在旋转所在地面范围内，方桌在任何位置至少有三只脚同时着地（自然这是符合实际的合理假设）.

(4) 地面高度连续变化，可视地面为数学上的连续曲面.

步骤三　建立模型

依假设条件，4 个桌脚连线呈正方形，因而以其中心为对称点，令正方形绕中心旋转便表示了方桌位置改变，于是可以用旋转角度的变化表达桌子的不同位置.

为了确定起见，我们以这个正方形中心为原点建立平面直角坐标系，并假设旋转开始时(角度 $\theta=0$)，4 个桌脚点 A,B,C,D 中 A,C 位于 x 轴上，则 B,D 位于 y 轴上. 旋转角度 θ 后，点 A,B,C,D 变到点 A',B',C',D'(图 1-1)，显然，随着 θ 的改变，方桌的位置也跟着改变，从而桌脚与地面距离也随之改变. 注意到试验结果，尽管方桌有 4 个桌脚，因而有 4 个距离，但对于每个角度，总有点 A,C 同时着地而 B,D 点不同时着地，或 B,D 点同时着地而 A,C 点不同时着地，故只要设两个距离函数即可. 设 A,C 两脚与地面距离之和为 $f(\theta)$，B,D 两脚与地面距离之和为 $g(\theta)$，且作为距离函数的 $f(\theta)$，$g(\theta)$ 均为非负函数.

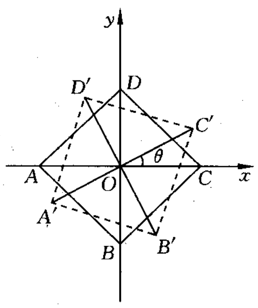

图 1-1

由假设(4)，$f(\theta)$ 与 $g(\theta)$ 均为连续函数，而由假设(3)，对任一角度 θ，恒有 $f(\theta)=0$ 而 $g(\theta)\geqslant 0$，或 $g(\theta)=0$ 而 $f(\theta)\geqslant 0 \Rightarrow f(\theta)g(\theta)=0$ 对任意 θ 成立.

又为证明存在角度 θ_0，使 $f(\theta_0)=0$，$g(\theta_0)=0$ 同时成立，还需要条件支持. 注意到在初始位置($\theta=0$)，或 $f(0)=0$，$g(0)>0$；或 $f(0)>0$，$g(0)=0$，而旋转 $90°$ 后，两组条件恰好交换. 如此，方桌通过旋转改变位置能放稳的证明，便归结为证明如下的数学命题：

已知 $f(\theta)$，$g(\theta)$ 是 θ 的连续函数，对任意 θ，$f(\theta)g(\theta)=0$，且 $f(0)=0$ 时，$g(0)>0$；$f(\pi/2)>0$ 时，$g(\pi/2)=0$. 求证：存在 $\theta_0\in[0,2\pi]$，使 $f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$.

这就是方桌问题的数学模型. 易见只需引进一个变量 θ 及其一元函数 $f(\theta)$，$g(\theta)$，便把模型条件和结论用简单又精确的数学语言表述出来. 从而形成所需要的数学模型.

步骤四　求解数学模型

容易看出本模型属于一元连续函数的零点存在性问题，使用介值定理便可轻松证明它. 这里从略.

步骤五　模型分析、检验、修改与推广

因本例非常直观和简单，模型的分析、检验和修改就略去了，但模型可推广为方桌的四个桌脚呈长方形情形的证明，希望大家要重视这个问题.

1.2.2　农场放牧问题

例 1.2　设某农场有一片草地用于放牧，经观察发现，3 头牛在 2 个星期中就能吃完 2 亩地上的草；2 头牛在 4 个星期中也能吃完 2 亩地上的草，那么要多少头牛才能在 6 个星期中吃完 6 亩地上的草？

我们按前述建模思路给出如下建模过程.

问题分析

根据题目可知，一片地上的草被吃完并不意味着草的高度不存在，而草被牛吃