

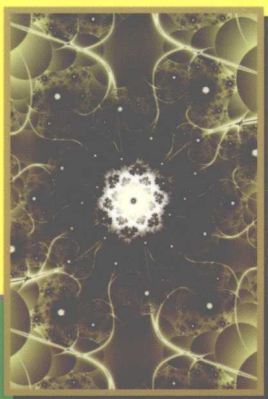
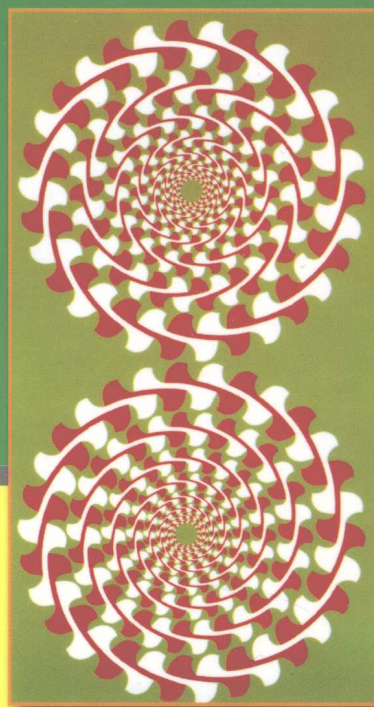


中学数学拓展丛书

数学方法溯源

Shuxue Fangfa Suyuan

沈文选 杨清桃 编著



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

● 中学数学拓展丛书

本丛书是湖南省教育厅科研课题《教育数学的研究》(编号06C510)成果之一

数学方法溯源

SHUXUE FANGFA SUYUAN

沈文选 杨清桃 编著



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 提 要

本书共分 22 章:包括切分原理,程序原理,数学归纳法原理,局部调整原理,排序原理,配对原理,关系、映射、反演原理,重叠原理,重现原理,开关原理,最小数原理,最短长度原理,极端原理,对称原理,相似原理,守恒原理,出入相补原理,祖暅恒原理,不动点原理.

本书可作为高等师范院校教育学院、教师进修学院数学专业及国家级、省级中学数学骨干教师培训班的教材或教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

数学方法溯源/沈文选,杨清桃编著. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2008.1

(中学数学拓展丛书;5)

ISBN 978 - 7 - 5603 - 2640 - 5

I . 数… II . ①沈…②杨… III . 数学课 - 中学 - 教学参考资料 IV . G633.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 190744 号

策划编辑 刘培杰

责任编辑 王勇钢

封面设计 卞秉利

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传 真 0451 - 86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 黑龙江省教育厅印刷厂

开 本 787mm × 1092mm 1/16 印张 24.75 字数 612 千字

版 次 2008 年 1 月第 1 版 2008 年 1 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978 - 7 - 5603 - 2640 - 5

印 数 1 ~ 4 000 册

定 价 38.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

◎
序

我和沈文选教授有过合作,彼此相熟。不久前,他发来一套数学普及读物的丛书目录,包括数学眼光、数学思想、数学应用、数学模型、数学方法、数学史话等,洋洋大观。从论述的数学课题来看,该丛书的视角新颖,内容充实,思想深刻,在数学科普出版物中当属上乘之作。

阅读之余,忽然觉得公众对数学的认识很不相同,有些甚至是彼此矛盾的。例如:

一方面,数学是学校的主要基础课,从小学到高中,12年都有数学;另一方面,许多名人在说“自己数学很差”的时候,似乎理直气壮,连脸也不红,好像在宣示:数学不好,照样出名。

一方面,说数学是科学的女王,“大哉数学之为用”,数学无处不在,数学是人类文明的火车头;另一方面,许多学生说数学没用,一辈子也碰不到一个函数,解不了一个方程,连相声也在讽刺“一边向水池注水,一边放水”的算术题是瞎折腾。

一方面,说“数学好玩”,数学具有和谐美、对称美、奇异美,歌颂数学家的“美丽的心灵”;另一方面,许多人又说,数学枯燥、抽象、难学,看见数学就头疼。

数学,我怎样才能走近你,欣赏你,拥抱你?说起来也很简单,就是不要仅仅埋头做题,要多多品味数学的奥秘,理解数学的智慧,抛却过分的功利,当你把数学当做一种文化来看待的时候,数学就在你心中了。

我把学习数学比做登山,一步步地爬,很累,很苦。但是如果你能欣赏山林的风景,那么登山就是一种乐趣了。

登山有三种意境。

首先是初识阶段。走入山林,爬得微微出汗,坐拥山色风光。体会“明月松间照,清泉石上流”的意境。当你会做算术,会

记账,能够应付日常生活中的数学的时候,你会享受数学给你带来的便捷,感受到好似饮用清泉那样的愉悦。

其次是理解阶段。爬到山腰,大汗淋漓,歇足小坐。环顾四周,云雾环绕,满目苍翠,心旷神怡。正如苏轼名句:“横看成岭侧成峰,远近高低各不同;不识庐山真面目,只缘身在此山中。”数学理解到一定程度,你会感觉到数学的博大精深,数学思维的缜密周全,数学的简捷之美,使你对符号运算能够有爱不释手的感受。不过,理解了,还不能创造。“采药山中去,云深不知处。”对于数学的伟大,还莫测高深。

第三则是登顶阶段。攀岩涉水,越过艰难险阻,到达顶峰的时候,终于出现了“会当凌绝顶,一览众山小”的局面。这时,一切疲乏劳顿、危难困苦,全都抛到九霄云外。“雄关漫道真如铁”,欣赏数学之美,是需要代价的。当你破解了一道数学难题,“蓦然回首,那人却在灯火阑珊处”的意境,是语言无法形容的快乐。

好了,说了这些,还是回到沈文选先生的丛书。如果你能静心阅读,它会帮助你一步步攀登数学的高山,领略数学的美景,最终登上数学的顶峰。于是劳顿着,但快乐着。

信手写来,权作为序。

张奠宙

2007年11月13日

于沪上苏州河边

附 文

(文选先生编著的丛书,是一种对数学的欣赏。因此,再次想起数学思想往往和文学意境相通,年初曾在《文汇报》发表一短文,附录于此,算是一种呼应)

数学和诗词的意境

张奠宙

数学和诗词,历来有许多可供谈助的材料。例如:

一去二三里,烟村四五家;

楼台七八座,八九十支花。

把十个数字嵌进诗里,读来琅琅上口。郑板桥也有咏雪诗:

一片二片三四片,五片六片七八片;

千片万片无数片,飞入梅花总不见。

诗句抒发了诗人对漫天雪舞的感受。不过,以上两诗中尽管嵌入了数字,却实在和数学没有什么关系。

数学和诗词的内在联系,在于意境。李白《送孟浩然之广陵》诗云:

故人西辞黄鹤楼,烟花三月下扬州。

孤帆远影碧空尽,唯见长江天际流。

数学名家徐利治先生在讲极限的时候,总要引用“孤帆远影碧空尽”这一句,让大家体会一个变量趋向于0的动态意境,煞是传神。

近日与友人谈几何,不禁联想到初唐诗人陈子昂《登幽州台歌》中的名句:

前不见古人,后不见来者;

念天地之悠悠,独怆然而涕下。

一般的语文解释说:上两句俯仰古今,写出时间绵长;第三句登楼眺望,写出空间辽阔;在广阔无垠的背景中,第四句描绘了诗人孤单寂寞悲哀苦闷的情绪,两相映照,分外动人。然而,从数学上看来,这是一首阐发时间和空间感知的佳句。前两句表示时间可以看成是一条直线(一维空间)。陈老先生以自己为原点,前不见古人指时间可以延伸到负无穷大,后不见来者则意味着未来的时间是正无穷大。后两句则描写三维的现实空间:天是平面,地是平面,悠悠地张成三维的立体几何环境。全诗将时间和空间放在一起思考,感到自然之伟大,产生了敬畏之心,以至怆然涕下。这样的意境,数学家和文学家是可以彼此相通的。进一步说,爱因斯坦的四维时空学说,也能和此诗的意境相衔接。

贵州六盘水师专的杨老师告诉我他的一则经验。他在微积分教学中讲到无界变量时,用了宋朝叶绍翁《游园不值》中的诗句:

满园春色关不住,一枝红杏出墙来。

学生每每会意而笑。实际上,无界变量是说,无论你设置怎样大的正数 M ,变量总要超出你的范围,即有一个变量的绝对值会超过 M 。于是, M 可以比喻成无论怎样大的园子,变量相当于红杏,结果是总有一枝红杏越出园子的范围。诗的比喻如此恰切,其意境把枯燥的数学语言形象化了。

数学研究和学习需要解题,而解题过程需要反复思索,终于在某一时刻出现顿悟。例如,做一道几何题,百思不得其解,突然添了一条辅助线,问题豁然开朗,欣喜万分。这样的意境,想起了王国维用辛弃疾的词来描述的意境:“众里寻它千百度,蓦然回首,那人却在灯火阑珊处。”一个学生,如果没有经历过这样的意境,数学大概是学不好的了。

◎
前

言

音 乐能激发或抚慰情怀,绘画使人赏心悦目,诗歌能动人心弦,哲学使人获得智慧,科技可以改善物质生活,但数学却能提供以上的一切。

——Klein

必须认识到,对于数学中所有的部分都存在着许多不同的方法。掌握所有的方法是重要的,因为许多问题扩展后,需要不同的方法来解。

——R. Bellman

方法就是把我们应该注意的事物进行适当的整理和排列。

——Descartes

人们喜爱音乐,因为它不仅有神奇的乐谱,而且有悦耳的优美旋律!

人们喜爱画卷,因为它不仅描绘出自然界的壮丽,而且可以描绘人间美景!

人们喜爱诗歌,因为它不仅是字词的巧妙组合,而且抒发情怀的韵律!

人们喜爱哲学,因为它不仅是自然科学与社会科学的浓缩,而且使人更加聪明!

人们喜爱科技,因为它不仅是一个伟大的使者或桥梁,而且是现代物质文明的标志!

而数学之为德,数学之为用,难以用旋律、美景、韵律、聪明、标志等词语来表达!

你看,不是吗?

数学眼光,使我们看到世间万物充满着带有数学印记的奇妙的科学规律,看到各类书籍和文章的字里行间有着数学的踪迹,使我们看到满眼绚丽多彩的数学洞天!

数学思想,使我们领悟到数学是用字母和符号谱写的美妙乐曲,似协奏曲一样充满着和谐的旋律,让人难以忘怀,难以割舍!

数学应用,给我们展示出了数学的神通广大,在各个领域与角落闪烁着人类智慧的火花!

数学建模,呈现出了人类文明亮丽的风景!特别是哪呈现出的抽象彩虹——一个个精巧的数学模型,璀璨夺目,流光溢彩!

数学方法,像画卷一样描绘着各学科的异草奇葩般的景色,令人目不暇接!

数学史话,充满了诱人的前辈们的创造或再创造的心血机智,使人汲取了丰富的营养!

因此,我们可以说,你可以不信仰上帝,但不能不信仰数学。

从而,提高我国每一个人的数学文化水平及数学素养,是提高我国各个民族整体素质的重要组成部分,这也是数学基础教育中的重要目标。为此,笔者构思了这套丛书。

这套丛书是笔者学习张景中院士的教育数学思想,对一些数学素材和数学研究成果进行再创造并以此为指导思想来撰写的;是献给中学师生,企图为他们扩展数学视野、提高数学素养以响应张奠宙教授的倡议:建构符合时代需求的数学常识,享受充满数学智慧的精彩人生的书籍。

不积小流无以成江河,不积跬步无以至千里,没有积累便没有丰富的素材,没有整合创新便没有鲜明的特色。这套丛书的写作,是笔者在多年资料的收集、学习笔记的整理及笔者已发表的文章的修改并整合的基础上完成的。因此,每册书末都列出了尽可能多的参考文献,在此,衷心地感谢这些文献的作者。

这套丛书,作者试图以专题的形式,对中、小学中典型的数学问题进行广搜深掘来串联,并以此为线索来写作的。

这一册是《数学方法溯源》。

数学本身就是一种教人聪明的方法,就是一种科学方法与技术。在中学数学中谈数学方法,主要是谈数学解题方法。

所谓方法,是指人们为了某种目的而采取的手段、途径和行为方式中所包含的可操作的规则或模式,或者说解决一类问题可采用的共同手段或计策。解决问题所需要的特殊手段或计策常称为技巧(或招术),其实技巧常能在某些问题中发挥特殊的作用,并且技巧累积到规律化的程度就出现了方法。

“法”的可仿效性带有较为“普适”的意义,而“技巧”的“普适”要差一些,但是它们也是相互依存的:只有注意技巧,才能揭示方法的产生,共性寓于个性之中,方法正是从门路、技巧之处变通发展而来;实施技巧要以能实施管着它的方法为前提。例如,待定系数法是一种特别有用的“法”。求二次函数的解析式时,用待定系数法根据图象上三个点的坐标求出解析式可看做第一“技巧”;根据顶点和另一点的坐标求出解析式可看做第二“技巧”;根据与 x 轴的交点和另一点的坐标求出解析式可看做第三“技巧”。这三个技巧各有奇妙之处。哪一技巧更好使用,要看条件和管着它们的“法”而定。教师授予学生“用待定系数法求二次函数的解析式”,最根本、最要紧的“法旨”就在于让学生明确二次函数的解析式中自变量、函数值

和图象上点的横、纵坐标的对应关系;至于一般的点和特殊的点(例如顶点及与 x 轴的交点),解析式可以有不同的反映。因此,我国古代传说中经常提到的某些师傅对待弟子“给‘招’(技巧)不给‘法’”的现象,在现代的数学教育、教学中应该尽量避免。

人们通过长期的实践,发现了许多运用数学思想的手段、门路、技巧和程序。同一手段、门路、技巧、程序被重复运用了多次,并且都达到了预期的目的,便成为数学方法。数学方法是以数学为工具进行科学研究的方法,即用数学语言表达事物的状态、关系和过程,经过推理、运算和分析,以形成解释、判断和预言的方法。

数学方法具有以下三个基本特征:一是高度的抽象性和概括性;二是精确性,即逻辑的严密性及结论的确定性;三是应用的普遍性和可操作性。

数学方法在科学技术研究中具有举足轻重的地位和作用:一是提供简洁精确的形式化语言;二是提供数量分析及计算的方法;三是提供逻辑推理的工具。

现代科学技术特别是电脑的发展,与数学方法的地位和作用的强化正好是相辅相成。

数学方法是人类在数学研究与学习中积累起来的宝贵精神财富,有着广阔的领域和丰富的内容。中学数学中的解题方法更是如此。

探寻数学解题方法的根源,探讨数学解题方法的灵活应用,这是中学数学教学中的一个重要话题,也是一些师生常考虑的问题,本书希望在这方面作一些揭示与介绍。

在日常生活中,有许多至为明显的事实,由于它们实在太简单了,人们反而觉得平淡无奇,而将它们轻易地放过去了。一旦我们注意到它们,则能使之成为我们解答数学问题的极为有用的方法原理。诸如水总是由高处流向低处;全班学生中必有一个年纪最小的;四本书放到三个抽屉里,必有一个抽屉放两本或两本以上的书,等等,均蕴含着深刻的数学解题方法原理。揭示与发掘这样的解题方法原理,是研究数学方法的重要内容。

数学之为用,除了工具价值、文化价值,还有更为重要的育人价值。而数学的育人,主要是通过培养思维能力来实现的。数学解题方法原理在数学思维中起着十分重要的作用。如果把数学知识比做一池清水,则数学解题方法原理就是渠道,水有渠道才能流出来。人们掌握了解题方法原理就有了思维方向;通晓了解题方法原理,就保证了思维畅通无阻,并向纵深发展。这时,迂回曲折的解题思维过程就会展现出来,就会使我们举一反三而受到启发,从而理出头绪。可以说,离开了数学解题方法原理的数学思维,只能是杂乱无章的胡思乱想。

数学能力是以数学知识为基础,以数学解题方法原理为支柱,以技能、技巧和规律为结晶的逻辑思维能力、直觉判断能力等诸能力的综合。而技能、技巧是深入理解数学知识,灵活运用解题方法原理进行合情推理判断、严密逻辑思维的结果。因此,掌握、通晓数学解题方法原理,是提高数学能力必不可少的条件。

数学解题作为数学教育教学论的一个科研专题,受到越来越多的国内外数学工作者和数学教育专家的关注,大有使这一课题科学化、理论化的趋势。他们提出了“问题就是数学的心脏”,“掌握数学就意味着解题”(G. Polya),“数学家存在的主要理由是解问题”(P. R. Halmos)的新观念;指出了“发展解决问题的能力应当成为数学教育工作者的努力方向”,吹响了把数学解题研究提高到新的理论高度来认识的号角。各高师院校数学系(科)也开设了“数学解题研究”、“数学解题方法研究”等必修课(或选修课)。而研究解题方法原理,是数学解题研究的一个重要方面;讲授解题方法原理,是讲授解题研究的一个重要内容。

数学竞赛是国际公认的智力活动,从古到今,从小学到中学、到大学,参赛人数之多,竞赛范围之广,竞赛难度之高决不比亚运会、奥运会逊色。它成了亿万青少年喜爱的活动之一,它也是数学工作者日常工作的重要组成部分。在数学竞赛中,那些灵巧而有趣的命题,以构思优美和精巧而吸引着广大数学爱好者;以丰富的知识、技巧、思想给我们的研究留下了思考和开掘的广阔余地。追本溯源,是命题者调动和活化了初等数学中很多潜在的知识、数学解题方法原理,并以此作为深刻的背景,用日常生活的语言把它陈述得饶有趣味,富有新意。因此,研究数学解题方法原理、运用数学解题方法原理解题,也是我们开展数学课外活动,进行数学竞赛培训的重要内容。

沈文选

2007年6月于岳麓山下



第一章 切分原理

1.1 切分原理 I 及应用	1
1.1.1 分域法	1
1.1.2 分类法	3
1.1.3 迭加法	11
1.2 切分原理 II 及其应用	19
1.2.1 考虑元素的特殊性分类分划	19
1.2.2 考虑位置的特殊性分类分划	20
1.2.3 考虑参量的取值范围分类分划	23
思考题	24
思考题参考解答	26

第二章 程序原理

2.1 程序原理 I 及其应用	32
2.1.1 中途点法	32
2.1.2 消数法	37
2.1.3 消点法	41
2.2 程序原理 II 及其应用	42
2.2.1 证明排列组合公式	43
2.2.2 求解计数问题	45
思考题	47
思考题参考解答	49

第三章 数学归纳法原理

3.1 运用数学归纳法证题时应注意的事项与技巧	55
3.1.1 三个步骤缺一不可	55
3.1.2 第一步中的注意事项与技巧	56
3.1.3 第二步中的注意事项与技巧	58
3.2 数学归纳法的几种其他形式	70
3.2.1 第二数学归纳法	70
3.2.2 跳跃数学归纳法	71

目 录 CONTENTS

目 录
CONTENTS

3.2.3 倒推数学归纳法(反向归纳法)	72
3.2.4 分段数学归纳法	73
3.2.5 二元有限数学归纳法	74
3.2.6 双向数学归纳法	74
3.2.7 翘翘板数学归纳法	75
3.2.8 同步数学归纳法	75
3.3 数学归纳法的适度运用	76
思考题	76
思考题参考解答	78

第四章 容斥原理

4.1 容斥原理 I 与 II 的应用	87
4.2 容斥原理 II 的推广及应用	92
思考题	95
思考题参考解答	96

第五章 缩小原理

5.1 逐步排除,去伪存真	99
5.2 灵活推导,逐步逼近	100
5.3 提炼特征,寻求规律	102
5.4 放缩夹逼,限定范围	103
5.5 降维减元,简化处理	105
5.6 毛估猜测,检验论证	106
5.7 设立主元,缩围击破	108
思考题	110
思考题参考解答	110

第六章 局部调整原理

6.1 求最(极)值	113
6.2 证明不等式	115
6.3 论证平衡状态问题	119
6.4 等周问题的证明	120
6.5 磨光变换	123
思考题	123
思考题参考解答	124

第七章 排序原理

7.1 积和(方幂)式排序不等式	127
7.2 应用排序不等式 I 证不等式	128
7.2.1 注意揭示两组数是同序的	128



7.2.2 注意多次应用排序不等式 I	129
7.2.3 注意所证不等式的变换	131
7.2.4 注意构造新的序列	131
7.2.5 运用排序不等式 I 证著名不等式	132
7.3 运用排序不等式 I 设计最佳方案	134
7.4 排序不等式 I 的推广形式	134
7.5 商式排序不等式	140
7.6 排序原理 II	141
思考题	142
思考题参考解答	143

第八章 配对原理

8.1 运用配对原理求解数学问题	149
8.1.1 利用图形	149
8.1.2 利用符号	150
8.1.3 利用规律	151
8.1.4 抓住特殊元素	152
8.1.5 抓住特殊式子	153
8.2 运用配对原理,证明两组东西一样多	155
思考题	156
思考题参考解答	157

第九章 关系、映射、反演原理

9.1 运用换元法解题	161
9.1.1 整体代换	161
9.1.2 常值代换	161
9.1.3 比值代换	162
9.1.4 标准量代换(包括平均量代换)	162
9.1.5 关于三角形边长命题的“切线长代换”	163
9.2 运用反函数法解题	163
9.3 运用对数法解题	163
9.4 运用坐标法解题	164
9.5 运用参数法解题	165
9.5.1 量度参数	165
9.5.2 增量参数	165
9.5.3 参数方程法	166
9.6 运用复数法解题	168
9.7 运用向量法解题	169
9.8 运用母函数法解题	171
9.9 运用微分、积分、概率知识法解题	172
9.10 运用数字化方法解题	172

目 录 CONTENTS



9.11 运用数学模型法解题	174
思考题	174
思考题参考解答	174

第十章 逆反转换原理

10.1 逆推法	176
10.2 分析法	178
10.3 补集法	179
10.4 反客为主法	180
10.5 取倒数法	182
10.6 反证法	184
10.7 举反例	189
思考题	191
思考题参考解答	192

第十一章 重叠原理

11.1 离散型重叠原理及应用	196
11.1.1 要善于设计集合	197
11.1.2 设计集合的几种常用方法	197
11.1.3 通过转化应用重叠原理 II	201
11.1.4 分成几种情形应用重叠原理 II	202
11.1.5 多次连续应用重叠原理 II	202
11.1.6 同一题可划分不同的集合来运用重叠原理 II 解题	203
11.1.7 重叠原理 III、重叠原理 IV 的应用例子	203
11.1.8 重叠原理 I 的另一种表现形式	204
11.2 连续型重叠原理及应用	204
11.2.1 平均量重叠原理	204
11.2.2 不等式重叠原理	207
11.2.3 面积重叠原理	208
11.2.4 连续型重叠原理的推广	209
思考题	210
思考题参考解答	210

第十二章 重现原理

12.1 余数重现原理	212
12.1.1 同余在算术中的应用	213
12.1.2 利用同余求解末尾几位数码问题	215
12.1.3 利用同余处理整数问题	216
12.1.4 利用同余的性质证明某些著名定理	217
12.2 个位数重现原理	218

12.3 映射象重现原理	221
12.3.1 分圆多项式	221
12.3.2 周期函数	224
12.3.3 周期数列	229
12.3.4 其他周期现象	233
思考题	234
思考题参考解答	234

第十三章 开关原理

13.1 奇偶分析法	237
13.1.1 末位数问题	237
13.1.2 整除性问题	239
13.1.3 方程问题	239
13.1.4 存在性问题	240
13.1.5 探讨性问题	242
13.1.6 对弈问题	243
13.2 二进位制分析法	244
13.3 两个原理的综合应用	247
思考题	248
思考题参考解答	249

第十四章 最小数原理

14.1 最小数原理 I 及应用	251
14.2 最小数原理 II 及应用	252
14.2.1 论证存在性问题	252
14.2.2 论证唯一性问题	252
14.2.3 论证不存在性问题	253
14.2.4 论证“除法定理”	254
14.2.5 论证数学归纳法原理	254
14.2.6 推出归纳公理	254
14.3 最小空间角原理及应用	255
14.4 最大数原理及应用	256
附录 数学归纳法原理另外几种形式的证明	258
思考题	259
思考题参考解答	260

第十五章 最短长度原理

15.1 最短长度原理 I 及应用	262
15.1.1 最佳选点、最佳路径问题	262
15.1.2 不等式、最值问题	264

目 录

CONTENTS



15.1.3 覆盖问题	265
15.1.4 阿基米德第二公理	266
15.2 最短长度原理 II 及应用	268
思考题	270
思考题参考解答	270

第十六章 极端原理

16.1 解答问题, 运用极端原理奠基	272
16.2 求解问题, 运用极端原理探路	274
16.3 定值问题, 先用极端原理探求	276
16.4 穷举问题, 运用极端原理筛选	277
16.5 某些规律, 运用极端原理发现	278
16.6 获得结论对否, 运用极端原理检验	280
16.7 讨论题解, 运用极端原理完善	281
思考题	282
思考题参考解答	283

第十七章 对称原理

17.1 研究对称获结论	285
17.1.1 对称原理 II 及应用	285
17.1.2 对称原理 III 及其他	288
17.1.3 对称原理 IV	290
17.2 看清对称明思路	291
17.2.1 看清对称图形	291
17.2.2 看清对称式子	292
17.2.3 看清对称地位	294
17.2.4 看清对称作用	295
17.3 联想对称得辅图	297
17.4 想到对称得方法	298
思考题	299
思考题参考解答	300

第十八章 相似原理

18.1 重视相似性推理	303
18.1.1 利用相似性, 简化解答过程	303
18.1.2 注意相似性, 应用图形性质	304
18.1.3 根据相似性, 作出判断、推广	305
18.1.4 发现相似性, 提高认识水平	305
18.1.5 运用相似性, 创立新的学说	306

18.2 掌握相似性方法	306
18.2.1 借助相似性,运用比较法	306
18.2.2 捕捉相似性,纵横来类比	307
18.2.3 发掘相似性,巧用模式法	309
18.2.4 猎取相似性,采用模拟法	311
18.2.5 揭示相似性,善用移植法	311
18.2.6 把握相似性,优化探索法	312
思考题	314
思考题参考解答	315

第十九章 守恒原理

19.1 配凑型方法	318
19.1.1 配方法	318
19.1.2 拆开法	320
19.1.3 乘1法	326
19.2 代换型方法	331
19.2.1 待定系数法	331
19.2.2 参量分离法	337
19.2.3 化“1”代换法	337
19.2.4 等和代换法	338
思考题	339
思考题参考解答	339

第二十章 出入相补原理

20.1 等形出入相补	344
20.2 等积形出入相补	346
20.3 数、式出入相补	348
思考题	350
思考题参考解答	351

第二十一章 祖暅原理

思考题	355
思考题参考解答	355

第二十二章 不动点原理

22.1 函数不动点	357
22.1.1 利用 $f(x)$ 的不动点,求 $f(x)$ 的 n 次迭代函数的解析式	357
22.1.2 利用 $f(x)$ 的不动点解方程	358
22.1.3 利用 $f(x)$ 的不动点求递推数列的通项	359
22.1.4 利用 $f(x)$ 的不动点求递推数列的极限	362

目 录

CONTENTS