2003年上海大学博士学位论文 14

时滞微分方程Hopf分岐分析、周期解的计算及其数值动力系统

作　者：郭　谦
专　业：计算数学
导　师：杨忠华

上海大学出版社
·上海·

2003 年上海大学博士学位论文

时滞微分方程Hopf分歧分析、周期解的计算及其数值动力系统

作 者： 郭 谦

专 业： 计算数学

导 师： 杨忠[redacted]

上海大学出版社

· 上海 ·

Shanghai University Doctoral Dissertation (2003)

Hopf Bifurcation Analysis, Computation of Periodic Solutions for Delay Differential Equations and It's Numerical Dynamics

Candidate: Qian Guo
Major: Computational Mathematics
Supervisor: Prof. Yang Zhong-hua

Shanghai University Press
• Shanghai •

上 海 大 学

本论文经答辩委员会全体委员审查，确认符合上海大学博士学位论文质量要求。

答辩委员会名单：

主任：	曹志浩	教授，复旦大学	200433
委员：	蒋尔雄	教授，上海大学	200436
	郭本瑜	教授，上海师范大学	200234
	王翼飞	教授，上海大学	200436
	魏木生	教授，华东师范大学	200062
导师：	杨忠华	教授，上海师范大学	200234

评阅人名单：

曹志浩	教授，复旦大学	200433
李立康	教授，复旦大学	200433
向新民	教授，上海师范大学	200234

评议人名单：

马和平	教授，上海大学	200436
许梦杰	教授，上海大学	200436
伍渝江	教授，兰州大学	730001
丛玉豪	教授，上海市师范大学	200234

答辩委员会对论文的评语

该博士论文研究的时滞微分方程的Hopf分歧、周期解的计算、时滞动力学等问题具有广泛的实际背景和重要的理论意义。

论文运用Lyapunov-Schmidt约化方法对时滞Logistic方程进行了分歧分析，从理论上得到了Hopf分歧点附近周期解的近似解析表达式。在数值方法方面，采用分段三次Hermite配点法结合L-S约化，拟弧长延拓等方法计算了Hopf分歧点附近的周期解并有效延拓，可顺利通过周期解族的折叠点和分歧点。论文分析了用Theta-方法，线性多步法求解时滞方程的动力学性质，研究了不动点和2-周期解的存在性和稳定性，得到了避免伪2-周期解的条件。上述这些工作具有创造性。

从论文看，作者熟悉有关研究方向的国内外动态，具有扎实的计算数学专业基础和熟练的计算能力。显示出作者具有较强的科研能力，这是一篇优秀的博士论文。

答辩委员会表决结果

答辩委员会一致同意通过答辩，建议授予郭谦同学理学博士学位。

答辩委员会主席：曹志浩

2003年6月4日

摘 要

本文主要研究含参数的时滞微分方程的 Hopf 分歧分析，其周期解的计算方法以及求解时滞微分方程的数值方法的一些动力学性质. 我们选取著名的时滞 Logistic 方程作为主要研究模型，该方程形式简单而且分歧现象较为丰富，是一个理想的检验模型.

由于现有分析方法的局限性，数值计算成为研究周期解性态的重要方法之一，而且时滞微分方程周期解的计算已经大量应用于时滞反馈控制, 生物数学等领域. 本文从分歧分析的角度来考虑周期解问题，同时，对 Hopf 分歧的研究更有助于周期解的计算.

在数值计算时，一个令人感兴趣的问题就是我们使用的数值方法是否能很好地体现原方程的动力学性质，或者在什么条件下数值解能很好地逼近原问题的解. 对这类问题的研究在常微分方程中已有较多成果，但由于时滞项引起的解的某些不连续性，这给我们的分析带来了较大困难.

我们在本文中做了如下工作：

首先，我们在时滞微分系统中引入 Lyapunov-Schmidt 约化方法，得到单时滞微分方程的 Hopf 分歧方程及其附近的周期解. 我们详细分析了时滞 Logistic 方程，利用 LS 约化方法经过复杂的推导得出了它的 Hopf 分歧点附近周期解以及分歧方程的解析近似表

达式. 我们将部分结果与 Kaplan-Yorke 方法得到的结论比较，发现是十分相符的.

然后，我们重点研究了求时滞微分系统周期解的配点法 (拟谱方法)，利用分段三次 Hermite 多项式逼近解函数，适当等价变形后将周期也看成未知量，加上合适的相条件，离散化后得到一个非线性方程组，可以使用 Newton 迭代法求解. 为了解决 Newton 迭代法的初始值选取问题，我们利用前一部分 Hopf 分歧分析的结论，将解空间进行分解，很好地解决了 Hopf 分歧点附近计算周期解的初始值选取问题. 将数值例子的计算结果与前一部分得到的解析解比较发现，计算误差很小. 我们进而利用延拓的方法求得周期解枝上其它参数值处的周期解，即使遇到诸如折叠点，分枝点这样的奇异点该方法也能有效使用. 与利用 Lagrange 插值的方法比较，它更适合微分方程模型，算法更简单并且同样有很好的收敛性，在正则周期解处还能发现超收敛性.

最后，我们研究求解时滞微分方程的数值格式的动力学性质. 分别分析了 $\theta-$ 方法、相容的线性多步法的不动点以及 2- 周期解的稳定性. 时滞动力系统的 2- 周期解因受时滞项的影响，稳定性与常微情形大有不同. 进一步，对 $\theta-$ 方法、线性多步法我们得到了避免伪 2- 周期解出现的条件.

关键词： 时滞微分方程, Logistic 方程, Hopf 分歧, 配点法，拟弧长延拓，动力系统，伪解.

Abstract

In this thesis,we concentrate on Hopf bifurcation analysis,computation of periodic solutions and numerical simulation by $\theta-$ method and linear multistep method for delay differential equations(DDEs). We choose famous Logistic equation as main research model,because of its abundant bifurcation phenomenon and simple expression.

Because of the limitation of analytical method now, numerical analysis becomes one of important methods for studying periodic solutions. Computation of periodic solutions of DDEs have been applied to some fields in a large amount, such as feedback control, mathematical biology etc. We will study Hopf bifurcation analysis for DDEs, which is also very helpful to computation of periodic solution.

The another interesting problem is the relationship of the numerical schemes for solving DDEs and the true solution itself,namely whether they have same asymptotic behavior. But it is difficult to get the result because of the discontinuity of the solution

of DDEs.

Firstly, with Hopf bifurcation theorem, we introduce Lyapunov-Schmidt reduction method to analyze the Hopf bifurcation of differential equations with one lag, and we can get the analytic periodic solutions near it. We deal with logistic equations with lag in detail. After complicated calculating with LS reduction, we have the approximate analytic expression of periodic solutions near the Hopf bifurcation points. It is in accord with the result of Kaplan and Yorkes' method for periodic solutions of a class of DDEs.

Secondly, we investigate collocation method for the computation of periodic solutions of autonomous DDEs. Periodic solutions are founded by solving a periodic two-point boundary value problem, which is an infinite-dimensional problem for DDEs. We investigate the collocation method based on piecewise Hermite polynomial. The approximate expression of periodic solutions and Lyapunov-Schmidt method are used for solving the discrete nonlinear equations. And continuation method is used to get other solutions in the branch of periodic solutions. It shows superconvergence in the numerical examples.

Finally, we study the relationship between the asymptotic be-

havior of a numerical simulation by linear multistep method and $\theta-$method. The numerical methods is viewed as a dynamical system in which the step size act as a parameter. Numerical stability of them for nonlinear DDEs is investigated and we prove that A-stable linear multiple methods are NP-stable. The existence of spurious 2-period solution in the time-step are also studied. We give two simple examples to illustrate instability of the spurious 2-period solutions.

Key Words: delay differential equations, Logistic equation, Hopf bifurcation, collocation method, pseudo-arc continuation, dynamic systems, spurious solution.

目 录

第一章 绪论

1.1 背景

20 世纪以来，自然科学与社会科学的许多学科中提出了大量时滞动力学问题，如电路信号系统 [1,2]、电动力学 [3]、光学 [4]、建筑结构 [5]、神经网络 [6,7]、生态系统 [3,8]、遗传问题 [3]、流行病学 [3,9]、动物与植物的循环系统 [3]; 社会科学方面主要是各种经济现象时滞的描述，如商业销售问题、财富分布理论、资本主义经济周期性危机 [10]、运输调度问题、工业生产管理等.

系统的演化趋势不仅依赖于系统当前的状态，也依赖于系统过去某段时间或若干时刻的状态. 我们将这类动力系统称作时滞动力系统 [3,9,11–14]. 严格来讲，在动力学系统中时滞通常是不可避免的，即使以光速传递的信息系统也不例外。另外，和常微分方程所描述的动力系统不同，时滞动力系统的解空间是无限维的，其理论分析往往很困难。因此，研究时滞微分方程是一个很富有挑战性的方向.

时滞常导致系统的运动失稳，从而产生各种形式的分岔，在这些分岔中讨论最多的是 Hopf 分岔. Hopf 分歧点是定常状态通向动力学的门槛，随着参数的变化，会有一族周期解在 Hopf 分歧点处

从平衡解分岔出来，它提供了这族周期解的初始值信息，因此一般研究周期解离不开 Hopf 分歧点的研究. 周期解是时滞动力系统中的重要部分，周期现象在自然界是普遍存在的，近年来有关时滞微分方程周期解的研究大量应用于时滞反馈控制 [2,15–19]. 由于计算机和计算技术的迅速发展，人们的研究思路已发生改变，数值计算已成为研究周期解性态的一个重要方法，往往先计算后分析. 人们更感兴趣的往往是周期解的位置、大小、形状，尤其最近几十年间迅速发展的非线性现象的研究，由于理论分析的不足，与 Hopf 分歧，周期解、混沌现象以及耗散系统等有关的问题对数值计算依赖性很强，但相关的数值计算成果并不多见, 研究时滞微分系统 Hopf 分歧点、周期解及其分歧的数值计算方法是一个有着很强应用背景的课题.

1.2 研究现状

1.2.1 时滞微分方程 Hopf 分歧及其周期解理论分析

有关时滞微分方程的一般理论已经出现在不少文献中 (见 [20–27]). 时滞微分方程的一般形式为

$$y'(t) = f(t, \alpha_1(t, y(t)), \ldots, \alpha_k(t, y(t))), \qquad t \geq t_0, \tag{1.1}$$

这里 y 和 f 是 n 维向量函数, 时滞函数 $\alpha_l(t, y(t))$ 满足 $\alpha_l(t, y(t)) \equiv t - \tau_l(t, y(t)) \leq t$, $1 \leq l \leq k$, 非负函数 $\tau_l(t, y(t))$ 为 (可能) 与时间

和状态有关的滞量.

时滞微分方程 Hopf 分歧的已有研究成果大部分只是停留在理论分析阶段，并且大都是针对一维系统或单自由度系统来进行的，一般采用的是 Hopf 分歧定理、中心流形分析方法.

Belair 和 Campbell 在文献 [11] 中研究了一维双时滞微分方程

$$x'(t) = -A_1 \tanh(x(t-T_1)) - A_2 \tanh(x(t-T_2))$$

其中 $A_i(i=1,2)$ 是正常数. 该方程有一个平衡点 $x=0$，利用中心流形分析法，通过分析其在平衡点处的线性化方程的特征方程

$$\lambda = -A_1 \mathrm{e}^{-\lambda T_1} - A_2 \mathrm{e}^{-\lambda T_2}$$

得到了一些有关 Hopf 分歧的结论.

刘正荣与李继彬在 [28] 中运用定理 2.1 研究了 Wright 方程

$$x'(t) = -\alpha x(t-1)(1+x(t)), \tag{1.2}$$

其中，$\alpha > 0$, 其线性化方程的特征方程为

$$\lambda \mathrm{e}^{\lambda} = -\alpha$$

研究结论表明方程 (1.2) 在 $\alpha = \pi/2$ 发生 Hopf 分歧，并且当 $\alpha > \pi/2$ 时 (1.2) 存在非零周期解.

在研究机床颤振的非线性振动理论中，伍炯宇 [29,30]