21世纪高等院校教材

线性代数简明教程

（第二版）

方小娟 侯仁民 王 敏 主编

科学出版社
www.sciencep.com

21世纪高等院校教材

线性代数简明教程

（第二版）

方小娟　侯仁民　王　敏　主编

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是根据全国高等学校工科数学线性代数课程教学基本要求和全国硕士研究生入学数学考试大纲有关部分的规定内容，并按照新形势下教材改革的精神编写的一部简明教程. 全书特色鲜明，结构严谨，内容紧凑，易教易学. 内容包括矩阵、行列式、向量空间、线性方程组、矩阵的特征值和特征向量、二次型等. 各章中每小节末都配有适量的习题，每章末还配有一定难度的综合复习题，书末附有习题答案和提示.

本书既可作为高等院校工科、经济学科、管理学科等各专业大学生教材，又可供有关专业人员、工程技术专业工作者学习和参考，也可作为硕士研究生入学考试的复习参考书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数简明教程/方小娟，侯仁民，王敏主编. —2版. —北京：科学出版社，2008

21世纪高等院校教材

ISBN 978-7-03-021463-8

Ⅰ. 线… Ⅱ. ①方…②侯…③王… Ⅲ. 线性代数-高等学校-教材 Ⅳ. O151. 2

中国版本图书馆CIP数据核字（2008）第039493号

责任编辑：姚莉丽/责任校对：陈玉凤
责任印制：张克忠/封面设计：陈 敬

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

双 青 印 刷 厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2005年8月第 一 版 开本：B5（720×1000）
2008年6月第 二 版 印张：7 1/2
2008年6月第六次印刷 字数：132 000
印数：16 501—26 500

定价：13.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈双青〉）

序

线性代数有着悠久的历史，是数学学科中一门重要的基础课. 它在离散数学、管理科学、经济学、线性规划和计算机科学等学科中有广泛应用，它是大学理工科和经济管理等学科各专业的学生必修的一门十分重要的课程. 现实生活中的许多实际问题都需要用线性代数的方法来解决. 线性代数解决问题的方法千变万化，涉及的领域也十分广泛.

由方小娟、侯仁民、王敏主编的《线性代数简明教程》一书是他们多年教学经验的结晶. 该书以矩阵为中心和主线，首先介绍了矩阵的概念和运算，突出了分块矩阵的作用. 将向量作为一种特殊的矩阵来处理，将行列式放在矩阵的后面. 整个书中充分利用了分块矩阵来处理问题，同时将初等变换的方法贯穿全书，使该书的内容简明扼要，浅显易懂. 在该书的写作过程中作者遵循由浅入深，由易到难，由具体到抽象的原则. 该书从宏观框架到微观处理都凝聚着作者的辛勤劳动和创新思想，使书中内容紧凑，易教易学. 同时又符合线性代数教学大纲的基本要求. 作者对许多内容的处理方法得当，内容安排有特色，使该书成为一本有特色的好的教科书. 它既适用于高等院校理工科各专业大学本科，又可供有关专业人员、工程技术专业工作者以及有兴趣的读者学习和参考.

刘桂真

2004 年 12 月于山东大学

第一版前言

本书是在现有线性代数教科书内容的基础上，根据作者多年教学实践积累的经验，按照新形势下教材改革的精神，在既符合线性代数课程教学基本要求又符合硕士研究生入学考试大纲数学内容要求的前提下编写的一本有特色的简明教程.

全书在内容结构上以矩阵为中心，突出分块矩阵的作用，并以分块矩阵的广义初等变换为基本方法贯穿全书，因此内容显得新颖、简洁、清楚. 在各章的编排上与现有书本有显著不同. 本书首先介绍矩阵，把向量作为一种特殊矩阵处理；把行列式放在后面和方阵结合在一起；而后对于其他内容都利用分块矩阵的方法进行讨论. 这样避免了传统教材中出现的重复，而且定理的证明简单明了.

全书简明扼要、逻辑性强，对所有定理都进行了严密的证明，深入浅出，通俗易懂. 以较少的篇幅将线性代数中基本概念、基本理论和基本方法展示在读者面前. 同时还特别注意本书使用的广泛性，除可作为高等学校的试用教材和教学参考书外，还可作为报考工程、经济、管理等学科硕士研究生入学考试的复习参考书，同时又可供有关专业人员，工程技术专业工作者以及有兴趣的读者学习和参考.

在本书出版之际，谨向给予支持和指导的北京大学方新贵教授和山东大学刘桂真教授及对本书提出过具体意见的所有教师，致以真诚的谢意.

由于作者水平所限，书中难免有错误和不妥之处，恳请广大读者批评指正.

编　者

2005 年 3 月

第二版前言

本书第一版自2005年出版以来，历经了几届师生的教学实践．我们根据在实践中积累的一些经验，并吸取同行们的宝贵意见，将第一版的部分内容进行了修订，作为第二版．

这次修订，在保持第一版特色的基础上，主要进行了以下几个方面的修改工作：

(1) 适当增加和调整了部分例题，使其与相应的内容之间搭配更加合理；

(2) 将分块矩阵的广义初等变换及相关结论放在章末集中介绍，更便于读者掌握分块矩阵在矩阵运算中的优点；

(3) 将第一版中第2章向量空间与第3章行列式调换了顺序，把矩阵的秩与向量组的秩集中放在向量空间一章中介绍，这样密切了它们之间的关系，同时更便于读者掌握矩阵、向量组、行列式之间的内在关联；

(4) 在每节末都增加了能训练学生掌握基本概念和基本技能的习题，每章末附有复习题，以加强读者对基本内容的掌握．

我们希望通过这次修订能使本书在第一版的基础上有所提高，欢迎广大读者继续关心本书和提出宝贵意见．

编　者

2008年1月

目　录

第 1 章　矩阵 ······ 1
1.1　矩阵的概念 ······ 1
1.2　矩阵的运算 ······ 5
1.3　可逆矩阵 ······ 13
1.4　矩阵的初等变换和初等矩阵 ······ 16
复习题一 ······ 21
第 2 章　行列式 ······ 24
2.1　行列式的概念 ······ 24
2.2　n 阶行列式的定义 ······ 26
2.3　行列式的性质 ······ 30
2.4　行列式按行（列）展开定理 ······ 32
2.5　行列式的计算 ······ 36
2.6　再论可逆矩阵 ······ 41
复习题二 ······ 42
第 3 章　向量空间 ······ 44
3.1　向量及其运算 ······ 44
3.2　向量组的线性相关性 ······ 45
3.3　向量组的等价与向量组的秩 ······ 49
3.4　矩阵的秩及其行秩列秩 ······ 53
3.5　向量空间的基 ······ 57
复习题三 ······ 60
第 4 章　线性方程组 ······ 62
4.1　克拉默法则 ······ 62
4.2　线性方程组解的判定定理 ······ 66
4.3　线性方程组解的结构 ······ 68
复习题四 ······ 72
第 5 章　矩阵的特征值和特征向量 ······ 74
5.1　向量的内积和正交化 ······ 74
5.2　矩阵的特征值与特征向量 ······ 77

5.3　相似矩阵 …… 80
5.4　实对称矩阵的对角化 …… 83
复习题五 …… 87
第 6 章　二次型 …… 89
6.1　二次型的概念 …… 89
6.2　化二次型为标准形 …… 91
6.3　正定二次型 …… 94
复习题六 …… 96
习题答案与提示 …… 98
参考文献 …… 108

第1章　矩　　阵

1.1　矩阵的概念

由于线性代数中的许多问题在不同的数集范围内讨论可能会得到不同的结论，为此先引入数域的概念.

定义1.1　设 F 是复数集 $\mathbf{C}$ 的一个子集合，如果 F 中包含 0 和 1，并且 F 中的任意两个数(这两个数也可以相同)的和、差、积、商(除数不为零)仍然是 F 中的数，则称 F 构成一个**数域**.

显然，有理数集 $\mathbf{Q}$、实数集 $\mathbf{R}$、复数集 $\mathbf{C}$ 都是数域. 而整数集 $\mathbf{Z}$ 不构成数域.

定义1.2　如果一个数集 F 中的任意两个数进行某一运算的结果仍在 F 中，则称数集 F 对该运算是封闭的.

因此数域的定义也可以说成：如果一个包含数 0 和 1 的数集 F，对加、减、乘、除(除数不为零)四种运算都是封闭的，则 F 就称为一个数域.

在本书中主要涉及的数域是实数域 $\mathbf{R}$. 若没有特别说明时，各章均在实数域上进行讨论.

定义1.3　由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 m 行 n 列的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为一个 **m 行 n 列矩阵**，简称 $m\times n$ 矩阵，其中 a_{ij} 称为矩阵的第 i 行第 j 列的元素，i 称为行标，j 称为列标. 通常用大写英文字母 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 等表示矩阵. 上述 $m\times n$ 矩阵可简记为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，也可记为 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$. 当元素 a_{ij} 全为实数时，称为实矩阵. $n\times n$矩阵也称为 **n 阶方阵**. 可记作 $\boldsymbol{A}_n$ 或$(a_{ij})_n$.

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n},\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{l\times k}$，如果 $m=l,n=k$(此时称 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为**同型矩阵**)且 $a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ **相等**，记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

也就是说，只有完全相同的两个矩阵才称为相等.

元素都是 0 的矩阵称为**零矩阵**，记作 $\boldsymbol{O}$. 注意，不同型的零矩阵是不相等的.

对于 n 阶方阵，若除从左上角到右下角的直线(叫做主对角线)上的元素外，其他元素全为 0，即形为

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}_{n\times n}$$

的矩阵称为**对角矩阵**，记作 $\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$. 当 $\lambda_1=\cdots=\lambda_n=\lambda$ 时，称 $\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda,\lambda,\cdots,\lambda)$ 为**数量矩阵**. 当 $\lambda=1$ 时，即主对角线上的元素都是 1，其余元素全为 0 的数量矩阵称为 n **阶单位矩阵**，记作 $\boldsymbol{E}_n$，即

$$\boldsymbol{E}_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}.$$

若 n 阶方阵的主对角线上方(或下方)的元素全为零，即形为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n} \quad \left(\text{或 } \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n}\right)$$

的矩阵称为**上三角形矩阵**(或**下三角形矩阵**).

例 1.1.1　某公司给三个连锁店 a_1,a_2,a_3 配送四种商品 b_1,b_2,b_3,b_4 的数量情况，我们可用以下矩阵给出：

$$\begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} \end{array}=\boldsymbol{A}.$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行表示连锁店，而列表示商品. 例如，第 2 行的第三个元素 7，表示给第 2 个连锁店配送的第 3 种商品的数量.

例 1.1.2　四个城市间的单向航线如图 1.1 所示. 若令

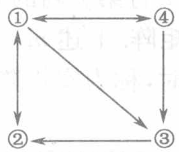

图 1.1

$$a_{ij}=\begin{cases} 1, & i \text{ 市到 } j \text{ 市有一条单向航线}, \\ 0, & i \text{ 市到 } j \text{ 市没有单向航线}, \end{cases}$$

则图 1.1 可用矩阵表示为

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij})=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

例 1.1.3　n 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 与 m 个变量 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 之间的关系式

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ \qquad \cdots\cdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{cases} \tag{1.1}$$

表示一个从变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 到变量 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 的**线性变换**,其中 a_{ij} 为常数,线性变换(1.1)的系数 a_{ij} 构成矩阵

$$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

称 $\boldsymbol{A}$ 为线性变换(1.1)的**系数矩阵**. 而线性变换

$$\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2, \\ \quad \cdots\cdots \\ y_n = x_n \end{cases} \tag{1.2}$$

的系数矩阵是 n 阶单位矩阵 $\boldsymbol{E}$,线性变换(1.2)称为**恒等变换**.

对于矩阵可以进行分块,即把矩阵用若干条纵线和若干条横线分成许多小矩阵,每个小矩阵称为 $\boldsymbol{A}$ 的一个子块. 以子块为元素的矩阵称为**分块矩阵**.

如 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{3\times4}$ 可以分成

$$\boldsymbol{A} = \left(\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right).$$

记 $\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{A}_3=(a_{31} \quad a_{32})$,$\boldsymbol{A}_4=(a_{33} \quad a_{34})$,则有

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 \\ \boldsymbol{A}_3 & \boldsymbol{A}_4 \end{pmatrix}.$$

一个矩阵可以有多种不同的分块方法,上面的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 也可分成

$$\boldsymbol{A} = \left(\begin{array}{c|cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right), \quad \boldsymbol{A} = \left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right), \quad \cdots.$$

例 1.1.4 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,若令 $\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_2 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{E}_2 & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}$ 就是分块

矩阵，其中 $\boldsymbol{E}_2$ 是二阶单位矩阵，$\boldsymbol{O}$ 是二阶零矩阵.

下面给出矩阵的两种常用分块法.

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，把 $\boldsymbol{A}$ 的每一行作为一个子块，可得 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\ \boldsymbol{\beta}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\beta}_m\end{pmatrix}$，其中

$$\boldsymbol{\beta}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})\quad(i=1,\cdots,m),$$

称 $\boldsymbol{\beta}_i$ 为**行矩阵**. 同样，把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每一列作为一个子块，可得 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_j=\begin{pmatrix}a_{1j}\\ a_{2j}\\ \vdots\\ a_{mj}\end{pmatrix}(j=1,\cdots,n)$，称 $\boldsymbol{\alpha}_j$ 为**列矩阵**.

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，若 $\boldsymbol{A}$ 的分块矩阵只有在主对角线上有非零子块，其余子块都为零矩阵，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & & \boldsymbol{O}\\ & \ddots & \\ \boldsymbol{O} & & \boldsymbol{A}_s\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_i(i=1,\cdots,s)$ 为方阵，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**准对角矩阵**(或**分块对角矩阵**).

例 1.1.5 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&0&0&0\\3&0&0&0&0\\0&0&3&0&0\\0&0&0&1&2\\0&0&0&1&1\end{pmatrix}$，令 $\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}2&1\\3&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&1&2\\0&1&1\end{pmatrix}$，则

$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}_2\end{pmatrix}$ 为准对角矩阵.

习 题 1.1

1. 写出下列从变量 x,y 到变量 x_1,y_1 的线性变换的系数矩阵：

(1) $\begin{cases}x_1=x,\\ y_1=0;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x_1=x\cos\varphi-y\sin\varphi,\\ y_1=x\sin\varphi+y\cos\varphi.\end{cases}$

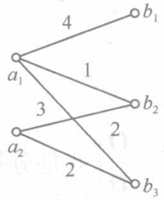

图 1.2

2. (通路矩阵)a 省两个城市 a_1,a_2 和 b 省三个城市 b_1,b_2,b_3 的交通联结情况如图 1.2 所示，每条线上的数字表示联结这两城市的不同通路总数. 试用矩阵形式表示图 1.2 中城市间的通路情况.

3. (对策问题)A，B 两人玩剪子(a)—包袱(b)—锤(c)的游戏，当两人各选定一种出法(也称策略)时就确定了一个"局势". 若规定胜者得 1 分，负者

得-1分,平手各得0分,则对于各种可能的局势,试用赢得矩阵表示A的得分情况.

4. 下列矩阵中能分块成为准对角矩阵的是(　　).

(A) $\begin{pmatrix}2&3&0&0\\1&2&0&0\\1&0&1&0\\0&1&2&3\end{pmatrix}$; (B) $\begin{pmatrix}1&2&0&0\\3&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&2&1\end{pmatrix}$; (C) $\begin{pmatrix}0&0&1&1\\0&0&1&2\\2&1&0&0\\1&3&0&0\end{pmatrix}$; (D) $\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&3&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&4\end{pmatrix}$.

1.2 矩阵的运算

1.2.1 矩阵的加法

定义 1.4 设两个 $m\times n$ 矩阵

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1n}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b_{m1}&b_{m2}&\cdots&b_{mn}\end{pmatrix},$$

则矩阵

$$\boldsymbol{C}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11}&a_{12}+b_{12}&\cdots&a_{1n}+b_{1n}\\a_{21}+b_{21}&a_{22}+b_{22}&\cdots&a_{2n}+b_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}+b_{m1}&a_{m2}+b_{m2}&\cdots&a_{mn}+b_{mn}\end{pmatrix}$$

称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和,记为 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.

矩阵的加法就是两个矩阵的对应元素相加,因此只有两个同型矩阵才能进行加法运算.

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$,矩阵 $(-a_{ij})_{m\times n}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的**负矩阵**,记作 $-\boldsymbol{A}$. 由此即可定义矩阵的减法运算:

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B}).$$

矩阵的加法满足以下运算规律(设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{O}$ 都是 $m\times n$ 矩阵):

(1) 结合律 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$;

(2) 交换律 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$;

(3) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$;

(4) $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$.

例 1.2.1 在例 1.1.1 中,若有另一个公司给这三个连锁店也配送了同样的四种商品,数量情况用矩阵表示为

$$\begin{array}{c|cccc} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ \hline a_1 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ a_2 & 2 & 1 & 0 & 5 \\ a_3 & 4 & 2 & 1 & 1 \end{array} = \boldsymbol{B},$$

那么这三个连锁店所得到的四种商品的总数用矩阵表示就是 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和,即

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}4&2&1&5\\3&5&7&2\\5&2&6&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&3&2&4\\2&1&0&5\\4&2&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&5&3&9\\5&6&7&7\\9&4&7&5\end{pmatrix}.$$

1.2.2 数乘矩阵

定义 1.5 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$,数 λ 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的乘积是一个矩阵,记作 $\lambda\boldsymbol{A}$,定义为 $\lambda\boldsymbol{A}=(\lambda a_{ij})_{m\times n}$,即

$$\lambda\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda a_{11}&\cdots&\lambda a_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ \lambda a_{m1}&\cdots&\lambda a_{mn}\end{pmatrix}.$$

数乘矩阵适合以下运算规律($\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同型矩阵,k,l 为数):

(1) $(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$;

(2) $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$;

(3) $k(l\boldsymbol{A})=(kl)\boldsymbol{A}$;

(4) $1\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$.

数量矩阵 $\begin{pmatrix}k&0&\cdots&0\\0&k&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&k\end{pmatrix}$ 也可写为 $k\boldsymbol{E}$.

例 1.2.2 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&2\\-1&3&5\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&1&2\\1&-1&3\end{pmatrix}$,计算 $3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}$.

解

$$\begin{aligned}3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}&=3\begin{pmatrix}1&0&2\\-1&3&5\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}2&1&2\\1&-1&3\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}3&0&6\\-3&9&15\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4&2&4\\2&-2&6\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-1&-2&2\\-5&11&9\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

1.2.3 矩阵的乘法

我们先看一个引出矩阵乘法的问题.

设有两个线性变换

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3, \\ x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3, \\ x_3 = a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 \end{cases} \tag{2.1}$$

和

$$\begin{cases} y_1 = b_{11}z_1 + b_{12}z_2, \\ y_2 = b_{21}z_1 + b_{22}z_2, \\ y_3 = b_{31}z_1 + b_{32}z_2, \end{cases} \tag{2.2}$$

不难得出从 z_1, z_2 到 x_1, x_2, x_3 的线性变换为

$$\begin{cases} x_1 = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31})z_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32})z_2, \\ x_2 = (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31})z_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32})z_2, \\ x_3 = (a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31})z_1 + (a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32})z_2. \end{cases} \tag{2.3}$$

将(2.1)、(2.2)的系数矩阵分别记为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{3\times 3}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{3\times 2}$，那么，线性变换(2.3)的系数矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{3\times 2}$ 与 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的关系为

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} \quad (i=1,2,3; j=1,2).$$

我们将矩阵 $\boldsymbol{C}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积.

定义 1.6 设 $1\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}_1=(a_1,\cdots,a_n)$，$n\times 1$ 矩阵 $\boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$，则 $a_1b_1+\cdots+a_nb_n$ 称为 $\boldsymbol{A}_1$ 与 $\boldsymbol{B}_1$ 的乘积，记为 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1$，即 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1=a_1b_1+\cdots+a_nb_n$.

对于两个矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$，将 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分别按行和列分块，即

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}_m \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{B}_1, \cdots, \boldsymbol{B}_n),$$

则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积定义为

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1 & \cdots & \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_n \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_m\boldsymbol{B}_1 & \cdots & \boldsymbol{A}_m\boldsymbol{B}_n \end{pmatrix}.$$

根据定义可以看出，当且仅当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列数等于矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行数时，乘积 $\boldsymbol{AB}$ 才有意义.

例 1.2.3 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 3}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 2}$，计算 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$.

解 $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix} 1\cdot 0+0\cdot 1+2\cdot 0 & 1\cdot 1+0\cdot 0+2\cdot 1 \\ 1\cdot 0+1\cdot 1+1\cdot 0 & 1\cdot 1+1\cdot 0+1\cdot 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}_{2\times 2}$，

$$BA=\begin{pmatrix}0\cdot 1+1\cdot 1 & 0\cdot 0+1\cdot 1 & 0\cdot 2+1\cdot 1\\ 1\cdot 1+0\cdot 1 & 1\cdot 0+0\cdot 1 & 1\cdot 2+0\cdot 1\\ 0\cdot 1+1\cdot 1 & 0\cdot 0+1\cdot 1 & 0\cdot 2+1\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&2\\1&1&1\end{pmatrix}_{3\times 3}.$$

矩阵的乘法满足以下运算规律(假设运算都有意义)：

(1) 结合律　$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})=(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$;

(2) 分配律　$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$,　$(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}$;

(3) $\lambda(\boldsymbol{AB})=(\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{B})$,$\lambda$ 为数；

(4) $\boldsymbol{EA}=\boldsymbol{AE}=\boldsymbol{A},\boldsymbol{OA}=\boldsymbol{O},\boldsymbol{AO}=\boldsymbol{O}$.

应当注意矩阵乘法不满足交换律，即 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 不一定相等(如例 1.2.3).

在例 1.1.3 中的线性变换(1.1),利用矩阵的乘法可记作：

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX},$$

其中 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$,$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix}$.

例 1.2.4　设有两个线性变换

$$\begin{cases}x_1=2y_1-y_2,\\ x_2=y_1+4y_2\end{cases}\quad 和\quad \begin{cases}y_1=z_1+2z_2-z_3,\\ y_2=2z_1-3z_2+2z_3,\end{cases}$$

利用矩阵乘法求从变量 z_1,z_2,z_3 到变量 x_1,x_2 的线性变换.

解　所给两个线性变换用矩阵形式表示为

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{AY}\quad 和\quad \boldsymbol{Y}=\boldsymbol{BZ},$$

其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1\\1&4\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&-3&2\end{pmatrix}$. 于是

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BZ})=(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{Z}.$$

由于

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}2&-1\\1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&-3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&7&-4\\9&-10&7\end{pmatrix},$$

因此所求线性变换为

$$\begin{cases}x_1=7z_2-4z_3,\\ x_2=9z_1-10z_2+7z_3.\end{cases}$$

有了矩阵的乘法就可以定义矩阵幂的运算. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，定义 $\boldsymbol{A}$ 的幂如下：

$$\boldsymbol{A}^1=\boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{AA},\quad \boldsymbol{A}^{k+1}=\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}=\cdots=\underbrace{\boldsymbol{A}\cdots\boldsymbol{A}}_{k+1个}\quad (k\text{ 为正整数}).$$

特别地，对于单位矩阵 $\boldsymbol{E}$,有 $\boldsymbol{E}^k=\boldsymbol{E}$,$(a\boldsymbol{E})(b\boldsymbol{E})=(ab)\boldsymbol{E}$($a,b$ 为实数).

矩阵的幂运算满足：

$$A^kA^l = A^{k+l}, \quad (A^k)^l = A^{kl} \quad (l,k \text{ 为正整数}).$$

但$(AB)^k$与A^kB^k不一定相等.

例 1.2.5 在例 1.1.2 中,四个城市之间的单向航线情况表示为矩阵

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\end{pmatrix}, \quad \text{则有 } A^2=\begin{pmatrix}2&1&1&0\\0&1&1&1\\1&0&0&0\\0&2&1&1\end{pmatrix}.$$

若记$A^2=(b_{ij})$,则b_{ij}表示从i市经一次中转到j市的单向航线条数.例如,$b_{23}=1$表示从②市经一次中转到③市的单向航线有 1 条(②→①→③);$b_{42}=2$表示从④市经一次中转到②市的单向航线有 2 条(④→①→②;④→③→②).

例 1.2.6 证明

$$\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\cos n\varphi & -\sin n\varphi\\ \sin n\varphi & \cos n\varphi\end{pmatrix}.$$

证明 用数学归纳法.当$n=1$时,等式显然成立.设$n=k$时成立,即

$$\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix}\cos k\varphi & -\sin k\varphi\\ \sin k\varphi & \cos k\varphi\end{pmatrix}.$$

当$n=k+1$时,因为

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}^{k+1}&=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}^k\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\cos k\varphi & -\sin k\varphi\\ \sin k\varphi & \cos k\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\cos k\varphi\cos\varphi-\sin k\varphi\sin\varphi & -\cos k\varphi\sin\varphi-\sin k\varphi\cos\varphi\\ \sin k\varphi\cos\varphi+\cos k\varphi\sin\varphi & -\sin k\varphi\sin\varphi+\cos k\varphi\cos\varphi\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\cos(k+1)\varphi & -\sin(k+1)\varphi\\ \sin(k+1)\varphi & \cos(k+1)\varphi\end{pmatrix},\end{aligned}$$

所以等式成立. 证毕.

例 1.2.7 某企业为促进技术进步,对职工分批脱产轮训.若现有不脱产职工 8000 人,脱产参加轮训的 2000 人.而计划每年从现在不脱产的那些人员中抽调 30%的人参加轮训,而在轮训队伍中让 60%的人结业回到工作岗位去.若职工总人数不变,则一年后不脱产职工及脱产职工各有多少?两年后又怎样?

解 根据题意先写出矩阵

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.7 & 0.6\\ 0.3 & 0.4\end{pmatrix},$$

a_{11}为原生产人员中留下继续生产的百分比,a_{21}为原生产人员中调去参加轮训的百分比,a_{12}为原轮训人员中回到生产中的百分比,a_{22}为轮训人员中留下继续轮训的