现代数学
·专著版·

平面弹性周期问题概论

路见可 蔡海涛 著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

现代数学

平面弹性周期问题概论

路见可　蔡海涛　著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

平面弹性周期问题概论/路见可,蔡海涛著. —武汉: 武汉大学出版社,2008.6

现代数学专著版

ISBN 978-7-307-06145-3

Ⅰ.平…　Ⅱ.①路…　②蔡…　Ⅲ.弹性理论　Ⅳ.O343

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 016225 号

责任编辑:顾素萍　　责任校对:黄添生　　版式设计:詹锦玲

出版发行: **武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)

(电子邮件: wdp4@ whu. edu. cn　网址: www. wdp. com. cn)

印刷:湖北民政印刷厂

开本:720 × 1000　1/16　　印张:10.25　字数:145 千字　插页:1

版次:2008 年 6 月第 1 版　　2008 年 6 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-307-06145-3/O · 381　　定价:17.00 元

内容提要

本书主要论述各向同性与各向异性平面弹性理论的一些周期问题，其中包括周期第一基本问题、周期第二基本问题、周期混合问题、周期接触问题，以及周期裂纹问题等；同时，也论及了某些周期运动载荷问题．此外，还扼要论述了平面弹性的双周期问题；在附录中，还介绍了循环周期问题．所应用的主要数学工具是复变函数论与奇异积分方程．本书内容是作者们从20世纪60年代以来在这方面的工作成果．

本书可供应用数学与力学工作者、工程技术人员以及有关专业的教师参考，同时可作为高年级大学生和研究生用的教材或教学参考书．

序

弹性理论中周期问题的研究，在固体力学和断裂理论中占有重要地位；在实际工程设计中，这些研究也很重要. 关于平面弹性的周期问题，用复变函数论作为研究的数学工具，非常有效，极其完美. 我们曾撰写了《平面弹性理论的周期问题》一书(1986 年由湖南科学技术出版社出版)，但市面上早已售罄. 因此我们决定将其改写面世，以飨读者. 在改写中，我们删减了一些材料，改进了某些论述，使之更为紧凑和准确. 原书只讨论了单周期问题. 在这次改写中，我们增加了有关双周期问题的论述；并为完整起见，还在附录中，对循环周期问题作了简单的介绍. 值得指出的是，书中所得到的解答都给出了封闭形式，这在实际应用和具体计算时特别方便.

全书共分六章. 第一章对解析函数的周期边值问题作了细致的论述，这是全书论证的数学基础. 第二章讨论了各向同性平面弹性理论的各种周期问题. 第三章推广了第二章的理论与方法，讨论了各向异性平面弹性的各种周期问题. 第四章讨论了各向同性弹性半平面边界上具有周期运动载荷的动态平衡问题. 第五章就各向同性和各向异性弹性平面的周期裂纹问题作了较详细的论述. 第六章扼要论述了双周期的平面弹性问题. 最后在附录中还简要介绍了平面弹性的循环周期问题.

虽然我们在写作中尽了极大努力，但书中不妥和错误之处仍在所难免，尚祈广大读者不吝指正.

路见可　蔡海涛

2008 年 3 月

目　录

第一章 解析函数的周期边值问题

为讨论平面弹性理论的周期问题提供数学工具，需要讨论解析函数的周期边值问题. 后者在路见可[6]中已有详尽的论述. 为了本书的需要，本章将只复述其中两种周期边值问题，即周期 Riemann 边值问题与关于半平面的周期 Riemann-Hilbert 边值问题. 上述周期边值问题的更一般形式是自守函数的边值问题，曾为Ф. Д. Гахов与Л. И. Чибрикова所研究. 从实用观点看，周期边值问题将更为重要. 本章和以后各章所论及的周期问题，是实际中常遇见的单周期问题.

本章 1.1，1.2 节考虑周期 Riemann 问题，这里是使用保角变换的方法；1.3 节考虑关于半平面的周期 Riemann-Hilbert 问题，在讨论中直接应用了推广的 Plemelj 公式.

1.1 周期 Riemann 边值问题，封闭曲线情况

1.1.1 问题的提法

设 $L_k(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 为无穷个封闭的光滑曲线，它们彼此形状相同，互不相交，且以 $a\pi$ 为周期水平地排列($a>0$)，如图 1.1 所示①.

取各 L_k 的反时针向为正向，其内域记作 S_k^+，而 $L=\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}L_k$ 的外域记作 S^-. 不妨选择原点 O 在 S_0^+ 内，且使 $\pm\dfrac{1}{2}a\pi,\pm\dfrac{3}{2}a\pi,\cdots$ 都在 S^- 内. 这是可

① 以下为行文简便起见，只假定 L_k 是一个封闭曲线；实际上，如 L_k 是一组有限个封闭曲线时，以下的讨论只要略加修改，仍成立. 又若 L_0 是联结 $\pm\dfrac{1}{2}a\pi+\mathrm{i}y_0$ 的任一光滑弧段时，本节所论作适当修正后，也完全成立.

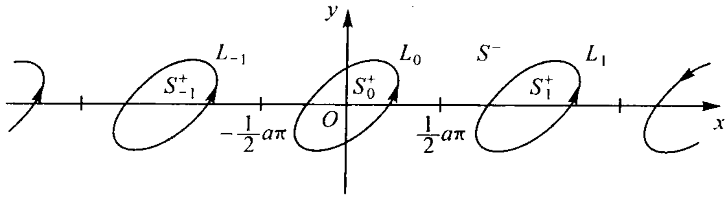

图 1.1

能的，必要时将坐标轴作适当平移即可.

周期 Riemann 边值问题(简称问题 P_1)提法如下：要求一以 $a\pi$ 为周期的、在全平面中分片全纯的函数 $\Phi(z)$ (在 S_k^+，$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 和 S^- 内全纯)，使

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t)+g(t),\quad t\in L, \tag{1.1}$$

其中 $G(t),g(t)$ 已给在 L 上，均 $\in H$ (即满足 Hölder 条件)，并且 $G(t)\neq 0$ (正则型)，此外，它们都以 $a\pi$ 为周期：

$$G(t+a\pi)=G(t),\quad g(t+a\pi)=g(t),\quad t\in L;$$

而 $\Phi^{\pm}(t)$ 分别表示 $\Phi(z)$ 当 z 从 L 的正(左)侧和负(右)侧趋于 L 上的 t 点时的边值(即极限值).

这里，一函数 $f(t)\in H$ (Hölder 连续) 于 L 上是指 $f(t)$ 满足

$$|f(t)-f(t')|\leqslant A|t-t'|^{\mu},\quad \forall t,t'\in L,$$

其中 A,μ 为正常数，且 $0<\mu\leqslant 1$.

注意，∞ 点是各曲线 L_k 的聚点，故上述问题的解(如果存在) 在 $z=\infty$ 处一般不能有确定的极限. 但是当 $z=\pm\infty\mathrm{i}$ (指 $z=x+\mathrm{i}y$，其中 x 任意，$y\to\pm\infty$) 时，可以对 $\Phi(z)$ 提出一定的要求. 这种补充的要求可以是各种各样的；但在本书中，恒只要求 $\Phi(\pm\infty\mathrm{i})$ 有界(亦即有限).

当 $g(t)\equiv 0$ 时，问题称为齐次的，记作 P_1^0；否则，称为非齐次的.

在问题中，我们已要求解 $\Phi(z)$ 也以 $a\pi$ 为周期；这从解决实际问题的观点来看，是合适的. 但注意这一要求不能认为是问题的必然结果. 因为，例如，对于齐次问题 P_1^0 而言，若 $\Phi_1(z)$ 是它的一个非零周期解，则 $\Phi_1(z)I(z)$ 也是它的解. 其中 $I(z)$ 为任何整函数，这个解就不一定以 $a\pi$ 为周期了. 而且也容易证明，任何非周期解一定是上述形式. 以后所称的解都是指周期解，以 $a\pi$ 为周期.

1.1.2　转化为经典 Riemann 边值问题

作带形 S_0：$|\mathrm{Re}\,z|<\frac{1}{2}a\pi$. 暂设 L_0 全在 S_0 中. 记 $S_0^-=S^-\cdot S_0$，并在直线 $z=\pm\frac{1}{2}a\pi$ 上取定正向使 S_0^- 在其右侧(图 1.2). 如 $\Phi(z)$ 为原问题的解，其在 $S_0=S_0^++S_0^-$ 中的部分记作 $\Phi_0(z)$，则 $\Phi_0(z)$ 是 S_0 中分片全纯的函数，连续到 $x=\pm\frac{1}{2}a\pi$ 上，且满足条件

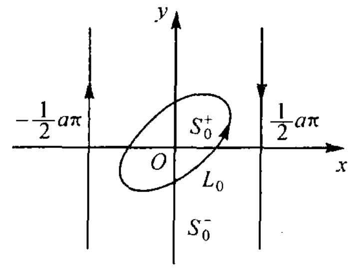

图 1.2

$$\Phi_0^+(t)=G(t)\Phi_0^-(t)+g(t),\quad t\in L_0; \tag{1.2}$$

$$\Phi_0\left(\frac{1}{2}a\pi+\mathrm{i}y\right)=\Phi_0\left(-\frac{1}{2}a\pi+\mathrm{i}y\right),\quad |y|<+\infty. \tag{1.3}$$

反之，如 $\Phi_0(z)$ 为 S_0 中满足(1.2)和(1.3)的一个分片全纯函数，连续到 $z=\pm\frac{1}{2}a\pi$ 上者，则把它作 $a\pi$ 的周期性延拓后，便得原问题的一个解 $\Phi(z)$.

于是，问题 P_1 就转变为求 S_0 中分片全纯的函数 $\Phi_0(z)$，连续到 $x=\pm\frac{1}{2}a\pi$ 上，使满足条件(1.2) 和(1.3). 把这一问题记作 R_1.

注意，可能 L_0 部分地越出带形 $|\mathrm{Re}\,z|<\frac{1}{2}a\pi$ (图 1.3). 这时，我们只要把它略加修改，即用二周期合同的 Jordan 弧段代替 $x=\pm\frac{1}{2}a\pi$ 上的二直线段，使 S_0^+ 整个落在这样所得出的弯曲带形 S_0 中；不妨假定仍旧保持 $z=\pm\frac{1}{2}a\pi$ 二点在 S_0 的边界上. 仍旧记 $S_0^-=S_0-S_0^+$. 用函数

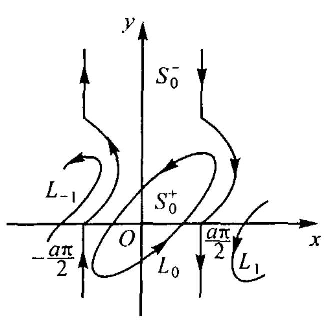

图 1.3

$$\zeta=\tan\frac{z}{a} \tag{1.4}$$

把带形 S_0 映射到 ζ 平面中的区域 Σ_0. 在图 1.2 的情况下，它是由整个 ζ 平面沿着虚轴在区间$[-\mathrm{i},\mathrm{i}]$之外剖开而成的，且 $z=0,\pm\frac{1}{2}a\pi,+\infty\mathrm{i},-\infty\mathrm{i}$ 分别

变为 $\zeta=0,\infty,\mathrm{i},-\mathrm{i}$，而直线 $x=\pm\frac{1}{2}a\pi$ 变成了剖线的左、右岸. 这时，L_0 变成某一光滑曲线 Γ_0，它围住原点 O，但 $\zeta=\pm\mathrm{i}$ 则在其外，且不与剖线相交(图 1.4). 在图 1.3 的情况下，则剖线的形状有所改变，但 Γ_0 仍不穿过剖线，且也具有上述的一些其它性质(图 1.5). Γ_0 的内域记作 Σ_0^+，外域记作 Σ_0^-.

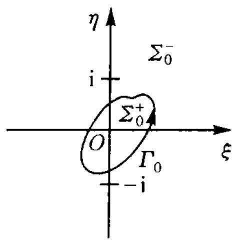

图 1.4

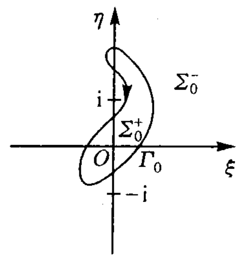

图 1.5

记 $\Phi_0(z)$ 经变换后成为 $\Phi_*(\zeta)$，由条件(1.3)可知，它在剖线两侧有相同极限值. 故知 $\Phi_*(\zeta)$ 是 ζ 平面中的分片全纯函数(在 $\zeta=\infty$ 处有界!)，且满足条件

$$\Phi_*^+(\tau)=G_*(\tau)\Phi_*^-(\tau)+g_*(\tau),\quad \tau\in\Gamma_0,\tag{1.5}$$

其中 $G_*(\tau),g_*(\tau)$ 分别为 $G(t),g(t)$ 变换后的结果，它们仍都 $\in H$，且 $G_*(\tau)\neq 0$. 于是问题化为了经典的Riemann问题. 但要注意，$\zeta=\pm\mathrm{i}$ 现在一般是 $\Phi_*(\zeta)$ 的孤立奇点.

我们称

$$\mathrm{Ind}_{L_0}G(t)=\frac{1}{2\pi}[\arg G(t)]_{L_0}=k\tag{1.6}$$

为原问题 P_1 的**指标**，这里(以及以后) $[f(t)]_{L_0}$ 表示当 t 沿 L_0 正向环行一周时函数 $f(t)$ 的改变量. 显然它就是转化后 Riemann 问题的指标：

$$\mathrm{Ind}_{\Gamma_0}G_*(\tau)=\mathrm{Ind}_{L_0}G(t)=k.$$

1.1.3　齐次问题 P_1^0 的讨论

这时，$g(t)\equiv 0$，于是 $g_*(\tau)\equiv 0$. 分几种情况讨论.

我们已要求 $\Phi(\pm\infty\mathrm{i})$ 有界，这是要求 $\Phi_*(\zeta)$ 在 $\zeta=\pm\mathrm{i}$ 处也有界，即正则，这时问题(1.5)的一般解为

$$\Phi_*(\zeta)=X_*(\zeta)P_k(\zeta),\tag{1.7}$$

其中

$$X_*(\zeta)=\begin{cases}X_*^+(\zeta)=e^{\Gamma_*(\zeta)}, & \zeta\in\Sigma_0^+,\\ X_*^-(\zeta)=\zeta^{-k}e^{\Gamma_*(\zeta)}, & \zeta\in\Sigma_0^-.\end{cases}\tag{1.8}$$

这里

$$\Gamma_*(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0}\frac{\log\tau^{-k}G_*(\tau)}{\tau-\zeta}d\tau,\tag{1.9}$$

而 $P_k(\zeta)$ 是 k 次任意多项式（$k<0$ 时，认为 $P_k(\zeta)\equiv 0$）.

回到 z 平面，则有

$$\Phi_0(z)=X_0(z)P_k\left(\tan\frac{z}{a}\right),\tag{1.10}$$

这里

$$X_0(z)=\begin{cases}X_0^+(z)=e^{\Gamma(z)}, & z\in S_0^+,\\ X_0^-(z)=\cot^k\dfrac{z}{a}\,e^{\Gamma(z)}, & z\in S_0^-,\end{cases}\tag{1.11}$$

而

$$\begin{aligned}\Gamma(z)&=\frac{1}{2a\pi i}\int_{L_0}\frac{\log\left(\cot^k\frac{t}{a}\,G(t)\right)}{\tan\frac{t}{a}-\tan\frac{z}{a}}\,\frac{dt}{\cos^2\frac{t}{a}}\\ &=\frac{1}{2a\pi i}\int_{L_0}\log\left(\cot^k\frac{t}{a}\,G(t)\right)\left(\cot\frac{t-z}{a}+\tan\frac{t}{a}\right)dt\\ &=\frac{1}{2a\pi i}\int_{L_0}\log\left(\cot^k\frac{t}{a}\,G(t)\right)\cot\frac{t-z}{a}\,dt+C.\end{aligned}$$

把常数 C 并入 P_k 中，因此可以认为

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2a\pi i}\int_{L_0}\log\left(\cot^k\frac{t}{a}\,G(t)\right)\cot\frac{t-z}{a}\,dt,\tag{1.12}$$

其中对数可以任意取定一支.

如将 $\Phi_0(z)$ 作周期 $a\pi$ 的延拓，并注意到(1.10) ~ (1.12) 诸分析式中所出现的函数均为以 $a\pi$ 为周期，故不加改变，立即得到原问题 P_1^0 的一般解：

$$\Phi(z)=X(z)P_k\left(\tan\frac{z}{a}\right);\tag*{(1.10)$'$}$$

$$X(z)=\begin{cases}X^+(z)=e^{\Gamma(z)}, & z\in S^+,\\ X^-(z)=\cot^k\dfrac{z}{a}\,e^{\Gamma(z)}, & z\in S^-,\end{cases}\tag*{(1.11)$'$}$$

而 $\Gamma(z)$ 仍以(1.12)式给出. $X(z)$ 仍称为问题 P_1 的**典则函数**. 这个一般解还可写成

$$\Phi(z)=\begin{cases}\Phi^+(z)=\dfrac{1}{\cos^k\dfrac{z}{a}}e^{\Gamma(z)}Q_k\left(\sin\dfrac{z}{a},\cos\dfrac{z}{a}\right), & z\in S^+,\\ \Phi^-(z)=\dfrac{1}{\sin^k\dfrac{z}{a}}e^{\Gamma(z)}Q_k\left(\sin\dfrac{z}{a},\cos\dfrac{z}{a}\right), & z\in S^-,\end{cases}\tag{1.13}$$

其中 $Q_k(X,Y)$ 是 X,Y 的任意 k 次齐次多项式($k<0$ 时，$Q_k\equiv 0$).

因此，我们得到

定理 1.1 (Чибрикова) *如要求 $\Phi(\pm\infty i)$ 有界，则齐次周期问题 P_1^0 当指标 $k\geqslant 0$ 时，问题有 $k+1$ 个线性无关解；当 $k<0$ 时，问题只有零解.*

附带指出，因为

$$\cos^{n-j}z\ \sin^j z=\sum_{\lambda=0}^{n}C_{nj}(\lambda)e^{i(n-2\lambda)z},$$

其中 $C_{nj}(\lambda)$ 为某些常数，故知：当 $k=2m$ 为偶数时，还可写

$$Q_{2m}\left(\sin\frac{z}{a},\cos\frac{z}{a}\right)=\alpha_0+\sum_{j=1}^{m}\left(\alpha_j\cos\frac{2jz}{a}+\beta_j\sin\frac{2jz}{a}\right);\tag{1.14}$$

当 $k=2m+1$ 为奇数时，还可写

$$Q_{2m+1}\left(\sin\frac{z}{a},\cos\frac{z}{a}\right)=\sum_{j=0}^{m}\left(\alpha_j\cos\frac{(2j+1)z}{a}+\beta_j\sin\frac{(2j+1)z}{a}\right).\tag{1.14$'$}$$

因此，在一般解(1.13)中，也可把 Q_k 写成上述形式的任意三角多项式. □

1.1.4 非齐次问题 P_1 的讨论

我们将反复应用下面的重要公式：

推广的 Plemelj 公式 *如果 $g(t)\in H$，以 $a\pi$ 为周期，而*

$$\Psi(z)=\frac{1}{2a\pi i}\int_{L_0}g(t)\cot\frac{t-z}{a}\,dt,$$

则

$$\Psi^{\pm}(t_0)=\pm\frac{1}{2}g(t_0)+\frac{1}{2a\pi i}\int_{L_0}g(t)\cot\frac{t-t_0}{a}\,dt,\quad t_0\in L,\tag{1.15}$$

其中右端的积分要理解为 Cauchy 主值积分，称为含 Hilbert 核的积分.

为了证明其成立，只要将 $\cot\dfrac{t-t_0}{a}$ 在 $t=t_0$ 点处的主部 $\dfrac{a}{t-t_0}$ 分离出来，

然后应用熟知的 Plemelj 公式(见 Мусхелишвили [1] 或路见可[6]) 即可.

现在来讨论非齐次问题 P_1(1.1).

这时 $g(t)\not\equiv 0$，从而 $g_*(\tau)\not\equiv 0$.

当 $k\geqslant -1$ 时，问题(1.5) 的一般解为

$$\Phi_*(\zeta)=X_*(\zeta)(\Psi_*(\zeta)+P_k(\zeta)),$$

其中

$$\Psi_*(\zeta)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\Gamma_0}\frac{g_*(\tau)}{X_*^+(\tau)}\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau-\zeta};$$

当 $k<-1$ 时，当且仅当满足 $-k-1$ 个条件

$$\int_{\Gamma_0}\frac{g_*(\tau)}{X_*^+(\tau)}\tau^{j-1}\mathrm{d}\tau=0,\quad j=1,2,\cdots,-k-1$$

时才有唯一解.

回到 z 平面，当 $k\geqslant -1$ 时，问题 P_1 的一般解为

$$\Phi(z)=X(z)\left(\Psi(z)+P_k\left(\tan\frac{z}{a}\right)\right),\tag{1.16}$$

其中

$$\Psi(z)=\frac{1}{2a\pi \mathrm{i}}\int_{L_0}\frac{g(t)}{X^+(t)}\left(\cot\frac{t-z}{a}+\tan\frac{t}{a}\right)\mathrm{d}t.\tag{1.17}$$

当 $k\geqslant 0$ 时，可把上式右端括号中后一项略去，并入 P_k 的常数项中，而有

$$\Psi(z)=\frac{1}{2a\pi \mathrm{i}}\int_{L_0}\frac{g(t)}{X^+(t)}\cot\frac{t-z}{a}\,\mathrm{d}t;\tag{1.17$'$}$$

但当 $k=-1$ 时，此项不能略去，以保证当 $z=\pm\frac{1}{2}a\pi$ 时 $X(z)\Psi(z)$ 有界. 当 $k<-1$ 时，当且仅当满足 $-k-1$ 个条件

$$\int_{L_0}\frac{g(t)\sin^{j-1}\dfrac{t}{a}}{X^+(t)\cos^{j+1}\dfrac{t}{a}}\mathrm{d}t=0,\quad j=1,2,\cdots,-k-1\tag{1.18}$$

时有唯一解(1.16)，这时 $P_k\equiv 0$—— 且这时 $\Psi(z)$ 必须以(1.17) (而不能由(1.17)$'$) 给出.

这样，我们得到

定理 1.2 (Чибрикова)　如要求 $\Phi(\pm\infty \mathrm{i})$ 有界，则非齐次问题 P_1 当 $k\geqslant -1$ 时，问题的一般解中含 $k+1$ 个任意常数；当 $k<-1$ 时，当且仅当满足 $-k-1$ 个条件(1.18) 时有唯一解.

1.1.5 一个特例

考虑 $G(t)\equiv K$ 为一常数($\neq 0$) 的特殊情形，这在应用中常见.

这时，指标 $k=0$，于是

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2a\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}\log K\cot\frac{t-z}{a}\,\mathrm{d}t=\frac{\log K}{2\pi\mathrm{i}}\left[\log\sin\frac{t-z}{a}\right]_{L_0}$$
$$=\begin{cases}\log K, & z\in S^+,\\ 0, & z\in S^-.\end{cases}$$

因此，$X^+(z)=K$，$X^-(z)=1$. 所以，使 $\Phi(\pm\infty\mathrm{i})$ 有界的一般解是

$$\Phi(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2a\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_{L_0}g(t)\cot\frac{t-z}{a}\,\mathrm{d}t+C, & z\in S^+,\\ \dfrac{1}{K}\left(\dfrac{1}{2a\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_{L_0}g(t)\cot\frac{t-z}{a}\,\mathrm{d}t+C\right), & z\in S^-.\end{cases}\tag{1.19}$$

这直接由推广的 Plemelj 公式也可验证.

1.2 周期 Riemann 边值问题，开口弧段和间断系数情况

1.2.1 开口弧段的情况

这里，考虑 L_0 是由 p 个开口光滑弧段$\widehat{a_rb_r}$($r=1,2,\cdots,p$) 构成的情况，而 $G(t),g(t)$ 在每一弧段上连端点在内均 $\in H$，且 $G(t)\neq 0$. 每一弧段设以 a_r 为起点，b_r 为终点，而构成正向.

把 a_r,b_r 统一记作 $c_1,c_2,\cdots,c_{2p}$，和经典情况一样，可以把它们分成如下两类：在每一$\widehat{a_rb_r}$ 上，任取 $\log G(t)$ 的一支，设

$$\mp\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\log G(c_j)=\alpha_j+\mathrm{i}\beta_j,\quad j=1,2,\cdots,2p.$$

这里，当 $c_j=a_r$ 时，左边取负号，当 $c_j=b_r$ 时，取正号. 如 α_j 为一整数，则称 c_j 为一**特殊端**；如 α_j 不是整数，则称 c_j 为平常端. 记所有平常端为 c_1，$c_2,\cdots,c_m$，特殊端为 $c_{m+1},c_{m+2},\cdots,c_{2p}$.

我们要求(1.1) 的分片全纯周期解，使在平常端 $c_1,c_2,\cdots,c_q$($q\leqslant m$) 附近保持有界，而在其余端点附近，至少无界可积. 把这种解仍称作属于 $h_q=h(c_1,c_2,\cdots,c_q)$ 类. 和经典情况一样，可以证明，这样的解如存在，它在特殊

端附近必几乎有界：

$$\lim_{z\to c_j}(z-c_j)^{\varepsilon}\Phi(z)=0\quad(j>m),$$

ε 为任意小正数．如果解在所有端点附近有界，则称它属于 h_0 类．

定义问题(1.1)的指标如下．对于特殊端 c_j，令 $\lambda_j=-\alpha_j$；对于平常端 c_j，当 $j\leqslant q$ 时，选取整数 λ_j 使 $0<\alpha_j+\lambda_j<1$，当 $j>q$ 时，使 $-1<\alpha_j+\lambda_j<0$，称

$$k=-\sum_{j=1}^{2p}\lambda_j \tag{1.20}$$

为问题(1.1) **关于类 h_q 的指标．**

仍用(1.4)变换到 ζ 平面，问题就转化为(1.5)．因为 L_0 都不经过(1.4)的奇点，所以 $G_*(\tau),g_*(\tau)$ 在 Γ_0 上仍保有原来的性质，且各端点的类型也不变．因此，求原问题(1.1)在类 $h(c_1,c_2,\cdots,c_q)$ 中的解，就变成求(1.5)在类 $h(c_1^*,c_2^*,\cdots,c_q^*)$ 中的解，这里

$$c_j^*=\tan\frac{c_j}{a}\quad(j=1,2,\cdots,2p),$$

但在 $\zeta=\pm\mathrm{i}$ 处仍保留有任意性，而 $\Phi_*(\infty)$ 则必须有界．

现在来讨论齐次问题 P_1^0．

我们知道，齐次问题(1.5) ($g_*(\tau)\equiv0$) 的解，在特殊端附近，必定有界；在平常端附近，如有界，则必为零(见路见可[6])．显然，齐次问题 P_1^0 的解也有类似性质．

这时问题(1.5)在 h_q 类中的一般解为

$$\Phi_*(\zeta)=X_*(\zeta)P_k(\zeta).$$

其中 $X_*(\zeta)=\Pi_*(\zeta)\mathrm{e}^{\Gamma_*(\zeta)}$，而

$$\Pi_*(\zeta)=\prod_{j=1}^{2p}(\zeta-c_j^*)^{\lambda_j},\quad \Gamma_*(\zeta)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma_0}\frac{\log G_*(\tau)}{\tau-\zeta}\mathrm{d}\tau.$$

回到 z 平面，得(1.1)在 h_q 类中的一般解为

$$\Phi(z)=X(z)P_k\left(\tan\frac{z}{a}\right), \tag{1.21}$$

其中典则函数

$$X(z)=\Pi(z)\mathrm{e}^{\Gamma(z)}, \tag{1.22}$$

而

$$\Pi(z)=\prod_{j=1}^{2p}\left(\tan\frac{z}{a}-\tan\frac{c_j}{a}\right)^{\lambda_j}, \tag{1.23}$$