国家工科数学课程教学基地建设系列教材

线性代数

华南理工大学数学科学学院

方卫东　吴洪武　编

华南理工大学出版社

线性代数

国家工科数学课程教学基地建设系列教材

线 性 代 数

华南理工大学数学科学学院

方卫东　吴洪武　编

华南理工大学出版社

·广州·

内 容 简 介

本书介绍了行列式、矩阵、线性方程组、向量的线性相关性、相似矩阵及二次型方面的知识. 涵盖硕士研究生入学考试大纲有关线性代数的全部内容,并在附录中收集了历年的工科类考研试题和课程知识的应用例子.

本书内容丰富,涵盖面广,论证严谨,叙述简洁,例题精选,习题适量,循序渐进. 适合理工科大学所有非数学专业以及非理工科院校理工、经管、医药、农林等专业的学生、教师学习和教学使用,对考研的同学也有很大帮助.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/方卫东,吴洪武编.—广州:华南理工大学出版社,2008.2
(国家工科数学课程教学基地建设系列教材)
ISBN 978-7-5623-2746-2

Ⅰ.线… Ⅱ.①方…②吴… Ⅲ.线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 006991 号

总 发 行:华南理工大学出版社(广州五山华南理工大学 17 号楼,邮编 510640)
营销部电话:020-87113487 87111048(传真)
E-mail:scutc13@scut.edu.cn http://www.scutpress.com.cn
责任编辑:张 颖
印 刷 者:广州市穗彩彩印厂
开 本:787mm×960mm 1/16 **印张**:7.5 **字数**:168 千
版 次:2008 年 2 月第 1 版 2008 年 2 月第 1 次印刷
定 价:15.00 元

前　言

《线性代数》是大学数学课程中一门重要的基础课，对于培养学生的抽象思维能力和逻辑推理能力有重要的作用．近二三十年来，中国高等教育得到飞速发展．一方面，高等教育的规模日益扩大，精英式的教育向大众化的教育模式转化；另一方面，教学内容越来越多，课时数相对偏少．如何使学生在有限的时间内更好地学习数学知识，掌握数学思想，提高数学素养，是教育工作者在教学过程中必须思考的问题．我们认为有两方面的工作要做：一是编写优秀的教学参考书，二是培养因材施教的优秀教师．

编著本书的宗旨是力求以最小的篇幅、最简洁的语言、最准确的描述、最少的时间、最合理的安排、最容易接受的方式系统地介绍经典的线性代数知识，给读者提供一本较有价值的线性代数教学参考书，学时数 32～36 节．在这门被认为抽象难学的课程中，我们按照"引例—定义—例子—性质—定理—应用"的次序来介绍知识内容．在每章附有练习题和提高题，练习题是最基本的要求，题量不大，学生一般能独立完成；提高题为满足学有余力的学生的需要．读者可以根据自身的情况选择．每一章突出主要性质和定理，便于读者掌握．附录 1 提供了历年工科类线性代数研究生入学考试试题，供读者练习和考研复习；附录 2 列出了线性代数知识在实际中的应用，藉以帮助读者更好地学习和运用．

在本书编写过程中，得到很多同事的关心、鼓励和支持，在此深表谢意！特别感谢浙江大学的李慧陵教授，华南理工大学的周胜林教授、罗家洪副教授、姚仰新教授、唐西林教授，他们认真地审查了书稿，并提出了很多宝贵建议．

鉴于编者水平有限，书中难免会有不足之处，敬请广大读者批评指正．

编者

2008 年 1 月 18 日

目　　录

第一章　行列式

行列式是线性代数的基础,是线性代数的基本工具,讨论很多问题都用到它.在数学的其他分支中行列式也有着重要的应用.

第一节　行列式的定义

一、引例

我们先看线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases},$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时,其解可由消元法得

$$x_1 = \frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \tag{1-1}$$

在中学数学中,定义二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

则上述线性方程组的解(1-1)可写为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{1-2}$$

可以发现解(1-2)的形式比解(1-1)的形式更便于记忆.对于三元线性方程组也有类似的结论.更一般地,结论可以推广到 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1-3}$$

的情形,为此我们先做一些准备.

二、排列

定义 1 由数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组称为一个 n 级排列.

n 级排列通常记为 $j_1j_2\cdots j_n$,易知,n 级排列的个数为 $n!$.例如,45321 是一个 5 级排列,5 级排列的个数为 $5!=120$.

定义 2 在一个排列中,如果某两个位置上的数前大后小,称这两个数构成一个逆序.一个排列中逆序的总数称为该排列的逆序数.

排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数通常记为 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$.记 τ_k 表示排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 中数字 k 前面比 k 大的数的个数,则有

$$\tau(j_1j_2\cdots j_n)=\tau_1+\tau_2+\cdots+\tau_n,$$

其中 $\tau_n=0$.例如,

$$\tau(45321)=4+3+2+0+0=9,\quad \tau(12\cdots n)=0.$$

定义 3 逆序数为奇(偶)数的排列,称为奇(偶)排列.

由定义可知,排列 45321 为奇排列;排列 $12\cdots n$ 为偶排列.

如果把排列中某两个位置上的数进行交换,就得到另一排列,这样一个变换称为对换.关于对换,有下面主要定理:

定理 1 对换改变排列的奇偶性.

证 分两种情形来讨论.

(1) 对换的两个数相邻,设排列为 $\cdots jk\cdots$.当 $j<k$ 时,记

$$\tau(\cdots jk\cdots)=\cdots+\tau_j+\cdots+\tau_k+\cdots=\tau,$$

则

$$\tau(\cdots kj\cdots)=\cdots+(\tau_j+1)+\cdots+\tau_k+\cdots=\tau+1;$$

当 $j>k$ 时,同理可得

$$\tau(\cdots kj\cdots)=\tau(\cdots jk\cdots)-1,$$

从而定理成立.

(2)对换为一般情形,设排列为 $\cdots ji_1i_2\cdots i_sk\cdots$.

先将 j 依次与 $i_1,i_2,\cdots,i_s$ 对换变为 $\cdots i_1i_2\cdots i_sjk\cdots$,经过 s 次对换,再将 k 依次与 $j,i_1,i_2,\cdots,i_s$ 对换变为 $\cdots ki_1i_2\cdots i_sj\cdots$,经过了 $s+1$ 次对换,故排列的对换共经过了

$$s+(s+1)=2s+1$$

次的相邻对换,由(1)知定理成立.

三、行列式定义

定义 4 设 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 是 n^2 个数(也称为元素),定义 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

其中，$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有的 n 级排列求和.

说明:(1)n 阶行列式是一个数,由 $n!$ 项的代数和构成.

(2)除符号外,每项为 n 个数的乘积,这 n 个数取自于不同的行和列.

(3)乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的 n 个数(元素)(从左到右)行数按自然顺序由小到大进行排列,元素的列数构成的排列为 $j_1j_2\cdots j_n$,排列逆序数 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$的奇偶性决定这一项的符号.

例 1　按定义计算 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

解

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2}(-1)^{\tau(j_1j_2)}a_{1j_1}a_{2j_2}$$
$$= (-1)^{\tau(12)}a_{11}a_{22} + (-1)^{\tau(21)}a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

结果与中学里的直接定义结果一致.三阶行列式亦是如此.

例 2　计算 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix}$.

解

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$
$$= \sum_{1j_2j_3}(-1)^{\tau(1j_2j_3)}a_{11}a_{2j_2}a_{3j_3}$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33}.$$

类似地,可求得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

该行列式称为上三角行列式.

同理

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

该行列式称为下三角行列式.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

该行列式称为对角线行列式(行列式中从左上角到右下角的对角线称为行列式的主对角线).

从定义可知,一个 n 阶行列式共有 $n!$ 项,计算量很大,但从例 2 来看,上(下)三角行列式的计算比较简单.下面介绍行列式的一些性质,以便利用这些性质化一般行列式为三角行列式,从而简化行列式的计算.

第二节 行列式的性质

性质 1 行列互换,行列式不变,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

注 左边行列式称为右边行列式的转置行列式.

证明从略.

性质 1 表明行列式中行与列的地位是对称的,因此后面有关行的性质,对列也成立.

性质 2 互换行列式的两行(列),行列式变号.即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证 记右边行列式 i 行 j 列 $(i,j=1,2,3,\cdots,n)$ 的元素为 b_{ij}，则

$$\text{左边}=\sum_{j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{sj_s}\cdots a_{tj_t}\cdots a_{nj_n}.$$

$$\begin{aligned}\text{右边}&=-\sum_{j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n)}b_{1j_1}\cdots b_{sj_s}\cdots b_{tj_t}\cdots b_{nj_n}\\&=-\sum_{j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{tj_s}\cdots a_{sj_t}\cdots a_{nj_n}\\&=-\sum_{j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{sj_t}\cdots a_{tj_s}\cdots a_{nj_n}\\&=\sum_{j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_t\cdots j_s\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{sj_t}\cdots a_{tj_s}\cdots a_{nj_n}=\text{左边}.\end{aligned}$$

推论 1 两行(列)元素相同，行列式等于 0.

证 记

$$D=\begin{vmatrix}\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{s1}&a_{s2}&\cdots&a_{sn}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{s1}&a_{s2}&\cdots&a_{sn}\\\vdots&\vdots&&\vdots\end{vmatrix},$$

交换元素相同的两行，行列式不变；另由性质 2 可知行列式变号，从而 $D=-D$，即 $D=0$.

性质 3 某行(列)的各元素如有公因数 k，则可把 k 提出行列式符号外. 即

$$\begin{vmatrix}\vdots&\vdots&&\vdots\\ka_{i1}&ka_{i2}&\cdots&ka_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix}\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\end{vmatrix}.$$

证

$$\begin{aligned}\text{左边}&=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots(ka_{ij_i})\cdots a_{nj_n}\\&=k\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}\\&=\text{右边}.\end{aligned}$$

推论 2 某行(列)元素全为 0，则行列式为 0.

推论 3 两行(列)元素成比例，则行列式为 0.

性质 4 (“加法”规则)

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b_{i1}+c_{i1}&b_{i2}+c_{i2}&\cdots&b_{in}+c_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证 左边 $= \sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots (b_{ij_i} + c_{ij_i}) \cdots a_{nj_n}$

$= \sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} [a_{1j_1} \cdots b_{ij_i} \cdots a_{nj_n} + a_{1j_1} \cdots c_{ij_i} \cdots a_{nj_n}]$

= 右边.

性质 5 某一行(列)元素的 k 倍加到另一行(列)对应元素上,行列式不变.即

$$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} + ka_{i1} & a_{j2} + ka_{i2} & \cdots & a_{jn} + ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix}$$

证 由性质 4 和性质 3 的推论 3 立即得证.

在计算行列式时,可利用性质 2 和性质 5 把行列式化为上(下)三角行列式.通常用记号 $r_i \leftrightarrow r_j(c_i \leftrightarrow c_j)$表示互换行列式的第 i 行(列)和第 j 行(列);用 $r_j + kr_i$ 表示第 i 行元素的 k 倍加到第 j 行对应的元素上.类似地,$c_j + kc_i$ 表示第 i 列元素的 k 倍加到第 j 列对应的元素上(建议初学者计算时使用这些记号,便于检查).

例 3 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

解

$$原式 \xlongequal[\substack{r_3 - 3r_1 \\ r_4 - 4r_1}]{r_2 - 2r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4 - 7r_2]{r_3 - 2r_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 36 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4+r_3}\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\0 & -1 & -2 & -7\\0 & 0 & -4 & 4\\0 & 0 & 0 & 40\end{vmatrix}=160.$$

例 4　计算 n 阶行列式 $\begin{vmatrix}a & b & b & \cdots & b\\b & a & b & \cdots & b\\b & b & a & \cdots & b\\\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\b & b & b & \cdots & a\end{vmatrix}$.

解　原式 $\xlongequal[\substack{\vdots\\c_1+1\cdot c_n}]{\substack{c_1+1\cdot c_2\\c_1+1\cdot c_3}}\begin{vmatrix}a+(n-1)b & b & b & \cdots & b\\a+(n-1)b & a & b & \cdots & b\\a+(n-1)b & b & a & \cdots & b\\\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\a+(n-1)b & b & b & \cdots & a\end{vmatrix}$（即其余各列都加到第一列上）

$$=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix}1 & b & b & \cdots & b\\1 & a & b & \cdots & b\\1 & b & a & \cdots & b\\\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\1 & b & b & \cdots & a\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{\vdots\\r_n-r_1}]{\substack{r_2-r_1\\r_3-r_1}}[a+(n-1)b]\begin{vmatrix}1 & b & b & \cdots & b\\0 & a-b & 0 & \cdots & 0\\0 & 0 & a-b & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\0 & 0 & 0 & \cdots & a-b\end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

例 5　当 n 为奇数时，证明：

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix}0 & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\-a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\-a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0\end{vmatrix}=0.$$

证
$$D=(-1)^n\begin{vmatrix}0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ a_{12} & 0 & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & 0\end{vmatrix}=-D,$$

从而 $D=0$.

这个结果也常说成奇数阶反对称行列式等于零.

第三节 按行(列)展开定理

先介绍余子式和代数余子式的概念.

定义 5 划去 n 阶行列式中元素 a_{ij} 所在行和列,剩下的 $(n-1)^2$ 个元素按原来的顺序构成的 $(n-1)$ 阶行列式,称为元素 a_{ij} 的余子式,记为 M_{ij}. 称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为 a_{ij} 的代数余子式. 例如,行列式

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 0 & 1\\ 5 & 1 & 2\end{vmatrix},\quad M_{23}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 5 & 1\end{vmatrix}=-9,\quad A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}2 & 3\\ 0 & 1\end{vmatrix}=2.$$

定理 2(按行列展开定理) 设 $D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$, 则有

$$(1)\ a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases}D & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}\quad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

$$(2)\ a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\begin{cases}D & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}\quad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

证 仅证(1),由性质 1,式(2)亦得证.

先看 $i=j$ 的情形,不妨设 $i=j=1$. 由行列式的定义容易得到

$$\begin{vmatrix}a_{11} & 0 & \cdots & 0\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}A_{11},$$

再由列的交换易知

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_{1j} & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{j-1} a_{1j} M_{1j},$$

于是根据性质 4 可得

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}M_{11} + (-1)^{2-1}a_{12}M_{12} + \cdots + (-1)^{n-1}a_{1n}M_{1n}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}.$$

再看 $i \neq j$ 的情形,考察行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix} = 0 .$$

D_2 是将 D_1 的第 j 行元素换成第 i 行元素,其他行的元素不变,这样 D_1 与 D_2 的第 j 行代数余子式完全相同,D_2 按第 j 行展开有

$$D_2 = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0 .$$

该定理理论上有重要的价值,后面有些地方会用到.另外,它也可以结合前面的性质简化行列式的计算.

例 6　计算 $\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \end{vmatrix}$.

解

$$原式 = (-1)^{2+4}2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} \text{(按第 4 列展开)}$$

$$= 10\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -160.$$

例 7 计算行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

解 原式$=(-1)^{1+n}\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & 3 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$(按第 1 行展开)

$$=\cdots=(-1)^{1+n}\cdot(-1)^{1+(n-1)}\cdot\cdots\cdot(-1)^{1+2}n!$$

$$=(-1)^{\frac{(n+4)(n-1)}{2}}n!$$

事实上,此题还可以利用定义或者性质 2 来求解,读者自行练习.

例 8 设 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 8 & 3 \\ -1 & 6 & 7 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$,

求:(1)$A_{13}+2A_{23}-A_{33}+3A_{43}$;

(2)$3A_{13}+7A_{23}-5A_{33}+5A_{43}$.

解 (1)中代数余子式是第 3 列的,它们的系数是第 1 列的,从而

$$A_{13}+2A_{23}-A_{33}+3A_{43}=0$$

(2) 因为

$$\begin{aligned} & 3A_{13}+7A_{23}+5A_{33}+5A_{43} \\ =&(1+2)A_{13}+(2+5)A_{23}+(-1+6)A_{33}+(3+2)A_{43} \\ =&(1A_{13}+2A_{23}-1A_{33}+3A_{43})+(2A_{13}+5A_{23}+6A_{33}+2A_{43}) \\ =&0+0 \\ =&0, \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} & 3A_{13}+7A_{23}-5A_{33}+5A_{43} \\ =&-10A_{33} \\ =&-10\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} \\ =&-10\cdot 3\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ =&-120. \end{aligned}$$