数学小丛书

9

几种类型的极值问题

范会国

科学出版社

www.sciencep.com

数学小丛书 9

几种类型的极值问题

范 会 国

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

这本小册子是为中学生写的，开头先从一些实际事例说明极大极小问题的性质；接下去就在中学数学的基础之上，从二次函数的极大极小讲起，讲了不涉及高等数学的几种类型的极值问题，并且适当地列举了一些联系实际的、有趣的例子；最后，把所讲的这些类型统一在一个一般的定理之下.书末附有一些习题，通过这些习题，读者可以更好地了解和运用所讲的理论.书中某些定理的证明，虽然不引用高等数学，但是方法上有点近似高等数学，当然不超出中学程度的读者所能理解的范围.这可能使读者的逻辑思维能力提高一步，而为学习高等数学作一导引.

图书在版编目(CIP)数据

几种类型的极值问题/范会国.—北京：科学出版社，2002

(数学小丛书)

ISBN 7-03-009423-9

Ⅰ.几… Ⅱ.范… Ⅲ.极值(数学)-问题 Ⅳ.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 010166 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

中国科学院印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2002年5月第 一 版 开本：787×960 1/32

2004年2月第二次印刷 印张：2 3/8 插页：1

印数：5 001—8 000 字数：34 000

全套书定价：99.00元(共18册)

(如有印装质量问题，我社负责调换〈科印〉)

馬克思说：「一门科学，只有当它成功地运用数学时，才能达到真正完善的地步」。恩格斯说：「要辩证而又唯物地了解自然，就必须熟悉数学」。在科教兴国，振兴中华的今天，向全社会普及数学，实在是一件刻不容缓的大事。

数学小丛書是由我国一些著名数学家撰写的一批数学普及读物精品。几十年来，我国几代科技人员中，不少人都曾得益于这套丛书。我衷心地祝賀数学小丛書的重版与補充，并预祝它取得更大的成功。

王元

二〇〇〇年四月

出版说明

1956年,为了向青少年传播数学知识,科学出版社配合我国首次举办的高中数学竞赛,出版了老一辈数学家华罗庚教授的《从杨辉三角谈起》和段学复教授的《对称》.在20世纪60年代初,这两本书连同其他一些著名数学家撰写的科普著作,被北京市数学会编成小丛书,相继由不同的出版社出版,并多次重印.

由数学大师和著名数学家亲自执笔撰写的这套数学小丛书是我国数学普及读物中的精品,曾激发一代青少年学习数学的兴趣.书中蕴涵的深刻而富有启发性的思想,促进了无数中学生在求学的道路上健康成长.当年这套小丛书的许多读者,现在已经成为学有所成的科学技术工作者,国家建设的栋梁之才.当年由老一辈数学家所倡导的我国的数学竞赛活动,现在已经得到蓬勃的发展.我国自1986年正式参加国际数学奥林匹克竞赛以来,历届都取得总分

第一或第二的好成绩.近年来,我国的数学普及读物无论是品种还是数量都在增加,但是这套数学小丛书仍然无愧是其中别具特色的瑰宝,理应成为传世之作.因此,我社取得作者或其继承人的同意,并在可能的条件下,请作者本人或相关学者对重新编辑的书稿进行了审订,重新刊行这套数学小丛书,以飨广大青少年读者.

数学是几千年人类智慧的结晶,是一门古老而又常新的科学.借此丛书再版之机,我们特别增加两本新书:虞言林教授等的《祖冲之算π之谜》和冯克勤教授的《费马猜想》.前者介绍中国古代数学的一项重大成就,后者阐述数学史上的一个著名猜想——费马定理历经300多年终于在20世纪末被证明的故事,我们相信读者从中将会受到启迪.

本套丛书以新貌重新出版,得到了国家自然科学基金委员会数学天元基金的资助,谨表示衷心感谢.

目　　录

1 引　　言

一群同类量中,若有一量大于其他的量,那么这个量称为这群量的**极大**;若有一量小于其他的量,那么这个量称为这群量的**极小**.这样的极大极小称为**绝对极大极小**,以区别于高等数学中通常所考虑的所谓**局部极大极小**.所谓函数$f(x)$的局部极大,就是这函数的这样的值$f(x_1)$,当自变数x足够邻近x_1时,对应的其他的函数值都比$f(x_1)$小;所谓函数$f(x)$的局部极小,就是这函数的这样的值$f(x_2)$,当自变数x足够邻近x_2时,对应的其他的函数值都比$f(x_2)$大.

极大极小,通常统称**极值**.

极值(局部极值和绝对极值)问题是自然科学、工程技术、国民经济以及生活实践中常常遇到的,不过问题的形式和性质往往随具体情况而异罢了.极值问题所以成为数学的一个重要对象,就是这个缘故.

比方关于气体的体积 V、压力 p 和绝对温度 T 的关系，从物理学知道，有个叫做**范德瓦耳斯**(van der Waals)**公式**：

$$p=-\frac{a}{V^2}+\frac{RT}{V-b},$$

其中 a,b,R 都是只同所考虑的气体有关的正常数. b 是当 p 趋于无穷时，体积 V 的极限值. 因此，恒设 $V>b$. 如果假定温度 T 不变，那么压力 p 就只依赖于体积 V，当 V 变时，p 随之而变. 现在要求 p 的极大和极小，这就是一个极值问题.

又比方下边一个关于运输的问题：有货物要从铁路 AB 上的 A 城运往和铁路相距是 $BC=l$ 的 C 城(图 1). 运送一个单位重量经过一个单位路程的运费在铁路上是 α，在公路上是 β. 显然，运费的多少是同铁路上所经过的路程和

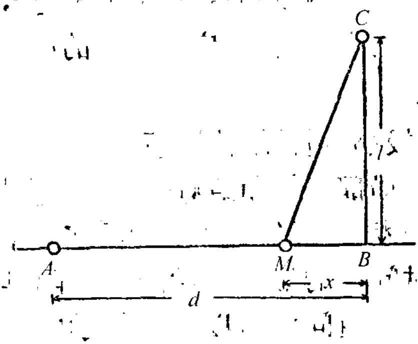

图 1

公路上所经过的路程有关的.因此,就有这样一个问题:应该从铁路上哪一处 M 起修筑公路 MC,使循路线 AMC 从 A 城到 C 城的运费最低廉?我们来看怎样用数学来处理这个问题.命

$$AB = d, \ MB = x,$$

依题意,容易知道一个单位重量的货物的运费

$$y = \alpha(d - x) + \beta\sqrt{x^2 + l^2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant d.$$

可见得我们的问题就是求函数 y 的极小值.所以这也是一个极值问题.

又比方著名的所谓"最速降线问题":设 A,B 是不在同一竖直线上的二定点(图 2).在 A 点的一个静止的质点要在重力作用下沿一条曲线滑到 B.显然,沿着联 A 和 B 的不同曲线,质点从 A 滑到 B 需要不同的时间.问题是要确定一条联 A 和 B 的曲线,使质点沿这条曲线从 A 滑到 B 所需要的时间最少.这问题的解是由伯努利(Bernoulli)兄弟、牛顿(Newton)、洛必达(L'Hospital)等人得出的.如同上面两个问题,这个问题也是一个极值问题.但是应该指出,它在本质上同上面两个问题有区别.因为第一个问题是要确定自变数 V 的某些数值,使函数 p 所取到的对应值是极大或极小.第二个问题也是一样,是要确定自变数 x 的某些数值,

使函数 y 所取到的对应值是极小. 但是,在最速降线问题中,所要确定的不是一个或几个数值,而是一条曲线,就是说一个函数,使得依赖于这曲线的时间是极小. 若用 T 表示时间,$y=f(x)$表示曲线,那么,对于每一函数 $f(x)$,T 都有一确定的值同它相应. 问题就是要确定一个函数 $f(x)$,使 T 的对应值是极小.

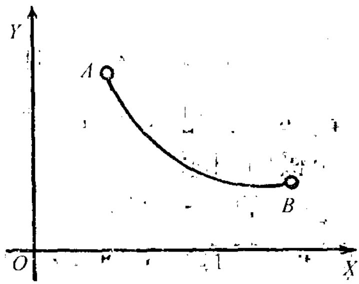

图 2

以上所举的这些极值问题以及一般的极值问题的解决,要用到高等数学,超出了这本小册子的水平,不能在这里论述. 但是,也有一些极值问题,特别是几何中的许多极值问题,不需要高等数学,只要用初等数学也可以解决,而且在计算上也并不很繁琐. 这就是我们这本小册子所要讲的内容.

其次,我们在这本小册子里所谈的极值,只限于绝对极值,因为要讲局部极值,一般需要用到高等数学.

2 从二次函数的极大极小谈起

二次函数 ax^2+bx+c，虽然简单易懂，却很重要而且常常用到，中学代数里也是作为重点的，专门有一章讲它. 因此，我们就在中学所讲过的基础之上，从二次函数的极大极小谈起.

我们来探讨一下，当 x 从 $-\infty$ 渐增到 $+\infty$ 时，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 是怎样变化的，这里 x 是自变数，y 是 x 的函数，a，b，c 是已知常数.

由于 $a\neq0$，我们可以把这个二次函数写成如下的形式：

$$y=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right),$$

于是若命

$$z=x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a},$$

那么

$$y = az.$$

我们只要研究二次函数

$$z = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$$

的变化状况,就容易推出函数 y 的变化状况.

用配方的方法,我们有

$$\begin{aligned} z &= x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \\ &= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}. \end{aligned}$$

可见得 z 的值是两部分的代数和,其中一部分 $\frac{4ac - b^2}{4a^2}$ 是常数,另一部分 $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ 是变的. 要看出当 x 渐增时 z 的变化状况,只要看出变的部分 $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ 的变化状况.

当 x 从 $-\infty$ 渐增到 $-\frac{b}{2a}$ 时,量 $x + \frac{b}{2a}$ 是负的,它的值从 $-\infty$ 渐增到 0;因此,它的绝对值从 $+\infty$ 渐减到 0;从而它的平方也从 $+\infty$ 渐减到 0. 所以当 x 从 $-\infty$ 渐增到 $-\frac{b}{2a}$ 时,z 从 $+\infty$ 渐减到 $\frac{4ac - b^2}{4a^2}$.

当 x 从 $-\dfrac{b}{2a}$ 渐增到 $+\infty$ 时，$x+\dfrac{b}{2a}$ 是正的，它的值从 0 渐增到 $+\infty$；它的平方也从 0 渐增到 $+\infty$；所以 z 从 $\dfrac{4ac-b^2}{4a^2}$ 渐增到 $+\infty$.

上面说的结果可以列表如下：

x	$-\infty$	$\nearrow$	$-\dfrac{b}{2a}$	$\nearrow$	$+\infty$
z	$+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{4ac-b^2}{4a^2}$	$\nearrow$	$+\infty$

现在来看一看 y 的变化状况，就是说，二次三项式 ax^2+bx+c 的变化状况. 因为

$$y=az,$$

所以，依照 a 是正或负，就有两种情形.

第一种情形：$a>0$. 在这种情形，当 z 渐增时，y 也渐增；当 z 变小时，y 也变小. 所以得 y 的变化状况如下表：

$a>0$	x	$-\infty$	$\nearrow$	$-\dfrac{b}{2a}$	$\nearrow$	$+\infty$
	y	$+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{4ac-b^2}{4a}$	$\nearrow$	$+\infty$

从这里清楚地看出，在这种情形，当自变数 x 从 $-\infty$ 渐增到 $-\dfrac{b}{2a}$ 时，函数 y 从 $+\infty$ 渐减到

$\frac{4ac-b^2}{4a}$；而当 x 继续从 $-\frac{b}{2a}$ 渐增到 $+\infty$ 时，y 就停止减小，改做从 $\frac{4ac-b^2}{4a}$ 渐增到 $+\infty$. 所以函数 y 的对应于 $x=-\frac{b}{2a}$ 的值 $\frac{4ac-b^2}{4a}$ 是极小.

第二种情形：$a<0$. 在这种情形，当 z 变小时，函数 $y=az$ 变大，而当 z 变大时 y 却变小. 所以得 y 的变化状况如下表：

$a<0$	x	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{b}{2a}$	$\nearrow$	$+\infty$
	y	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{4ac-b^2}{4a}$	$\searrow$	$-\infty$

从这里清楚地看出，在这种情形，当自变数 x 从 $-\infty$ 渐增到 $-\frac{b}{2a}$ 时，函数 y 从 $-\infty$ 渐增到 $\frac{4ac-b^2}{4a}$；而当 x 继续从 $-\frac{b}{2a}$ 渐增到 $+\infty$ 时，y 就停止增大，改做从 $\frac{4ac-b^2}{4a}$ 渐减到 $-\infty$. 所以函数 y 的对应于 $x=-\frac{b}{2a}$ 的值 $\frac{4ac-b^2}{4a}$ 是极大.

例 1 当用实验确定一个量 x 时，由于仪器的不够完善或操作的不够精细，对同一个量

作 n 次观测,会得到 n 个不同的值

$$a_1, a_2, \cdots, a_n.$$

如果量 x 的某一个值同这 n 个值的差的平方和是最小,那么这个值就叫做量 x 的"最可能的"值.求这个"最可能的"值.

解 求这个"最可能的"值就是求 x 的一个值,使得函数

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-a_1)^2+(x-a_2)^2+\cdots+(x-a_n)^2 \\ &= nx^2-2(a_1+a_2+\cdots+a_n)x \\ &\quad +(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2) \end{aligned}$$

的对应值是极小.为此,我们用上边所得的关于二次函数的结果.由于 x^2 的系数在这里是 $n>0$,x 的系数在这里是 $-2(a_1+a_2+\cdots+a_n)$,立刻可知函数 $f(x)$ 当

$$\begin{aligned} x &= -\frac{-2(a_1+a_2+\cdots+a_n)}{2n} \\ &= \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \end{aligned}$$

时是极小.这样,x 的"最可能的"值就是用实验得到的值的**算术平均**.

我们也可以利用高等数学和初等数学的别

的方法来解这个问题[1]，并且都很简单，不过上面的解法是最简单不过了.

例 2 设从边长是 a 和 b 的一个矩形 $ABCD$ 的两对顶点（譬如 A，C）起，在邻边上取同一长度 $AG = AH = CE = CF = x$（图 3），那么就得到平行四边形 $EFHG$，它的面积的大小显然随 x 而变. 试问要令 x 取怎样的值，所得到的平行四边形 $EFHG$ 的面积才是极大.

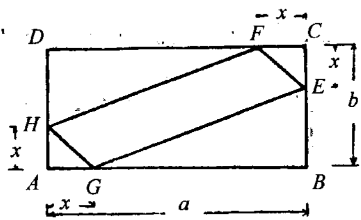

图 3

解 设 $AB = a$，$BC = b$，S 是平行四边形 $EFHG$ 的面积，就有

$$S = ab - x^2 - (a - x)(b - x)$$
$$= -2x^2 + (a + b)x.$$

可见得使 S 是极大的 x 值是:

$$x = -\frac{(a+b)}{2\cdot(-2)} = \frac{a+b}{4};$$

① 参阅本套丛书第 5 册，即史济怀撰写的《平均》.