有限元高精度后处理理论

朱起定 著

2

科学出版社
www.sciencep.com

内 容 简 介

本书总结了近十几年来有限元高精度算法(即超收敛和超收敛后处理)的主要研究成果,共十二章.前五章介绍超收敛和超逼近理论,包括高次矩形的插值误差的弱估计和超逼近估计、双线性元的超收敛性和外推、高次三角形元中的问题等内容;后七章介绍超收敛后处理理论,包括调和方程边值问题的概率算法、多维离散 Green 函数理论、三维问题的超逼近和超收敛性、后验误差估计和超收敛等内容.

本书可供计算数学、应用数学、计算物理和计算力学等专业的高年级大学生、研究生、教师与科技人员阅读,也可供研究泛函分析和函数逼近理论的学者参考.

图书在版编目(CIP)数据

有限元高精度后处理理论/朱起定著.北京:科学出版社,2008

ISBN 978-7-03-020649-7

Ⅰ.有… Ⅱ.朱… Ⅲ.有限元法-精度-理论 Ⅳ.O242.21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 031080 号

责任编辑:张 扬/责任校对:鲁 素

责任印制:赵德静/封面设计:王 浩

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

铭浩彩色印装有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2008 年 5 月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2008 年 5 月第一次印刷 印张:26 1/2

印数:1—3 000 字数:516 000

定价:68.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换(环伟))

代　　序

超收敛的文献，据 Krizek 的统计，已超过 1000 篇. 这个词汇出现的频率越来越高, 为什么呢？因为它跟当前流行的自适应一词联系在一起. 但是，超收敛有几个理论问题必须解决：①对网格的限制如何放松？②对解的光滑度要求如何放松？③高次元的超收敛最优阶应该是多少？④超收敛和后处理以及自适应如何结合？⑤多维问题如何有效解决？

关于①，已经取得进展：对于高次矩形元，已经知道各向异性网格也能有超收敛；对于高次三角形元，也已知道具有对称点的网格能有超收敛. 这方面的历史与现状可见 Brandts 和 Krizek 的总结报告（2001 年）.

关于②，这是该书的最大亮点：作者首次对超收敛所要求的解的光滑度做了精密的刻画，对于非光滑解也能讨论超收敛. 这回答了人们的疑虑：担心超收敛结果不能用于自适应处理，因为超收敛要求解的光滑度太高. 该书正好回答了这个问题：这些担忧是不必要的.

关于③，则是该书的又一亮点：20 多年前提出的 $2p$ 猜想，即双 p 次矩形元能有 $2p$ 阶的超收敛精度，一直保留着 $p \leqslant 3$ 的记录，最近才提出了 $p = 4$ 的可能性. 这种可能性在该书中得到了巨大的发挥和发展.

关于④，则是该书的主题：该书的宗旨是要把超收敛理论以及超收敛后处理和自适应处理理论相结合，成为一个统一和完整的理论. 特别地，国际上目前流行的结果已由超收敛结果得来，其中奇次元的结果是新的最佳的. 此外，该书提出了线单元片上的超收敛后处理，因此做自适应处理时，不仅仅是 h 加密和 p 加密两个概念和 h-p-version; 还应有线（linear）单元上的 p 加密，以及 l-p-version. 该书所讨论的高次三角元不仅限于 P_k 型元，还研究了具有更多内部型函数的三角元，它具有更多的超收敛点和更高阶的超收敛阶.

关于⑤，该书给出了多维问题的新进展：这里包括多维离散格林函数理论和多维高次元的超收敛新成果.

这些成果的关键在于该书作者在 1982 年最早提出的“离散格林函数——两个基本估计”，以后被他的同事和学生重复使用，特别是最近被一些年轻人所发展. 这次，作者在该书中又将它们发挥得淋漓尽致，更系统和更精细地研究了高次元导数的超收敛精度，包括 $p = 4$ 情形，取得了量和质的突破.

此外，该书更加强调年轻人的工作. 事实上，过去 20 年来，该书作者已经培养和造就了一批年轻人，他们的工作青出于蓝而胜于蓝.

简而言之，我相信该书的出版会成为超收敛发展的新开端，为广大青年学者提供更大的机遇和挑战，并为这个领域做出新的贡献.

林　群

2007 年 12 月

前　　言

有限元方法是求解偏微分方程的一种行之有效的数值方法，广泛应用于科学与工程计算各领域. 本书的目的是要系统地介绍有限元的高精度后处理理论. “高精度后处理”或者“超收敛后处理”，就是要对有限元方法所得出的数值结果事后做某种加工（这种加工工作量极小）而获得更高精度的方法. 本书是我们已出版的两本著作《有限元超收敛理论》和《有限元预处理和后处理理论》的继续.

本书力求吸取和总结国外学者工作的精华，并与中国特色的工作相结合，使之成为具有更高层次的论著. 本书在方法上、内容上以及结构上具有如下特点：

第一, 继续强化“离散Green函数 —— 两个基本估计”框架思想.

所谓“离散 Green 函数 —— 两个基本估计”框架的基本思想是：构造一个广义的插值函数 $W \in S^h$, 使得

$$(\mathrm{A})\quad |a(u-W,v)| \leqslant C(u)h^{k+\tau}\|v\|_{1,q}, \quad \forall v \in S^h, \quad k \geqslant 1,$$

$$(\mathrm{B})\quad |a(u-W,v)| \leqslant C(u)h^{k+1+\tau}\|v\|_{h,2,q}, \quad \forall v \in S^h, \quad k \geqslant 2,$$

其中 $\|v\|_{h,2,q} = (\sum\limits_e \|v\|_{2,q,e})^{1/q}$, $\tau \in \{1,2\}$, 且 $1 \leqslant q \leqslant 2$.

然后，利用离散 Green 函数 G_z^h 的估计

$$\|G_z^h\|'_{h,2,1} + \|\partial_z G_z^h\|_{1,1} \leqslant C|\ln h|$$

得到

$$\begin{aligned}|(u^h-W)(z)| &= |a(u^h-W,G_z^h)| = |a(u-W,G_z^h)| \\ &\leqslant C(u)h^{k+1+\tau}\|G_z^h\|_{h,2,1} \leqslant C(u)h^{k+1+\tau}|\ln h|, \quad k \geqslant 2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\partial_z(u^h-W)(z)| &= |a(u^h-W,\partial_z G_z^h)| = |a(u-W,\partial_z G_z^h)| \\ &\leqslant C(u)h^{k+\tau}\|\partial_z G_z^h\|_{1,1} \leqslant C(u)h^{k+\tau}|\ln h|, \quad k \geqslant 1.\end{aligned}$$

其中,$C(u)$ 是与 u 有关的正常数. 这个框架是作者在“中法有限元学术讨论会 (1982)”的报告中提出来的. 现在这一框架思想已得到中外学者的充分肯定，捷克人把它称之为“中国欧洲惯用的方法”（Conventional Methods in China and Europe)，在中国也有学者把它叫做“单元正交分析法”并高度评价这一思想. 美国学者 Wahlbin 在他的专著 *Superconvergence in Galerkin Finite Element Methods* (1995)(P80) 中还指名提到作者在“中法有限元学术讨论会 (1982)”的报告，引用

了这个框架并指出“他当时得到的结果‘本质上’与我们的定理 5.5.1 和 5.5.2 是一致的.”(“He then proceeded ‘essentially’ as in our Theorem 5.5.1 and 5.5.2.”)

最近, 中国的年轻学者又大大地发展和完善了离散 Green 函数理论, 解决了难度很大的多维问题, 更令人称奇的是还有年轻学者解决了离散 Green 函数的逐点估计问题. 以上许多新的发现、新创造, 使得本书新建立起来的“离散 Green 函数 —— 两个基本估计”框架思想更具生命力, 使得我们有可能向“多维高次元问题”这一被学术界称为“最烦恼的问题”冲击.

应当指出,“离散 Green 函数”和“基本估计”是欧洲学者最早提出来的, 利用它们分别解决了有限元的最大模估计和平均超收敛问题. 但是从 1969 年首次提出基本估计起至今历时几十年, 欧洲学者并没有人解决超收敛的核心理论问题 —— 逐点超收敛问题. 其根本原因是他们没有将“离散 Green 函数”和“基本估计”两者结合起来研究. 恰巧是我们中国学者注意到了这一点, 建立了超收敛基本理论.

第二, 继续深化局部对称处理技巧.

局部对称处理技巧是以 Schatz, Sloan, Wahlbin 等为代表的美国学者提出来的. 在他们确立的精细的内估计理论的基础上, 利用“局部对称处理技巧”得到一个较普遍的超收敛结果, 它适应于所有二阶椭圆边值问题. 可是, 这种“内估计 + 对称处理”技巧并非如他们所说的是“超收敛的一般准则”(general principles of superconvergence). 本书第七章专门讨论了这个问题, 并且得到如下新成果:

(1) 不用烦琐的内估计, 只需将离散 Green 函数逐点估计与局部对称技巧相结合就可得到 Schatz, Sloan, Wahlbin 等的全部结果, 而且误差阶是最佳的.

(2) 将离散 Green 函数逐点估计、能量积分渐进展开式与局部对称法相结合, 就得到二次三角元有限元逼近解的导数在局部对称点上有 $O(h^4\ln 1/h)$ 的超收敛性.

(3) 将离散 Green 函数逐点估计、两个基本估计与局部对称法相结合, 就得到一般的 k 次元 (包括矩形元和三角元) 在局部对称点上导数有高两阶的超逼近.

(4) 对于 Laplace 方程, 将离散 Green 函数逐点估计、两个基本估计与局部对称法相结合, 就得到一般的奇次 k 次矩形元在局部对称点上导数有高三阶的超逼近.

更值得庆贺的是, 这些成功在很大程度上是中国年轻学者努力奋斗得来的.

第三, 重新定义超收敛的阶.

在经典有限元理论中, 人们是用剖分尺寸 $h(h\to 0)$ 来描述逼近的精度的. 通

常，人们是用 h 的 n 次幂来描述误差的精度，h 的 n 次幂越高，说明误差的逼近精度的阶越高. 我们同时也可以看到，精度越高，要求解的光滑度也越高.

对于超收敛理论, 其问题就更严重. 例如, 要得到 $k+1$ 阶的超逼近结果必须要求解 $u \in H^{k+2}(\Omega)$ 或 $W^{k+2,\infty}(\Omega)$. 在经典理论中，这种要求是不可降低的，因为所有此类误差的估计都基于 Taylor 展开

$$u = p_k(u) + O(h^{k+1}),$$

其中，$p_k(u)$ 为 u 的 k 阶 Taylor 多项式，要使余项具有 $O(h^{k+1})$ 阶精度，就必须要求 u 具有 $k+1$ 阶光滑度. 如果精度提升到 $k+2$ 阶，就要求 u 具有 $k+2$ 阶的光滑度. 经典理论研究 k 次元的超收敛和超逼近，是以无穷小量 $O(h^k)$ 为参照的，导数误差比 $O(h^k)$ 高一阶，就说有高一阶的超收敛.

现在我们换一种说法，依 Ciarlet 意义考虑一个 k 次有限元 $(e, P_k(e), \Sigma^{\#})$, 假定 $W(e) = H^1(e)$ 为这个有限元的基本空间，如果我们不希望用 $O(h^k)$ (h 是 e 的尺寸) 来作为参照量，我们自然会把 $u \in H^1(e)$ 在 $P_k(e)$ 中的最佳平均逼近量

$$\Delta_{k,e}(u) \equiv \inf_{\chi \in P_k(e)} |e|^{-\frac{1}{2}} |u-\chi|_1 = \inf_{\chi \in P_k(e)} \sqrt{\frac{1}{|e|}\int_e |\nabla(u-\chi)|^2 \mathrm{d}x},$$

或者所有单元最大者 $\Delta_k = \max_e \Delta_{k,e}$ 来作为参照，其中 $|e|$ 为 e 的测度. 这样，我们就可以重新定义超收敛：导数误差比 Δ_k 高一阶，就说有高一阶的超收敛. 至于 Δ_k 有没有 $O(h^k)$ 这么高，在什么条件下有这么高，都是无关紧要的.

经过以上的重新定义，我们就可以在 $u \in H^1$ 的条件下（而不是 $u \in W^{k+2,\infty}$ 的强条件下）讨论超收敛了.

本书的各个章节，就是在这种意义下来讨论超收敛和超逼近的. 本书第十一章还特别举出了三维高次元的计算实例，证明不光滑解的有限元逼近的确存在超收敛性.

不过，不是所有问题都可以用这种观点来讨论超收敛和超逼近的. 例如，采用局部对称处理技巧，似乎不能用这种办法. 它必须直接对 u 的高阶导数（$k+1$ 阶甚至更高阶导数）做对称处理.

第四，在投影型插值理论基础上，建立了 ω 有限元算法.

Ciarlet 曾给出了有限元的抽象定义：一个基本空间 $W(e)$ 上建立的三元集 $(e,\ P_e,\ \Sigma^{\#})$ 叫做一个有限元，如果① e 内部非空且边界满足Lipschitz条件；② $P_e\subset W(e)$ 是有限维的多项式集；③ $\Sigma^{\#}$ 是 $W(e)$ 上的有限的连续线性泛函集，它与 P_e 的一个基底 Σ 双正交.

本书对常见的 k 次有限元，重新构造了一个特殊的基本空间 $H(e)$ 和 $H(e)$ 内的一个与 Lobatto函数有关的多项式函数系 $\{\omega_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$(简称 ω 函数系)，并且得到类似于 Taylor 展开的展开式

$$u=\sum_{\alpha\in\Lambda}\beta_\alpha\omega_\alpha,$$

我们可以截取有限指标集 $\Lambda_k\subset\Lambda$ 使得

$$P_e=\mathrm{span}\{\omega_\alpha:\alpha\in\Lambda_k\},$$

这样产生的泛函集 $\Sigma^{\#}=\{\beta_\alpha:\alpha\in\Lambda_k\}$ 正好与 P_e 的基底 $\Sigma=\{\omega_\alpha:\alpha\in\Lambda_k\}$ 双正交. 如此构造的新的有限元 $(e,P_e,\Sigma^{\#})$ 就叫 ω 元. 对应的 ω 插值正好就是专著《有限元的预处理和后处理理论》中引进的“投影型插值”. 这样建立起来的 ω 有限元理论至少为我们带来了如下好处：

(1) 利用基函数系 $\{\omega_\alpha\}$ 的部分正交性可以非常直观地获取 Q_k^ν 型矩形 ω 有限元的全部插值误差弱估计. 而且都可以用广义误差阶 Δ_k 表达出来. 关于矩形元的理论详见第三、四章.

(2) 可以类比于矩形元建立三角元上的基函数系 $\{\omega_\alpha\}$，以及三角元的 ω 函数展开，由此建立 ω 三角元算法. 这样，我们不仅可以讨论普通 k 次三角元的超收敛问题，还可以讨论所谓 P_k^ν 型三角形 ω 元的插值误差弱估计. 而且也可以用广义误差阶 Δ_k 表达出来. 完善了三角元的超收敛和超逼近理论. 关于三角元的理论详见第五章.

(3) 提供新的有限元算法 —— ω 算法，ω 算法与 Lagrange 算法 (简称“L 算法”) 相比有如下优点: ① ω 算法稳定，而“L 算法”不稳定; ② ω 算法速度快、精度高，而“L 算法”速度慢、精度差；③即使是三维高次元 ω 算法也可以在计算机上实现，对二维问题最高可以算到 15 次元，对三维问题最高可以算到 9 次元，而“L 算法”不能. 在第十一章提供了大量的数例证实了这一点.

第五，中国超收敛研究是从实践中开始的.

在中国，最早在 1975 年，由一位当时还很年轻的工程师在水坝应力计算中

发现的超收敛现象. 作者及其合作者也是在水坝应力计算中发现并证明了“应力佳点定理”.

在国际上，超收敛现象是由结构工程师 Zienkiewicz-Cheung 最早发现的. 随后才有超收敛理论的飞速发展. 近些年来，超收敛理论看似十分完善，已经没有什么新东西可研究了. Zienkiewicz-Zhu 于 1992 年从实践中又提出了“单元片导数超收敛恢复技巧”（简称 SPR 技巧）. 他指出，只要对一个节点相邻的单元片实施最小二乘法就可以获得高精度的恢复导数. 至今 SPR 技术已被工程界所接受并广泛应用.

Zienkiewicz-Zhu 所提出的新问题（简称 Z-Z 问题）就是作者及其课题组所研究的超收敛后处理问题. 这项研究和我国已有的插值处理、校正法、后验估计、自适应处理等研究已成为一个完整的体系. Z-Z 问题提出后，国内外一批年轻的华人，举起了接力棒，从理论上研究、解决了一维 SPR 问题，接着研究二维问题，先解决了一次元问题，接着解决了偶次矩形元的强超收敛问题. 我们课题组发现，这些结果实际上也可以从已有专著中的强超逼近的结果直接推出. 作者及其课题组相继发表文章解决了学术界尚未解决的奇次矩形元问题以及二次三角元问题，并获得最佳校正结果.

提起 Z-Z 算法，我们应当追溯到它的源头即由 Babuška 等于 1978 年早就提出来的自适应处理方法，最早的方法是基于残值理论产生的，由于给出的后验误差估计因子过于复杂没有被工程师所认同. Zienkiewicz-Zhu 最初基于应力的光滑化，也提出了新的应力的后验误差估计因子，由于它具有计算简单、易于理解、与现有的有限元软件接口方便等特点，因此受到工程界的广泛欢迎. 事实上，这种估计因子所以有效，是因为它与超收敛现象在一定条件下相吻合所致. 如果改变条件，就会在造成自适应处理失效. 1990 年，华人青年学者朱建中与 Zienkiewicz 仔细审核了超收敛理论，提出超收敛单元片导数恢复技巧（简称 SPR 技巧）并用这个超收敛后处理结果代替真解获得了 Z-Z 后验误差估计因子. 这样获取的自适应处理格式已经成为工程界最为流行的自适应处理方法.

应当说，自适应处理技术是解决多维高次元这种被称之为“多维烦恼问题”的最有效的办法，而这一理论的支柱就是超收敛后处理理论. 本书的目标就是要建立和完成这一理论. 本书的第三篇总结了几乎所有有限元的超逼近和超收敛结果. 本书第七章还总结出 SPR 的结论成立的两个充分条件，进而就有高精度的恢复导数. 至少解决了目前所提出的那些 SPR 问题，同时还把林氏插值处理法等诸多结果统一在同一个框架之下. 除此之外，第七章还介绍了各种有限元进行

超收敛后处理所必需的预备条件, 包括用什么格式、如何选择单元片、如何选择样本点、期望得到的超收敛阶等.

本书的最后一章总结了两种后验误差估计方法: 残值法和 Z-Z SPR 处理技巧. 同时也从理论上介绍了我们提供的一些方法. 最后介绍了通用的 h-l-p 自适应处理格式. 也提出了作者从理论上探讨出来的新的自适应处理格式 —— h-l-p 格式. 作者希望这一新格式能在实践中实现并取得成功. □

本书原是作者为博士生开课的一份讲稿, 2006 年底, 接到出版社的出版合同之后, 又把近几年来发表的新作, 学生的博士论文以及国内外重要会议的报告融入其中. 全书共分四篇 12 章.

第一篇介绍预备知识, 并以一维问题为例, 介绍新理论框架.

第二篇分三章, 用新观点介绍超收敛基本估计.

第三篇分四章, 介绍基于离散 Green 函数理论的局部对称处理法、后处理基本理论, 以及调和方程边值问题的一个高效算法.

第四篇介绍多维离散 Green 函数理论、三维超收敛理论, 并提供了多维高次元的 ω 算法, 这个算法至少对常系数方程是简单而易行的. 最后还提供了大量的实算结果, 并从三维高次元的计算结果中证实, 对于奇性解, 它的 Galerkin 逼近确实存在超收敛现象. 最后一章还介绍后验误差估计和自适应处理.

为撰写本书我们要感谢许多同行的研究和帮助. 特别是中国科学院林群和石钟慈两位院士, 他们为本书的策划提出了很多建设性的有益的建议.

最后, 作者还要感谢刘晓奇教授以及刘经洪、赵庆华、孟令雄、魏继东和易利军等五位博士的鼎力相助.

本书可供大学高年级学生、研究生以及同行阅读, 有些章节还可供工程技术人员, 特别是计算力学专业人员参考.

由于作者水平有限, 书中错漏之处在所难免, 敬请读者指正.

朱起定

2007 年 12 月于长沙

湖南师范大学数计院

目　　录

第二篇 插值误差的弱估计和超逼近估计

第三篇 有限元超收敛后处理理论