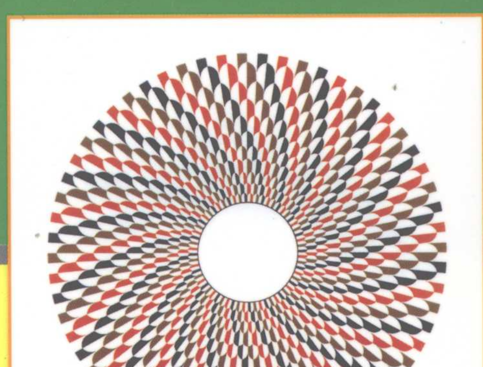
中学数学拓展丛书

# 数学建模导引

Shuxue Jianmo Daoyin

沈文选　杨清桃　编著



哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

● 中学数学拓展丛书

本丛书是湖南省教育厅科研课题《教育数学的研究》（编号06C510）成果之一

# 数学建模导引

SHUXUE JIANMO DAOYIN

沈文选　杨清桃　编著

哈爾濱工業大學出版社
HITP HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

## 内容提要

本书共分七章。第一章数学模型;第二章数学建模的意义;第三章数学建模的逻辑思维方法;第四章数学建模的非逻辑思维方法;第五章数学建模的机理分析方法;第六章数学建模的数据分析方法;第七章数学建模的学科知识方法。本书可作为高等师范院校教育学院、教师进修学院数学专业及国家级、省级中学数学骨干教师培训班的教材或教学参考书。

**图书在版编目(CIP)数据**

数学建模导引/沈文选,杨清桃编著.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2008.1

(中学数学拓展丛书;4)

ISBN 978-7-5603-2639-9

Ⅰ.数… Ⅱ.①沈… ②杨… Ⅲ.数学课-中学-教学参考资料 Ⅳ.G633.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 190747 号

策划编辑 刘培杰
责任编辑 李广鑫
封面设计 卞秉利
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真 0451-86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 黑龙江省教育厅印刷厂
开　　本 787mm×1092mm　1/16　总印张 16.5　总字数 395 千字
版　　次 2008 年 1 月第 1 版　2008 年 1 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5603-2639-9
印　　数 1~4 000 册
定　　价 28.00 元

# ⊙序

我和沈文选教授有过合作，彼此相熟。不久前，他发来一套数学普及读物的丛书目录，包括数学眼光、数学思想、数学应用、数学模型、数学方法、数学史话等，洋洋大观。从论述的数学课题来看，该丛书的视角新颖，内容充实，思想深刻，在数学科普出版物中当属上乘之作。

阅读之余，忽然觉得公众对数学的认识很不相同，有些甚至是彼此矛盾的。例如：

一方面，数学是学校的主要基础课，从小学到高中，12 年都有数学；另一方面，许多名人在说“自己数学很差”的时候，似乎理直气壮，连脸也不红，好像在宣示：数学不好，照样出名。

一方面，说数学是科学的女王，“大哉数学之为用”，数学无处不在，数学是人类文明的火车头；另一方面，许多学生说数学没用，一辈子也碰不到一个函数，解不了一个方程，连相声也在讽刺“一边向水池注水，一边放水”的算术题是瞎折腾。

一方面，说“数学好玩”，数学具有和谐美、对称美、奇异美，歌颂数学家的“美丽的心灵”；另一方面，许多人又说，数学枯燥、抽象、难学，看见数学就头疼。

数学，我怎样才能走近你，欣赏你，拥抱你？说起来也很简单，就是不要仅仅埋头做题，要多多品味数学的奥秘，理解数学的智慧，抛却过分的功利，当你把数学当做一种文化来看待的时候，数学就在你心中了。

我把学习数学比做登山，一步步地爬，很累，很苦。但是如果你能欣赏山林的风景，那么登山就是一种乐趣了。

登山有三种意境。

首先是初识阶段。走入山林，爬得微微出汗，坐拥山色风光。体会“明月松间照，清泉石上流”的意境。当你会做算术，会

记账,能够应付日常生活中的数学的时候,你会享受数学给你带来的便捷,感受到好似饮用清泉那样的愉悦。

其次是理解阶段。爬到山腰,大汗淋漓,歇足小坐。环顾四周,云雾环绕,满目苍翠,心旷神怡。正如苏轼名句:"横看成岭侧成峰,远近高低各不同;不识庐山真面目,只缘身在此山中。"数学理解到一定程度,你会感觉到数学的博大精深,数学思维的缜密周全,数学的简捷之美,使你对符号运算能够有爱不释手的感受。不过,理解了,还不能创造。"采药山中去,云深不知处。"对于数学的伟大,还莫测高深。

第三则是登顶阶段。攀岩涉水,越过艰难险阻,到达顶峰的时候,终于出现了"会当凌绝顶,一览众山小"的局面。这时,一切疲乏劳顿、危难困苦,全都抛到九霄云外。"雄关漫道真如铁",欣赏数学之美,是需要代价的。当你破解了一道数学难题,"蓦然回首,那人却在灯火阑珊处"的意境,是语言无法形容的快乐。

好了,说了这些,还是回到沈文选先生的丛书。如果你能静心阅读,它会帮助你一步步攀登数学的高山,领略数学的美景,最终登上数学的顶峰。于是劳顿着,但快乐着。

信手写来,权作为序。

张奠宙
2007年11月13日
于沪上苏州河边

# 附　文

(文选先生编著的丛书,是一种对数学的欣赏。因此,再次想起数学思想往往和文学意境相通,年初曾在《文汇报》发表一短文,附录于此,算是一种呼应)

## 数学和诗词的意境

**张奠宙**

数学和诗词,历来有许多可供谈助的材料。例如:

一去二三里,烟村四五家;
楼台七八座,八九十支花。

把十个数字嵌进诗里,读来琅琅上口。郑板桥也有咏雪诗:

一片二片三四片,五片六片七八片;
千片万片无数片,飞入梅花总不见。

诗句抒发了诗人对漫天雪舞的感受。不过,以上两诗中尽管嵌入了数字,却实在和数学没有什么关系。

数学和诗词的内在联系,在于意境。李白《送孟浩然之广陵》诗云:

故人西辞黄鹤楼，烟花三月下扬州。
孤帆远影碧空尽，唯见长江天际流。

数学名家徐利治先生在讲极限的时候，总要引用“孤帆远影碧空尽”这一句，让大家体会一个变量趋向于 0 的动态意境，煞是传神。

近日与友人谈几何，不禁联想到初唐诗人陈子昂《登幽州台歌》中的名句：

前不见古人，后不见来者；
念天地之悠悠，独怆然而涕下。

一般的语文解释说：上两句俯仰古今，写出时间绵长；第三句登楼眺望，写出空间辽阔；在广阔无垠的背景中，第四句描绘了诗人孤单寂寞悲哀苦闷的情绪，两相映照，分外动人。然而，从数学上看来，这是一首阐发时间和空间感知的佳句。前两句表示时间可以看成是一条直线（一维空间）。陈老先生以自己为原点，前不见古人指时间可以延伸到负无穷大，后不见来者则意味着未来的时间是正无穷大。后两句则描写三维的现实空间：天是平面，地是平面，悠悠地张成三维的立体几何环境。全诗将时间和空间放在一起思考，感到自然之伟大，产生了敬畏之心，以至怆然涕下。这样的意境，数学家和文学家是可以彼此相通的。进一步说，爱因斯坦的四维时空学说，也能和此诗的意境相衔接。

贵州六盘水师专的杨老师告诉我他的一则经验。他在微积分教学中讲到无界变量时，用了宋朝叶绍翁《游园不值》中的诗句：

满园春色关不住，一枝红杏出墙来。

学生每每会意而笑。实际上，无界变量是说，无论你设置怎样大的正数 $M$，变量总要超出你的范围，即有一个变量的绝对值会超过 $M$。于是，$M$ 可以比喻成无论怎样大的园子，变量相当于红杏，结果是总有一枝红杏越出园子的范围。诗的比喻如此恰切，其意境把枯燥的数学语言形象化了。

数学研究和学习需要解题，而解题过程需要反复思索，终于在某一时刻出现顿悟。例如，做一道几何题，百思不得其解，突然添了一条补助线，问题豁然开朗，欣喜万分。这样的意境，想起了王国维用辛弃疾的词来描述的意境：“众里寻它千百度，蓦然回首，那人却在灯火阑珊处。”一个学生，如果没有经历过这样的意境，数学大概是学不好的了。

# ⊙前言

音乐能激发或抚慰情怀，绘画使人赏心悦目，诗歌能动人心弦，哲学使人获得智慧，科技可以改善物质生活，但数学却能提供以上的一切。

——Klein

数学就是对于模式的研究。

——A·N·怀特海

甚至一个粗糙的数学模型也能帮助我们更好地理解一个实际的情况，因为我们在试图建立数学模型时被迫考虑了各种逻辑可能性，不含混地定义了所有的概念，并且区分了重要的和次要的因素。一个数学模型即使导出了与事实不符合的结果，它也还可能是有价值的，因为一个模型的失败可以帮助我们去寻找更好的模型。应用数学和战争是相似的，有时一次失败比一个胜利更有价值，因为它帮助我们认识到我们的武器或战略的不适当之处。

——A. Renyi

人们喜爱音乐，因为它不仅有神奇的乐谱，而且有悦耳的优美旋律！

人们喜爱画卷，因为它不仅描绘出自然界的壮丽，而且可以描绘人间美景！

人们喜爱诗歌，因为它不仅是字词的巧妙组合，而且有抒发情怀的韵律！

人们喜爱哲学,因为它不仅是自然科学与社会科学的浓缩,而且使人更加聪明!

人们喜爱科技,因为它不仅是一个伟大的使者或桥梁,而且是现代物质文明的标志!

而数学之为德,数学之为用,难以用旋律、美景、韵律、聪明、标志等词语来表达!

你看,不是吗?

数学眼光,使我们看到世间万物充满着带有数学印记的奇妙的科学规律,看到各类书籍和文章的字里行间有着数学的踪迹,使我们看到满眼绚丽多彩的数学洞天!

数学思想,使我们领悟到数学是用字母和符号谱写的美妙乐曲,充满着和谐的旋律,让人难以忘怀,难以割舍!

数学应用,给我们展示出了数学的神通广大,在各个领域与角落闪烁着人类智慧的火花!

数学建模,呈现出了人类文明亮丽的风景!特别是那呈现出的抽象彩虹——一个个精巧的数学模型,璀璨夺目,流光溢彩!

数学方法,像画卷一样描绘着各学科的异草奇葩般的景象,令人目不暇接!

数学史话,充满了诱人的前辈们的创造或再创造的心血机智,使人汲取了丰富的营养!

因此,我们可以说,你可以不信仰上帝,但不能不信仰数学。

从而,提高我国每一个人的数学文化水平及数学素养,是提高我国各个民族整体素质的重要组成部分,这也是数学基础教育中的重要目标。为此,笔者构思了这套丛书。

这套丛书是笔者学习张景中院士的教育数学思想,对一些数学素材和数学研究成果进行再创造并以此为指导思想来撰写的;是献给中学师生,企图为他们扩展数学视野、提高数学素养以响应张奠宙教授的倡议:建构符合时代需求的数学常识,享受充满数学智慧的精彩人生的书籍。

不积小流无以成江河,不积跬步无以至千里,没有积累便没有丰富的素材,没有整合创新便没有鲜明的特色,这套丛书的写作,是笔者在多年资料的收集、学习笔记的整理及笔者已发表的文章的修改并整合的基础上完成的。因此,每册书末都列出了尽可能多的参考文献,在此,衷心地感谢这些文献的作者。

这套丛书,作者试图以专题的形式,对中、小学中典型的数学问题进行广搜深掘来串联,并以此为线索来写作的。

这一册是《数学建模导引》。

数学建模(Mathematical Modelling)是近些年来随着计算机的普及而谈论得比较多的话题。一切现代科学技术的发展也紧紧地和数学建模联系在一起了。因为一切科学研究都要和模型打交道,模型是对原型的形象化或模拟与抽象而来,是对原型的某(或某些)方面不失真的近似反映。而研究模型,少不了研究其间的空间形式与数量关系,因而这实际上就是要研究并恰当地建立各种各样的数学模型。

运用数学模型,不仅可以定性地研究事物的性质,而且可以定量地研究或描述事物的本质,使其数量化、精确化,这也正是现代科学技术发展的一个重要特征。因而,数学建模活动正在全世界形成一股热潮,这股热潮使得学校教育形成了鲜明的时代特色。例如,强调让学生通过"做数学"来学习数学是近些年来国际上进行数学教育的特色之一,因为数学建模的过程就是一种做数学的过程。

根据中学的数学教育目标,在中学阶段就开始学习并探讨研究有关数学建模的问题是

非常必要的，也是十分重要的。在中学数学教学中，介绍数学模型的运用与怎样进行数学建模是学习、探讨研究数学建模的重要途径。显然，通过实例来介绍数学模型的运用，通过实例来介绍怎样进行数学建模，说明如何分清实际问题的主要因素和次要因素，恰当地抛弃次要因素，提出合理的假设，建立相应的数学模型，然后将所得解与实际问题比较，进一步修改、完善模型，使问题得到完满的解决。这样的建模学习可以使读者清楚地认识到：数学建模就是实现实际问题向数学问题的转换，这既是推动数学有意义学习与数学发展的一种强有力的内驱力，又是数学应用研究的重要方面，也是"做数学"的实际行动。宋代诗人陆游讲得好："纸上得来终觉浅，绝知此事要躬行。"学习与研究数学建模也是如此。

进行数学建模教育，不仅是各类高等院校数学教学的重要内容，也应是中学数学日常教学工作的一项内容。以建模思想指导教育改革，用建模观点进行教材分析，学习建模实例充实教学内容，可以落实日常语言变为数学语言的训练，可以落实使每个人从青少年起就受到将实际问题抽象成数学问题的训练，促使学习者学会用数学的眼光透视问题，从数学的角度去思考周围的实际问题，培养用数学的意识，学会用数学的理论、思想方法分析处理问题，培养数学建模能力，落实素质教育的目标。通过数学建模教育，学习者将从不同侧面较快地提高其想象力、洞察力等，逐渐养成一种一眼就能抓住问题本质的习惯，为今后更好地从事创造性学习与工作打下坚实的基础。

数学建模不仅是数学走向应用的必由之路，而且是启迪数学心灵的必然之路！

沈文选

2007 年 11 月于岳麓山下

# 目录
CONTENTS

## 第一章　数学模型

目录 CONTENTS

## 第二章　数学建模的意义



## 第三章　数学建模的逻辑思维方法

## 第四章 数学建模的非逻辑思维方法



## 第五章 数学建模的机理分析方法



# 目录
# CONTENTS

目录 CONTENTS



## 第六章 数学建模的数据分析方法

## 第七章 数学建模的学科知识方法



# 目录
CONTENTS

# 第一章　数学模型

世界上一切事物都按照一定的客观规律运动、变化着，事物之间亦彼此联系和制约着，无论是从浩瀚的宇宙到渺小的粒子，还是从自然科学到社会科学．事物的变化规律和事物之间的联系规律，必然蕴含着一定的数量关系．所以认为数理（相对于物理、生理、心理、事理等五大学科群而言）是宇宙的根本原理之一，这种思想远自古希腊时期就有了；而运用数学来反映、描述和模拟并阐明各种各样的现象，以及运用数学预测、决策来促进社会生产力的发展与整个人类的文明史一样经历了艰苦曲折的漫长道路，数学是人们认识世界和改造世界必不可少的重要工具，特别是在科学技术飞跃发展的今天，这一点就显得更为重要．

数学本身也在描述、阐明现象与广泛应用中得到了极大的发展，用至今天成为人类社会通用的科学语言．一个学科的内容能用数学来分析和表示，这是该学科精密化和科学化的一种表现．利用数学这个有效的工具，可以深刻地认识客观现象的本质，预测未来，促进该学科的发展，数学已是打开各类机会大门的钥匙，已是我们这个时代的看不见的文化．它还以直接的和基本的方式为商业、财政、国防，甚至人类健康等各行各业作出贡献，以至于有“高新技术本质上是一种数学技术”，“现代化在某种意义上说就是数学化”等说法，“数学技术”，“数学化”实际上就是运用数学表达式描述或模拟各种各样的自然或社会现象的本质特征，实际上也就是善于运用数学模型，还能灵活适当地建立数学模型的代名词．数学模型的大量建立与运用使得人类社会的生活、生产、科研发生了翻天覆地的变化．数学模型使得人类社会生活、生产、科研与数学结下了不解之缘．

## 1.1　模型与数学模型

所谓模型就是采用某种形式来近似地描述或模拟所研究的对象或过程的一种结构．

模型大体可分为两类：实物模型（具体模型）和理论模型（抽象模型）．

### 1.1.1　实物模型与理论模型

实物模型又可以分为模拟模型和缩尺（肖像）模型两种．

模拟模型是用其他现象或过程来描述所研究的现象或过程，用模型性质来代表原来的性质．例如，可用电流模拟热流、流体的流动，用流体系统模拟车流等等．

模拟模型可再分成直接模拟和间接模拟．

直接模拟是指模拟模型的变量与原现象的变量之间存在一一对应的关系．例如，用电网络模拟热传导系统，那么静电容量、电阻、电压、电流分别与热容量、热阻、温压、热流量相对应．由于电系统的参数容易测量和改变，经常用电系统来模拟机械、热学等各种现象和过程．

间接模拟模型的变量与原现象之间不能建立一一对应的关系．虽然如此，但有时间接模型却能非常巧妙地解决一些复杂问题．下面举所谓斯坦纳（Steiner）问题为例，设有若干个工地，为解决相互间的交通问题，将在工地之间修建公路，问线路如何选择使公路的总长度最

少,参见图 1.1.

用其他的方法来解决是比较麻烦的,我们可以采用如下的办法模拟.将几个钉子按照工地之间的距离成比例地钉在木板上,代表各个工地,再将这块带钉子的木板浸入肥皂液中,然后细心地提出液面,肥皂膜将联结在钉间,由于肥皂膜要取其势能最小的形状,所以使联结在各钉间的肥皂膜总长度最小.像这样的例子还有不少,如将某范围的地面画在质量均匀的板上,再沿边界切开,可用称地图板的质量的办法,按此例计算该范围的面积.

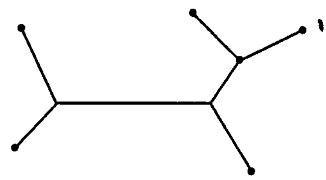


图 1.1

缩尺模型是将真实事物按比例缩小或放大的复制品,如飞机模型和风洞是飞机在空中飞行的缩尺模型,船舶模型和水槽是船舶在水中行驶的缩尺模型;在模型实验,化工工艺过程的化学实验等等都是缩尺模型.在科技工程中使用缩尺模型还是比较多的.它的优点是对于许多复杂的现象,当很难建立它的精确数学模型进行理论上的分析计算,也找不到适当的模拟模型,而实物又太大或太小,无法直接实验时,采用缩尺模型进行实验是合适的.这种缩尺模型分享原实物的许多性质:它可能有相同的外貌,同样的颜色,甚至和所表示的物体有类似的功能.例如,模型帆船能漂浮并能靠风力推进,由于缩尺模型并不具有“母本”实物的所有性质,因而这种模型操作方便或能确切控制,原物体的大小、质量等特征会妨碍我们对实物进行工作,而缩尺模型则易于掌握,在操纵和研究模型中,可以获得关于母本实物的信息,例如,可用风洞中的模型飞机来决定超音速客机的航空特征,若造一架大小一样的飞机并在风洞中进行测试的办法的代价是惊人的,因而缩尺模型在许多技术领域和工业研究中是一种很有价值的工具.但是缩尺模型的办法也存在不少问题,如这种方法还是相当费时间、人力、财力,按缩尺模型得到的结果也不一定就是原实物或现象的结论,其结果还要利用相似理论加以处理,这是很麻烦的.

理论模型既可以是实物、现象、过程的抽象表示形式,也可以是我们所要描述的对象以及分析它们行为方式的抽象表示形式.一个物体、一种现象、某一过程的理论模型是观察者心目中确切表示该物体、现象、过程的一组规则和定律.例如,对土木工程师来说,懂得在荷载下的梁的挠度(弯曲)是重要的.人们可以选一根梁加以荷载并测量其挠度,但这样做费时又费钱.如果有一个受载下梁的理论模型将更为方便.经过实验、观察和计算,就可以决定这种理论模型,即

$$\text{挠度} = \frac{PL^3}{48EI}$$

其中 $L$—— 梁的长度;

$P$—— 荷载;

$E$—— 与梁的材料有关的弹性模量;

$I$—— 与梁的横截面积有关的惯性矩.

在上述例子中,挠度的模型(理论模型) 是一个公式.实际上,大多数重要的公式就是描述的现象的理论模型,因而在科学研究和解决各实际问题中,理论模型是不可缺少的工具.

### 1.1.2 数学模型

当一个对象的理论模型表示以数学表示其一组规则和定律时,一个数学模型就呈现出

来.例如,上述的挠度模型就是一个数学模型.因此,数学模型是关于部分现实世界和为一种特殊目的而作的一个抽象的、简化的、近似表达对象的一种数学结构.

具体说来,数学模型就是为了某种需要或目的,用字母、数字及其他数学符号建立起来的诸如等式或不等式以及图表、图象、框图等描述客观事物的特征及其内在联系的数学结构表达形式.

由于数学模型是针对或参照某种事物系统的主要特征、主要关系,用形式化的数学语言,抽象概括地、简化近似地表述出来的一种数学结构,所以,从广义上来说,数学模型是从现实世界中抽象出来,对客观事物的某些数学属性的一个近似反映.例如众所周知的哥尼斯堡七桥问题便是大数学家欧拉成功地构造出数学模型得以解决的光辉例子.如果从狭义上来理解,数学模型是由现实问题基本属性抽象出来成为一种数学结构的简化近似反映.

**例 1**　考虑两个物体之间的相互作用时,对于它们之间的相互吸引这种属性,可用数学式子(即牛顿万有引力公式)

$$F = k\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

来表示吸引力与其他因素之间的规律,这就是物质相互吸引的数学模型.这个数学模型及其理论是基于大量天文观测数据由牛顿在 17 世纪创立的,它解决了大量天文学上的问题.

**例 2**　一个线性弹簧,考查它的形变($x$)与弹力($F$)之间的关系,也可用数学式子(虎克定理)

$$F = -Kx$$

来表示它们之间的规律,负号表示形变的方向与弹力方向相反.这个数学式子就是它的数学模型.这个模型表示了物理学中的一条重要规律.

一个系统是指按着一定方式互相连接起来的元素的集合.一个系统范围的决定主要取决于我们研究的范围、目的和任务.一般把不属于系统的部分称为环境,从环境向该系统流动的信息称为输入,反之从系统向环境流动的信息称为输出.建立一个系统的数学模型,一般来说是要建立系统输入输出之间的关系式.有时也将所关心的状态变量包含在数学模型之内.要指出的是一个系统的数学模型不是唯一的,要求的近似程度不同,数学模型也有所不同.

**例 3**　考察一个质量为 $m$ 的物体受一个力 $F$ 作用时的运动状况,牛顿第二定律

$$F = ma = m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$$

(其中 $a$ 表加速度,$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$ 是位移 $x$ 对时间 $t$ 的二次求导)表达出了力 $F$ 和位移 $x$ 之间的规律,这就是它的数学模型.如果物体速度不大,因而空气阻力(摩擦力)很小可以略去不计,这个数字还是比较精确的.若速度 $v$ 较大,就必须考虑空气摩擦力这个因素.由实验得知,粘性阻尼的摩擦力与速度 $v$ 的平方成正比.于是数学式

$$F = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + kv^2$$

(其中$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$是速度 $v$ 对时间 $t$ 求导,下同)是该系统较为精确的数学模型.如果速度值大得接近光速时,由相对论得知,此时质量就不能看成常数.于是得到更进一步的数学模型