舰船磁场分析计算

周耀忠　张国友　编著

国防工业出版社
http://www.ndip.cn

舰船磁场分析计算

周耀忠　张国友　编著

国防工業出版社
·北京·

内 容 简 介

本书内容包括与舰船磁场计算有关的常用方法，如各种坐标系中的分离变量法、边界积分法、磁体模拟法、有限元素法、积分方程法等。为了体系完整，并便于读者使用，书中首先介绍了电磁场方程、矢量分析及场论、电磁学单位制，以及线性代数方程组的解法等。书的最后介绍了相似理论和磁性船模的制作原则及要求。

本书体系完整，内容丰富，重点突出，推导详细。可作为舰船消磁专业本科生和研究生的教学用书，亦可供研究、设计及生产单位的有关人员阅读参考。

图书在版编目(CIP)数据

舰船磁场分析计算/周耀忠，张国友编著．—北京：国防工业出版社，2004.9

ISBN 7-118-03540-8

Ⅰ.舰... Ⅱ.①周...②张... Ⅲ. 船舶－磁场－计算方法 Ⅳ.U66

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 064106 号

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号)

(邮政编码 100044)

新艺印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 印张 16¾ 384 千字

2004 年 9 月第 1 版 2004 年 9 月北京第 1 次印刷

印数：1—3000 册 定价：25.00 元

前　　言

舰船磁场分析计算是舰船消磁专业的一门专业基础课，所用教材一直由本校消磁教研室编写。现用教材是 1990 年出版的《舰船磁场计算与换算》。十多年来与本课程相关的电磁场数值计算方法、计算机应用等学科领域取得了长足的进步；本课程所涉及的内容无论在理论上还是在工程应用上都出现了许多新思想和新成果；通过这十几年的教学实践，我们对该课程在专业教学中的地位、作用、教材应具有的结构形式和内容等有了新的认识；同时，非消磁本科专业毕业的研究生也需要一套合适的舰船磁场计算方面的教材。因此，在这样的背景下进行了本次教材的编写，并定名为《舰船磁场分析计算》。

本教材的基本内容取材于 1990 年版的《舰船磁场计算与换算》，但对原教材做了较大的修改。主要有：

1. 将原教材体系重新进行调整：将圆柱体、球体、椭球体的磁场计算和谐波分析法归类为分离变量法；将半空间格林函数法和边界元法合并为边界积分法；将线性边值问题的等价变分等内容定名为有限元素法；将椭球阵列模拟法扩充为单独的一章，名为磁体模拟法。

2. 补充了一些内容：在第 1 章预备知识中补充了矢量分析、线性方程组的解法和电磁学单位制；在第 3 章边界积分法在舰船磁场计算中的应用中补充了等效原理；在第 4 章磁体模拟法中，从惟一性定理出发阐述了该方法的基本原理，并将其归结到磁场边值问题解法之列，还列举了可以模拟舰船磁场的各种物体的磁场计算公式；第 6 章积分方程法完全是新增加的内容。

3. 将近年来国内舰船磁场计算这一领域内的一些新思想、新成果以正文或例题、习题等形式融进了教材。

4. 删去了原教材中很少应用的一些内容，例如几种规则分布的磁荷的磁场计算等。

本教材主要对象是本科生，同时兼顾研究生的教学需求。根据不同的教学对象和教学时数在内容上可作适当的选择。

本教材第 2 章、第 3 章、第 4 章和第 6 章由周耀忠编写，第 1 章、第 5 章和第 7 章由张国友编写。编者的意图是使本教材在理论上有所提高，与实际结合更紧密，使读者受益更多。但限于编者水平，能否达此目的有待于实践检验。另外，教材中的不当或错误之处在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

2004 年 4 月于海军工程大学

目　录

第 1 章　预备知识

本章 1.3 节和 1.4 节选自《工程数学》中的向量分析，1.5 节选自《电磁学》中的电磁学单位制，1.6 节选自《计算方法》。这些内容都带有专题性质，在这里列出是为读者提供一些方便：在学习后面的章节时，若需要这些方面的知识，可以在这里很方便地找到，而不必去翻阅其他书籍。1.1 节和 1.2 节是在《电磁场》的基础上进行的归纳和综合。1.7 节磁荷是类比“电荷”、“电场”等概念建立起来的。

1.1　电磁场方程

在《电磁场》课程中已经得出结论：在静止的媒质中，电磁场基本方程组的积分形式为

$$\left.\begin{aligned}&\oint_l \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_S \boldsymbol{\delta}_c\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}+\int_S \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}+\int_S \rho\boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}\\&\oint_l \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}\\&\oint_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=0\\&\oint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=q\end{aligned}\right\}\tag{1-1}$$

其微分形式为

$$\left.\begin{aligned}&\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{\delta}_c(\rho\boldsymbol{v})+\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\\&\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\\&\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0\\&\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho\end{aligned}\right\}\tag{1-2}$$

对于静态场，由于其场量不随时间变化，方程形式更为简化。

1.1.1　静电场

静电场方程的积分形式为

$$\left.\begin{aligned}&\oint_l \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=0\\&\oint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=q=\int_V \rho \mathrm{d}V\end{aligned}\right\}\tag{1-3}$$

其中

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{P}+\boldsymbol{E}$$

对于各向同性的线性电介质有

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$$

静电场方程的微分形式为

$$\left.\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{E}=0\\ \nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho\end{aligned}\right\}\tag{1-4}$$

在两种不同介质分界面上场量必须满足的边界条件为

$$\left.\begin{aligned}&E_{1t}=E_{2t}\\ &D_{2n}-D_{1n}=\sigma\end{aligned}\right\}\tag{1-5}$$

静电场是无旋场，可以用电位函数φ描述

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi\tag{1-6}$$

在各向同性的线性介质中

$$\nabla\cdot(\varepsilon\nabla\varphi)=-\rho\tag{1-7}$$

对于均匀介质，有泊松方程

$$\nabla^2\varphi=\nabla\cdot(\nabla\varphi)=-\frac{\rho}{\varepsilon}\tag{1-8}$$

场中无电荷分布($\rho=0$)处，式(1-8)变为拉普拉斯方程

$$\nabla^2\varphi=0\tag{1-9}$$

两种不同介质分界面上的边界条件也可用电位函数来表示

$$\left.\begin{aligned}&\varphi_1=\varphi_2\\ &\varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}-\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}=\sigma\end{aligned}\right\}\tag{1-10}$$

1.1.2 恒定磁场

恒定磁场基本方程的积分形式为

$$\left.\begin{aligned}\oint_S\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0\\ \oint_l\boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l}=I\end{aligned}\right\}\tag{1-11}$$

其中

$$\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{H}+\mu_0\boldsymbol{M}$$

对于各向同性的线性介质有

$$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$$

恒定磁场基本方程的微分形式为

$$\left.\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0\\ \nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{\delta}\end{aligned}\right\}\tag{1-12}$$

如果两种不同介质的分界面上不存在自由面电流，则场量应满足下述边界条件

$$\left.\begin{aligned}B_{1n}=B_{2n}\\ H_{1t}=H_{2t}\end{aligned}\right\}\tag{1-13}$$

在没有电流分布($\boldsymbol{\delta}=0$)的区域，可以引入标量磁位φ_{m}来描述磁场

$$\boldsymbol{H}=-\nabla\varphi_{\mathrm{m}}\tag{1-14}$$

在各向同性的线性介质中

$$\nabla\cdot(\mu\nabla\varphi_{\mathrm{m}})=0\tag{1-15}$$

对于均匀介质，φ_{m}满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2\varphi_{\mathrm{m}}=0\tag{1-16}$$

两种媒质分界面上的边界条件也可用标量磁位来表示

$$\left.\begin{aligned}&\varphi_{\mathrm{m1}}=\varphi_{\mathrm{m2}}\\ &\mu_1\frac{\partial\varphi_{\mathrm{m1}}}{\partial n}=\mu_2\frac{\partial\varphi_{\mathrm{m2}}}{\partial n}\end{aligned}\right\}\tag{1-17}$$

1.2 边值问题及其分类

电磁场问题的分析计算往往都归结为某种偏微分方程的求解。例如均匀媒质内静电场和恒定磁场的分析计算就可归结为求解相应位函数的泊松方程或拉普拉斯方程。一般地，称以某种偏微分方程描述的场的求解问题为边值问题。

为了解偏微分方程并得到正确的解答，还必须给出定解条件，其中最主要的条件是整个求解场域边界上的函数值或其法向导数值。根据所给出的边界条件形式的不同，边值问题分为三种情况。

1. 给定的是整个场域边界上的函数值

$$\varphi\big|_S=\varphi(s)$$

其中$\varphi(s)$为边界点 s 的已知函数。这称为第一类边界条件，对应的边值问题称为第一类边值问题。

2. 给定的是函数在边界上的法向导数值

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_S=f(s)$$

其中 $f(s)$ 为边界点 s 的已知函数。这称为第二类边界条件，对应的边值问题称为第二类边值问题。

3. 给定的是边界上的函数与其法线导数的线性组合

$$\left[\frac{\partial\varphi}{\partial n}+f_1(s)\varphi\right]\bigg|_S=f_2(s)$$

其中 $f_1(s)$ 和 $f_2(s)$ 均为边界点 s 的已知函数。这称为第三类边界条件或混合边界条件，对应的边值问题称为第三类边值问题或混合边值问题。

当求解场域中存在多种介质时，还必须引入不同介质分界面上的边界条件作为定解条件。以用标量磁位 φ_{m} 描述的恒定磁场为例，媒质 μ_1 与媒质 μ_2 的分界面上的边界条件

$$\varphi_{\mathrm{m1}}\big|_S=\varphi_{\mathrm{m2}}\big|_S$$

$$\mu_1\frac{\partial\varphi_{\mathrm{m1}}}{\partial n}\bigg|_S=\mu_2\frac{\partial\varphi_{\mathrm{m2}}}{\partial n}\bigg|_S$$

就应作为定解条件。

另外，如果边值问题所定义的场域扩展为无限空间，则必须给出无限远处的边界条件。例如在静电场中，若场源分布在有限区域，则可规定无限远处的电位为零，即

$$\varphi\to 0\quad(r\to\infty)\quad 或\quad \varphi_\infty=0$$

第一类、第三类边值问题的解惟一。从数学上说第二类边值问题的解有无限多，它们之间相差一个任意常数，但解的梯度仍然惟一。在电磁场问题中，方程的待求函数一般为场的位函数，而场量(例如电场强度、磁场强度等)仅与位函数的梯度有关，就这个意义而言，即使是第二类边值问题，其对应的场的分布也是惟一的。

总之，边值问题的解所对应的场的分布是惟一的。

1.3 向量积、梯度、散度和旋度的计算公式

1.3.1 向量积

1. 两个向量之积

设有两个向量 $\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k}$， $\boldsymbol{B}=B_x\boldsymbol{i}+B_y\boldsymbol{j}+B_z\boldsymbol{k}$

则

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$$

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=(A_yB_z-A_zB_y)\boldsymbol{i}+(A_zB_x-A_xB_z)\boldsymbol{j}+(A_xB_y-A_yB_x)\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$$

2. 三个向量之积

设有三个向量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$，则

(1) 点积

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$$

(2) 矢积

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A})-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$$

1.3.2 梯度、散度和旋度的基本公式

设 p、q 都是常数，而 ϕ、φ、$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 都是点 $\boldsymbol{M}$ 的函数，且满足下列各式成立时所需要的条件，则关于梯度、散度和旋度有下列 15 个基本公式。

(1) $\mathrm{grad}(p\phi+q\varphi)=p\,\mathrm{grad}\phi+q\,\mathrm{grad}\varphi$

(2) $\mathrm{div}(p\boldsymbol{A}+q\boldsymbol{B})=p\,\mathrm{div}\boldsymbol{A}+q\,\mathrm{div}\boldsymbol{B}$

(3) $\mathrm{rot}(p\boldsymbol{A}+q\boldsymbol{B})=p\,\mathrm{rot}\boldsymbol{A}+q\,\mathrm{rot}\boldsymbol{B}$

(4) $\mathrm{grad}F(\phi)=F'(\phi)\mathrm{grad}\phi$

(5) $\mathrm{grad}(\phi\varphi)=\phi\,\mathrm{grad}\varphi+\varphi\,\mathrm{grad}\phi$

(6) $\mathrm{div}(\phi\boldsymbol{A})=\phi\,\mathrm{div}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{grad}\phi$

(7) $\mathrm{rot}(\phi\boldsymbol{A})=\phi\,\mathrm{rot}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\times\mathrm{grad}\phi$

(8) $\mathrm{grad}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}\times\mathrm{rot}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\times\mathrm{rot}\boldsymbol{B}$

(9) $\mathrm{div}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{rot}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{rot}\boldsymbol{B}$

(10) $\mathrm{rot}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\,\mathrm{div}\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}\,\mathrm{div}\boldsymbol{A}$

(11) $\mathrm{divgrad}\phi=\Delta\phi$

(12) $\mathrm{rotgrad}\phi=0$

(13) $\mathrm{divrot}\boldsymbol{A}=0$

(14) $\mathrm{rotrot}\boldsymbol{A}=\mathrm{graddiv}\boldsymbol{A}-\Delta\boldsymbol{A}$

(15) $\mathrm{graddiv}\boldsymbol{A}=\mathrm{rotrot}\boldsymbol{A}+\Delta\boldsymbol{A}$

1.4 空间曲线坐标

直角坐标系并不是惟一的正交坐标系，在很多情况下，为了方便地分析计算磁场问题，需要采用其他形式的正交曲线坐标系。

1.4.1 曲线坐标

如果空间点的位置不用直角坐标系表示，而用三个有序数 q_1、q_2、q_3 来表示，三个这样的有序数完全确定一个空间点，空间的每一个点都对应着三个这样的有序数，则称 q_1、q_2、q_3 为空间点的曲线坐标。

曲线坐标 q_1、q_2、q_3 是空间点的单值函数，由于空间点又可用直角坐标 x、y、z 来确定，故曲线坐标 q_1、q_2、q_3 也都是直角坐标 x、y、z 的单值函数

$$\left.\begin{aligned}q_1 &= q_1(x,y,z)\\ q_2 &= q_2(x,y,z)\\ q_3 &= q_3(x,y,z)\end{aligned}\right\}$$

反过来，直角坐标x、y、z也都是曲线坐标q_1、q_2、q_3的单值函数

$$\left.\begin{aligned}x &= x(q_1,q_2,q_3)\\ y &= y(q_1,q_2,q_3)\\ z &= z(q_1,q_2,q_3)\end{aligned}\right\}$$

显然，下述三个方程(其中c_1、c_2、c_3为常数)

$$\left.\begin{aligned}q_1 &= q_1(x,y,z) = c_1\\ q_2 &= q_2(x,y,z) = c_2\\ q_3 &= q_3(x,y,z) = c_3\end{aligned}\right\}$$

分别表示函数q_1、q_2、q_3的等值曲面。当常数取不同值时上述三个方程表示三组等值曲面族，这三族曲面称为坐标曲面。在空间各点，每族等值曲面只有一个曲面经过，曲线坐标就是某三个q_1、q_2、q_3等值面的交点。

三族坐标曲面的两两交线称为坐标曲线。坐标曲面$q_2(x,y,z)=c_2$与$q_3(x,y,z)=c_3$相交而成的坐标曲线称为坐标曲线q_1。在此曲线上q_2与q_3保持常值不变，只有q_1在变化。如在图 1-1 中，曲面 $ABED$ 为q_2坐标面，曲面 $ABGC$ 为q_3坐标面，则其交线 AB 为q_1坐标曲线。类似地，曲线AC及曲线AD分别为q_2和q_3坐标曲线。

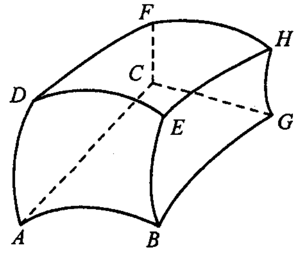

图 1-1　坐标曲面与坐标曲线

若在空间任一点处，坐标曲线都两两互相正交(即各坐标曲线在该点的切线互相正交)，则称这种坐标系为正交曲线坐标系。此时，相应的各坐标曲面也相互正交。

下面以q_1坐标曲线为例来研究坐标曲线的方向余弦。一般，空间任一微小段曲线弧所对应的$\mathrm{d}x$为

$$\mathrm{d}x = \frac{\partial x}{\partial q_1}\mathrm{d}q_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2}\mathrm{d}q_2 + \frac{\partial x}{\partial q_3}\mathrm{d}q_3$$

若考虑q_1坐标曲线上的一段曲线，则只有q_1在变化，而坐标q_2及q_3保持不变，即

$$\mathrm{d}q_2 = \mathrm{d}q_3 = 0$$

故

$$\mathrm{d}x = \frac{\partial x}{\partial q_1}\mathrm{d}q_1$$

类似地有

$$dy = \frac{\partial y}{\partial q_1} dq_1$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial q_1} dq_1$$

若 dl_1 为一段微小的 q_1 坐标曲线的弧长元，它在直角坐标系中的投影为 dx、dy、dz，则 q_1 坐标曲线的方向余弦为

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha_1 &= \frac{dx}{dl_1} = \frac{\partial x}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dl_1} \\ \cos\beta_1 &= \frac{dy}{dl_1} = \frac{\partial y}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dl_1} \\ \cos\gamma_1 &= \frac{dz}{dl_1} = \frac{\partial z}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dl_1}\end{aligned}\right\}$$

同理，q_2 坐标曲线的方向余弦为

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha_2 &= \frac{dx}{dl_2} = \frac{\partial x}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dl_2} \\ \cos\beta_2 &= \frac{dy}{dl_2} = \frac{\partial y}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dl_2} \\ \cos\gamma_2 &= \frac{dz}{dl_2} = \frac{\partial z}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dl_2}\end{aligned}\right\}$$

q_3 坐标曲线的方向余弦为

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha_3 &= \frac{dx}{dl_3} = \frac{\partial x}{\partial q_3}\frac{dq_3}{dl_3} \\ \cos\beta_3 &= \frac{dy}{dl_3} = \frac{\partial y}{\partial q_3}\frac{dq_3}{dl_3} \\ \cos\gamma_3 &= \frac{dz}{dl_3} = \frac{\partial z}{\partial q_3}\frac{dq_3}{dl_3}\end{aligned}\right\}$$

由向量分析可知，若有

$$\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2 = 0$$

则说明 q_1 坐标曲线与 q_2 坐标曲线相互正交。将 q_1、q_2 坐标曲线的方向余弦代入上式得

$$\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\frac{\partial x}{\partial q_2} + \frac{\partial y}{\partial q_1}\frac{\partial y}{\partial q_2} + \frac{\partial z}{\partial q_1}\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)\frac{dq_1}{dl_1}\frac{dq_2}{dl_2} = 0$$

因为$\dfrac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}l_1}$及$\dfrac{\mathrm{d}q_2}{\mathrm{d}l_2}$不为零，故若括号内的量为零，则说明$q_1$与$q_2$坐标线相互正交。

由此可得，曲线坐标系正交的充要条件是

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial q_1}\frac{\partial x}{\partial q_2}+\frac{\partial y}{\partial q_1}\frac{\partial y}{\partial q_2}+\frac{\partial z}{\partial q_1}\frac{\partial z}{\partial q_2}=0\\ \frac{\partial x}{\partial q_1}\frac{\partial x}{\partial q_3}+\frac{\partial y}{\partial q_1}\frac{\partial y}{\partial q_3}+\frac{\partial z}{\partial q_1}\frac{\partial z}{\partial q_3}=0\\ \frac{\partial x}{\partial q_3}\frac{\partial x}{\partial q_2}+\frac{\partial y}{\partial q_3}\frac{\partial y}{\partial q_2}+\frac{\partial z}{\partial q_3}\frac{\partial z}{\partial q_2}=0\end{aligned}\right\}$$

1.4.2 坐标曲线的弧微分及拉梅系数

一般的空间曲线的弧微分公式为

$$\mathrm{d}l=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2+(\mathrm{d}z)^2}$$

在坐标曲线q_1上只有q_1在变化，而$\mathrm{d}q_2=\mathrm{d}q_3=0$，故有

$$\mathrm{d}x=\frac{\partial x}{\partial q_1}\mathrm{d}q_1$$

$$\mathrm{d}y=\frac{\partial y}{\partial q_1}\mathrm{d}q_1$$

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial q_1}\mathrm{d}q_1$$

用$\mathrm{d}l_1$表示坐标曲线q_1的弧微分，则有

$$\mathrm{d}l_1=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2}\,\mathrm{d}q_1=H_1\mathrm{d}q_1$$

同理可得坐标曲线q_2及q_3的弧微分为

$$\mathrm{d}l_2=H_2\mathrm{d}q_2$$
$$\mathrm{d}l_3=H_3\mathrm{d}q_3$$

其中H_1、H_2、H_3称为拉梅系数，且

$$\left.\begin{aligned}H_1=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2}\\ H_2=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)^2}\\ H_3=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q_3}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q_3}\right)^2}\end{aligned}\right\}$$

在正交曲线坐标系中，以 $\mathrm{d}l_1$ 与 $\mathrm{d}l_2$ 为两邻边的小面元近似为矩形，其面积为

$$\mathrm{d}S = \mathrm{d}l_1 \mathrm{d}l_2 = H_1 H_2 \mathrm{d}q_1 \mathrm{d}q_2$$

以 $\mathrm{d}l_1$、$\mathrm{d}l_2$ 与 $\mathrm{d}l_3$ 为正交三邻边的小体积元近似为正方体，其体积为

$$\mathrm{d}V = H_1 H_2 H_3 \mathrm{d}q_1 \mathrm{d}q_2 \mathrm{d}q_3$$

1.4.3 正交曲线坐标系中梯度、散度、旋度与调和量的表达式

1. 梯度的表达式

数性函数 $u(q_1, q_2, q_3)$ 的梯度 ∇u 在坐标曲线 q_1 某点处切线方向上的投影，就等于函数 u 沿这个方向的方向导数，也等于函数 u 在该点对坐标曲线 q_1 的弧长 l_1 的偏导数，即

$$(\nabla u)_{q_1} = \frac{\partial u}{\partial l_1} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial u}{\partial q_1}$$

同理有

$$(\nabla u)_{q_2} = \frac{\partial u}{\partial l_2} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial u}{\partial q_2}$$

$$(\nabla u)_{q_3} = \frac{\partial u}{\partial l_3} = \frac{1}{H_3} \frac{\partial u}{\partial q_3}$$

由此便得到了梯度向量 ∇u 在相互正交的三个坐标曲线上的投影，也就是得到了梯度向量。

2. 散度的表达式

如果向量 $\boldsymbol{A}$ 在三个坐标曲线上的投影 A_{q_1}、A_{q_2}、A_{q_3} 已知，可根据向量散度的定义来求其在正交曲线坐标系中的表达式。由定义可知

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_S A_n \mathrm{d}S}{\Delta V}$$

式中　ΔV 为含有欲求散度点的小体积元的体积，分子上的面积分则表示流出体积元全部外表面的向量 $\boldsymbol{A}$ 的通量。

选小体积元如图 1-2 所示，则向量穿出左右两面的通量为

$$(A_{q_1} \mathrm{d}l_2 \mathrm{d}l_3)|_{q_1+dq_1} - (A_{q_1} \mathrm{d}l_2 \mathrm{d}l_3)|_{q_1} =$$
$$[(H_2 H_3 A_{q_1})|_{q_1+dq_1} - (H_2 H_3 A_{q_1})|_{q_1}]\mathrm{d}q_2 \mathrm{d}q_3 =$$
$$\frac{\partial (H_2 H_3 A_{q_1})}{\partial q_1} \mathrm{d}q_1 \mathrm{d}q_2 \mathrm{d}q_3$$

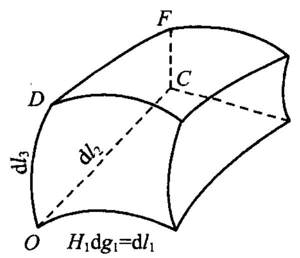

图 1-2　体积元