高等数学学习指导

主编 米洪海
副主编 卢玉文 于新凯 宋珍
主审 侯家玺

天津科学技术出版社

高等数学学习指导

主　编　米洪海
副主编　卢玉文　于新凯　宋　珍
主　审　侯家玺

天津科学技术出版社

内 容 提 要

本书是与同济大学数学教研室主编的《高等数学》上、下册（第四版）配合使用的学习指导教材。全书以章为单元，每单元由重点内容、学习指导、例题分析、单元检测四部分构成。该书特点鲜明，取材广泛，它既不同于一般的题解，也不同于复习资料；有助于学生加深对高等数学理论的理解和掌握，提高解题能力与技巧，从而全面提高数学素质。

本书是工科院校本科大学生学习高等数学课程的极有价值的参考书，同时也是报考工科硕士研究生和自学高等数学的读者的有益参考书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学学习指导/米洪海主编．－天津：天津科学技术出版社，1999.8（2000.8 重印）

ISBN7－5308－2694－8

Ⅰ．高…　Ⅱ．米…　Ⅲ．高等数学－学习参考资料
Ⅳ．013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（1999）第 46214 号

天津科学技术出版社出版
出版人：王树泽
天津市张自忠路 189 号　邮编 300020　电话（022）27306314
天津新华印刷二厂印刷
新华书店天津发行所发行

开本 787×1092　1/16　印张 20.5　字数 500 000
2000 年 8 月第 1 版第 2 次印刷
印数：4 101－8 600
定价：28.00 元

编写委员会名单

主　　编	米洪海
副主编	卢玉文　于新凯　宋　珍
编　　委	何　华　潘晓春　于新凯
	卢玉文　米洪海　宋　珍
主　　审	侯家玺

前　言

高等数学是高等工科院校一门十分重要的基础理论课程。掌握好高等数学的基本概念、基本理论和基本方法，对学生学好后续课程是至关重要的，同时对提高学生的综合素质，以及今后的发展起着重要作用。

要学好高等数学必须同时注重两个方面。其一是加强对基本知识的学习，做到概念清、理论明、计算熟；其二是解题能力的训练与培养。基于这种考虑，我们根据长期的教学实践，参考了大量有关资料，编写了《高等数学学习指导》。该书与同济大学数学教研室主编的《高等数学》(第四版)相配合，以章为单元，每单元由重点内容、学习指导、例题分析和单元检测四部分构成，形成一个有机的整体。重点内容系统、扼要地总结了一个单元的基本知识，便于学生复习；学习指导，对重要概念、理论、方法进行有针对性地指导，便于学生加强对高等数学理论的深入理解和掌握；例题分析，通过对典型例题的剖析，归纳解题思路与技巧，培养学生分析问题和解决问题的能力；单元检测，为学生提供一个自我评价的客观标准。

该书有别于一般的题解与复习资料，是学生学习高等数学的一本实用辅导教材，同时也是准备报考研究生的同学在基础复习阶段的有益参考书。

参加本书编写的有：米洪海(第一、二、三章及综合检测)，卢玉文(第四、五、六章)，潘晓春(第七章)，何华(第八章)，于新凯(第九、十章)，宋珍(第十一、十二章)。编写工作由米洪海主持并统稿，卢玉文、于新凯、宋珍参加了统稿工作，侯家玺教授担任主审。

在本书编写过程中，得到河北工业大学主管校长任宝山教授、教务处长阎殿然教授、丁会利副教授的大力支持；高等数学教研室的教师们也给予很大帮助，在此一并表示衷心的感谢。

由于作者水平所限，书中难免存在错误与不妥之处，恳请读者批评指正。

编　者

1999.4

目　　录

第一章　函数与极限

一、重点内容

(一) 函数

1. 定义

设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集，如果对每个 $x \in D$，变量 y 按照一定的法则总有确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y = f(x)$. D 叫这个函数的定义域，x 叫自变量，y 叫因变量.

当 x 取数值 $x_0 \in D$ 时，与 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的函数值，记作 $f(x_0)$，数集 $W = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为函数的值域.

如果自变量在定义域内任取一个数值时，对应的函数值总是只有一个，这种函数称为单值函数，否则称为多值函数.

2. 函数的几种特性

(1) 有界性　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X \subset D$，如果存在数 K_1，使得 $f(x) \leqslant K_1$ 对任一 $x \in X$ 都成立，则称 $f(x)$ 在 X 上有上界，K_1 称为 $f(x)$ 在 X 上的一个上界. 如果存在数 K_2，使得 $f(x) \geqslant K_2$，对任一 $x \in X$ 都成立，则称 $f(x)$ 在 X 上有下界，K_2 称为 $f(x)$ 在 X 上的一个下界. 如果存在正数 M，使 $|f(x)| \leqslant M$，对任一 $x \in X$ 都成立，则称 $f(x)$ 在 X 上有界.

如果这样的 M 不存在，则称 $f(x)$ 在 X 上无界，即如果对于任何正数 M，总存在 $x_1 \in X$，使 $|f(x_1)| > M$，则称 $f(x)$ 在 X 上无界.

(2) 单调性　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I \subset D$，如果对任意 $x_1, x_2 \in I$，当 $x_1 < x_2$ 时，恒有 $f(x_1) < f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的；如果对任意 $x_1, x_2 \in I$，当 $x_1 < x_2$ 时，恒有 $f(x_1) > f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的. 单调增加和单调减少函数统称为单调函数.

(3) 奇偶性　设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果对任一 $x \in D$，恒有 $f(-x) = f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；如果对任一 $x \in D$，恒有 $f(-x) = -f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称；奇函数的图形关于原点对称.

(4) 周期性　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个不为零的数 l，使得对于任一 $x \in D$，有 $(x \pm l) \in D$，且 $f(x + l) = f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为周期函数. l 称为 $f(x)$ 的周期，通常所说周期函数的周期是指最小正周期.

3. 反函数

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D，值域为 W，对于任一数值 $y \in W$，D 上必有确定的数值 x 与 y 对应，这个数值 x 满足 $f(x) = y$，这样得到的函数(x 是 y 的函数) 称为 $y = f(x)$ 的反函

数,记作 $x=\varphi(y)$,原来的函数 $y=f(x)$ 称为直接函数.

4. **复合函数**

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1,函数 $u=\varphi(x)$ 在 D_2 上有定义,而 $W_2=\{u|u=\varphi(x),x\in D_2\}$,且 $W_2\subset D_1$,于是,对于任一 $x\in D_2$,通过 $u=\varphi(x)$ 有确定的 $u\in W_2$ 与之对应.由于 $W_2\subset D_1$,因此对这个 u 值,通过 $y=f(u)$ 有确定的 y 值与之对应.这样,对于任一 $x\in D_2$,通过 u 有确定的 y 值与之对应,从而得到一个以 x 为自变量、y 为因变量的函数,这个函数称为由函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数,记作 $y=f[\varphi(x)]$,而 u 称为中间变量.

5. **基本初等函数**

下列函数统称基本初等函数.

(1) 幂函数　$y=x^\mu$　(μ 是常数)

(2) 指数函数　$y=a^x$　(a 是常数,且 $a>0,a\neq1$)

(3) 对数函数　$y=\log_a x$　(a 是常数,且 $a>0,a\neq1$)

(4) 三角函数

正弦函数　$y=\sin x$　　余弦函数　$y=\cos x$

正切函数　$y=\tan x$　　余切函数　$y=\cot x$

正割函数　$y=\sec x$　　余割函数　$y=\csc x$

(5) 反三角函数

反正弦函数　$y=\mathrm{Arcsin}x$,主值 $y=\arcsin x$

反余弦函数　$y=\mathrm{Arccos}x$,主值 $y=\arccos x$

反正切函数　$y=\mathrm{Arctan}x$,主值 $y=\arctan x$

反余切函数　$y=\mathrm{Arccot}x$,主值 $y=\mathrm{arccot}x$

6. **初等函数**

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成,并可用一个式子表示的函数,称为初等函数.

7. **双曲函数与反双曲函数**

(1) 双曲函数

双曲正弦　$\mathrm{sh}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$　　双曲余弦　$\mathrm{ch}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

双曲正切　$\mathrm{th}x=\dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

(2) 反双曲函数

反双曲正弦　$y=\mathrm{arsh}x$　　反双曲余弦　$y=\mathrm{arch}x$

反双曲正切　$y=\mathrm{arth}x$

(二) 数列的极限

1. **数列的概念**

如果按照某一法则,有第一个数 x_1,第二个数 x_2,…,这样依次序排列着,使得对应着任何一个正整数 n 有一个确定的数 x_n,这列有次序的数

$$x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$$

叫做数列，记作$\{x_n\}$.

在数列$\{x_n\}$中任意抽取无限多项并保持这些项在原数列$\{x_n\}$中的先后次序，这样得到的一个数列称为原数列$\{x_n\}$的子数列(或子列)，记$\{x_{n_k}\}$.

2. **数列极限的定义**

如果数列$\{x_n\}$与常数a有下列关系：对于任意给定的正数ε(不论它多么小)，总存在正整数N，使得对于$n > N$时的一切x_n，不等式

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

都成立，则称常数a是数列$\{x_n\}$的极限，或称数列$\{x_n\}$收敛于a，记作$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$或$x_n \to a(n \to \infty)$；如果数列没有极限，则称数列是发散的.

3. **收敛数列的性质**

定理1 (极限的唯一性) 数列$\{x_n\}$不能收敛于两个不同的极限.

定理2 (收敛数列的有界性) 如果数列$\{x_n\}$收敛，则数列$\{x_n\}$一定有界.

定理3 (收敛数列与其子数列间的关系) 如果数列$\{x_n\}$收敛子a，则它的任一子数列也收敛，且极限也是a.

(三) 函数的极限

1. **函数极限的定义**

(1) 自变量趋于有限值时函数的极限　设函数$f(x)$在点x_0的某一去心邻域内有定义. 如果对子任意给定的正数ε(不论它多么小)，总存在正数δ，使得对于适合不等式$0 < |x - x_0| < \delta$的一切x，对应的函数值$f(x)$都满足不等式

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

则常数A就叫做函数$f(x)$当$x \to x_0$时的极限，记作$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$或$f(x) \to A(x \to x_0)$.

(2) 自变量趋于无穷大时函数的极限　设函数$f(x)$当$|x|$大于某一正数时有定义. 如果对于任意给定的正数ε(不论它多么小)，总存在着正数X，使得对子适合不等式$|x| > X$的一切x，对应的函数值$f(x)$都满足不等式

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

则常数A就叫做函数$f(x)$当$x \to \infty$时的极限，记作$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$或$f(x) \to A(x \to \infty)$.

(3) 单侧极限　分为以下4种：

$\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = A$或$f(x_0 + 0) = A$(表示$x$大于$x_0$而趋于$x_0$时$f(x)$的极限为$A$)，$A$叫做函数$f(x)$当$x \to x_0$时的右极限.

$\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = A$或$f(x_0 - 0) = A$(表示$x$小于$x_0$而趋于$x_0$时$f(x)$的极限为$A$)，$A$叫做函数$f(x)$当$x \to x_0$时的左极限.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$(表示$x$取正值无限增大时$f(x)$的极限为$A$).

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$(表示$x$取负值无限减小时$f(x)$的极限为$A$).

2. **函数极限的性质**

定理1 (极限的局部保号性) 如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，而且$A > 0$(或$A < 0$)，则存在点$x_0$的

某一去心邻域，当 x 在该邻域内时，$f(x) > 0$(或 $f(x) < 0$).

定理 2 如果在 x_0 的某一去心邻域内 $f(x) \geqslant 0$(或 $f(x) \leqslant 0$)，且 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，则 $A \geqslant 0$(或 $A \leqslant 0$).

定理 3 如果在 x_0 的某去心邻域内 $\varphi(x) \geqslant \psi(x)$，且 $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = A$，$\lim\limits_{x \to x_0} \psi(x) = B$，则 $A \geqslant B$.

定理 4 函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时极限存在的充分必要条件是左极限及右极限各自存在且相等.

3. 无穷小与无穷大

(1) 定义

无穷小定义 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有定义(或 $|x|$ 大于某一正数时有定义). 如果对于任意给定的正数 ε(不论它多么小)，总存在正数 δ(或正数 X)，使得对于适合不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$(或 $|x| > X$) 的一切 x，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x)| < \varepsilon$$

称函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$) 时为无穷小，记 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$($\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$).

无穷大定义 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有定义(或 $|x|$ 大于某一正数时有定义). 如果对于任意给定的正数 M(不论它多么大)，总存在正数 δ(或正数 X)，使得对于适合不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$(或 $|x| > X$) 的一切 x，对应的函数值 $f(x)$ 总满足不等式

$$|f(x)| > M$$

则称函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$) 时为无穷大.

(2) 性质

定理 1 在自变量的同一变化过程 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$) 中，具有极限的函数等于它的极限与一个无穷小之和；反之，如果函数可表示为常数与无穷小之和，则该常数就是这函数的极限.

定理 2 在自变量的同一变化过程中，如果 $f(x)$ 为无穷大，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小；反之，如果 $f(x)$ 为无穷小，且 $f(x) \neq 0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

定理 3 有限个无穷小的和也是无穷小.

定理 4 有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

推论 1 常数与无穷小的乘积是无穷小.

推论 2 有限个无穷小的乘积是无穷小.

(3) 无穷小的比较

① 定义 设 α、β 都是在同一个自变量的变化过程中的无穷小，且 $\alpha \neq 0$.

如果 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 0$，则说 β 是比 α 高阶的无穷小，记作 $\beta = o(\alpha)$.

如果 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = \infty$，则说 β 是比 α 低阶的无穷小.

如果 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$，则说 β 与 α 是同阶的无穷小.

如果 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0, k > 0$，则说 β 是关于 α 的 k 阶无穷小.

如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$，则说 β 与 α 是等价无穷小，记作 $\alpha \sim \beta$.

② 性质

定理 1　β 与 α 是等价无穷小的充分必要条件为 $\beta = \alpha + o(\alpha)$.

定理 2　设 $\alpha \sim \alpha'$，$\beta \sim \beta'$，且 $\lim \frac{\beta'}{\alpha'}$ 存在，则　$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}$.

4. 极限运算法则

定理 1　如果 $\lim f(x) = A$，$\lim g(x) = B$，则 $\lim[f(x) \pm g(x)]$ 存在，且

$$\lim[f(x) \pm g(x)] = A \pm B = \lim f(x) \pm \lim g(x)$$

定理 2　如果 $\lim f(x) = A$，$\lim g(x) = B$，则 $\lim[f(x) \cdot g(x)]$ 存在，且

$$\lim[f(x) \cdot g(x)] = AB = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$$

推论 1　如果 $\lim f(x)$ 存在，而 C 为常数，则

$$\lim[Cf(x)] = C\lim f(x)$$

推论 2　如果 $\lim f(x)$ 存在，而 n 是正整数，则

$$\lim[f(x)]^n = [\lim f(x)]^n$$

定理 3　如果 $\lim f(x) = A$，$\lim g(x) = B$，且 $B \neq 0$，则 $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ 存在，且

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$$

定理 4　（复合函数的极限运算法则）设函数 $u = \varphi(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限存在且等于 a，即 $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = a$，但在点 x_0 的某去心邻域内 $\varphi(x) \neq a$；又 $\lim\limits_{u \to a} f(u) = A$，则复合函数 $f[\varphi(x)]$ 当 $x \to x_0$ 时的极限也存在，且

$$\lim_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = \lim_{u \to a} f(u) = A$$

5. 极限存在准则及两个重要极限

(1) 极限存在准则

准则 I　如果数列 $\{x_n\}$、$\{y_n\}$ 及 $\{z_n\}$ 满足

① $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n \quad (n = 1,2,3,\cdots)$，

② $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = \lim\limits_{n \to \infty} z_n = a$.

则数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，且 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$.

准则 I′　如果函数 $f(x)$、$g(x)$ 及 $h(x)$ 满足

① 当 $x \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$　（或 $|x| > M$）时，有

$$g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$$

② $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} h(x) = A$

则　$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x)$ 存在，且等于 A.

准则 II　单调有界数列必有极限.

柯西极限存在准则　数列 $\{x_n\}$ 收敛的充分必要条件是：对于任意给定的正数 ε，存在正整数 N，使得当 $m > N$，$n > N$ 时，有

$$|x_n - x_m| < \varepsilon$$

(2) 两个重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1;\quad \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$$

(四) 函数的连续性与间断点

1. 定义

函数在点 x_0 处连续的定义　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义，如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，否则称 $f(x)$ 在 x_0 处间断.

函数在点 x_0 处左连续和右连续的定义　如果 $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=f(x_0-0)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 x_0 点左连续；如果 $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=f(x_0+0)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 x_0 点右连续.

函数在区间上连续的定义　如果函数 $f(x)$ 在某区间上每一点处都连续，则称 $f(x)$ 在该区间上连续. 如果区间包括端点，则 $f(x)$ 在右端点连续是指左连续，在左端点连续是指右连续.

函数在区间上一数连续的定义　设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果对任意给定的正数 ε，总存在正数 δ，使得区间 I 上的任意两点 x_1、x_2，当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$ 成立，则称 $f(x)$ 在区间 I 上是一致连续的.

间断点及其分类　函数 $f(x)$ 在 x_0 处间断也称 x_0 是 $f(x)$ 的间断点. 若 $f(x)$ 在间断点 x_0 处的左极限和右极限都存在，则称 x_0 是 $f(x)$ 的第一类间断点；不是第一类间断点的任何间断点称为第二类间断点.

2. 连续函数的运算

定理 1　有限个在某点连续的函数的和是一个在该点连续的函数.

定理 2　有限个在某点连续的函数的乘积是一个在该点连续的函数.

定理 3　两个在某点连续的函数的商是一个在该点连续的函数，只要分母在该点不为零.

定理 4　如果函数 $y=f(x)$ 在区间 I_x 上单调增加(或单调减少) 且连续，则它的反函数 $x=\varphi(y)$ 也在对应的区间 $I_y=\{y|y=f(x),x\in I_x\}$ 上单调增加(或单调减少) 且连续.

定理 5　设函数 $u=\varphi(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限存在且等于 a，即 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$，而函数 $y=f(u)$ 在点 $u=a$ 连续，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 当 $x\to x_0$ 时的极限也存在且等于 $f(a)$，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f(a)$.

定理 6　设函数 $u=\varphi(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续，且 $\varphi(x_0)=u_0$，而函数 $y=f(u)$ 在点 $u=u_0$ 连续，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在 $x=x_0$ 也是连续的.

3. 初等函数的连续性

(1) 基本初等函数在它们的定义域内都是连续的.

(2) 一切初等函数在其定义区间内都是连续的.

4. 闭区间上连续函数的性质

定理 1　(最大值和最小值定理) 在闭区间上连续的函数在该区间上一定有最大值和最小值.

定理 2　(有界性定理) 在闭区间上连续的函数一定在该区间上有界.

定理 3 （零点定理）设函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号，则在开区间(a,b)内至少存在一点 ζ，使 $f(\zeta)=0$.

定理 4 （介值定理）设函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续，且在端点处取不同的函数值 $f(a)=A$ 及 $f(b)=B$，则对 A 与 B 之间的任意一个数 C，在开区间(a,b)内至少有一点 ζ，使 $f(\zeta)=C$.

推论 在闭区间上连续的函数必取得介于最大值 M 与最小值 m 之间的任何值.

定理 5 （一致连续性定理）如果函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续，则它在该区间上一致连续.

二、学习指导

（一）关于函数的概念

函数反映事物运动与变化过程的数量关系，它是高等数学研究的主要对象. 因此，要全面、正确理解函数的有关概念.

1. 函数概念的两个要素

定义域 它是自变量的取值范围，是自变量与因变量能互相联系而构成函数关系的基本条件.

对应法则 它是自变量与因变量相互联系的纽带，是函数概念中的关键要素.

因此，两个函数相等的充要条件是它们的定义域相同且对应法则相同，而与变量的符号表示无关.

2. 函数的有界性问题

函数 $f(x)$ 是否有界与所论数集（含在定义域内）有关. 如 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间$(0,1)$内无界，而在区间$(1,2)$内有界. 若函数 $f(x)$ 在数集 X 上有界，则其界不是唯一的.

3. 函数的单调性问题

函数 $f(x)$ 的单调性与所论区间（含在定义域内）有关，如 $f(x)=x^2$ 在$(-\infty,0)$上单减，而在$(0,+\infty)$上单增.

函数 $f(x)$ 在区间 I_1 和 I_2 上都单增（或单减），不能得出 $f(x)$ 在 $\mathrm{I}_1\cup\mathrm{I}_2$ 上单增（或单减）的结论. 如 $f(x)=\begin{cases}1+x, & -1\leqslant x\leqslant 0\\ x, & 0<x\leqslant 1\end{cases}$ 在区间 $\mathrm{I}_1=[-1,0]$ 和 $\mathrm{I}_2=[0,1]$ 上都是单增的，但在 $\mathrm{I}_1\cup\mathrm{I}_2=[-1,1]$ 上却不是单增的.

4. 单调函数与单值函数的关系问题

单值函数不一定是单调函数，这是显然的；但单调函数必是单值函数吗?结论是否定的. 如函数

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<1\\ 1,2, & x=1\\ 2x, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$$

在$[0,2]$上单增，但不是单值函数.

单调函数必有单值反函数，不单调的函数一定没有单值反函数吗?结论是否定的. 如

$$f(x)=\begin{cases}-x, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ x-1, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$$

在[0,2]上不单调,但它存在单值反函数

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}-x, & -1\leqslant x\leqslant 0\\ x+1, & 0<x\leqslant 1\end{cases}$$

5. **周期函数的最小正周期的存在性问题**

通常所说周期函数的周期是指最小正周期,但不是任何周期函数都有最小正周期,如狄里克雷(Dirichlet)函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{为有理数}\\ 0, & x\text{为无理数}\end{cases}$$

是周期函数,且任何有理数都是其周期,但 $D(x)$ 没有最小正周期.

6. **初等函数问题**

(1) 分段函数与初等函数　分段函数很多属非初等函数,但也有些是初等函数.如函数

$$y=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

是一个分段函数,由于 $y=\sqrt{x^2}$,所以它由 $y=\sqrt{u}$ 与 $u=x^2$ 复合而成,因此这个分段函数就是初等函数.

(2) 幂指函数与初等函数　称形如 $y=u(x)^{v(x)}$ $(u(x)>0,u(x)\neq 1)$ 的函数为幂指函数.由于 $y=u(x)^{v(x)}=\mathrm{e}^{v(x)\ln u(x)}$,它是由 $y=\mathrm{e}^t,t=v(x)\ln u(x)$ 复合而成的,所以当 $u(x)$、$v(x)$ 为初等函数时,$y=u(x)^{v(x)}$ 一定为初等函数.

(二) 关于数列的极限

1. **$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的等价定义**

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 还可定义成:对于任意给定的正数 ε,总存在正整数 N,使得对于 $n>N$ 时的一切 x_n,不等式 $|x_n-a|<k\varepsilon$(其中 k 为确定的正数)都成立,则称 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限.

使用该等价定义证明某些数列极限存在问题可使表达更简捷.

2. **$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 与"数列 x_n 随 n 增大越来越接近 a"的区别**

首先,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 并不意味着 x_n 随 n 增大越来越接近于 a,如数列 $x_n=\dfrac{1+(-1)^n}{n}$,我们知道 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$,但 x_n 并不是随 n 的增大越来越接近于 0,而是时而等于 0,时而不等于 0 地接近 0.

另一方面,"数列 x_n 随 n 增大越来越接近 a"也不意味着 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.如数列 $x_n=1+\dfrac{1}{n}$,x_n 随 n 增大越来越接近于 0,但 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\neq 0$.

因此,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的定性描述应为"数列 x_n 随着 n 的无限增大而无限接近于常数 a".

3. **数列 x_n 的极限与其子列极限的关系**

我们知道,由子列极限存在不能推出原数列极限存在,一般地,由若干子列极限存在且相等也不能推出原数列极限存在,如数列

$$1,\frac{1}{2},-\frac{1}{3},1,\frac{1}{5},-\frac{1}{6},1,\frac{1}{8},-\frac{1}{9},\cdots$$

的子列 $x_{3k-1}=\dfrac{1}{3k-1}$，$x_{3k}=-\dfrac{1}{3k}$ 的极限都存在且相等，但原数列的极限不存在.

数列 x_n 的奇数项子列 x_{2k-1} 与偶数项子列 x_{2k} 都收敛于 a 的充分必要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

更一般的结论是：若 x_n 的 k 个子列都收敛于同一常数 a，且 k 个子列的指标集的并集恰为全体自然数集，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

4. 证明数列 $\{x_n\}$ 发散的常用方法

证明数列 $\{x_n\}$ 发散常采用下列方法：

① 找出 $\{x_n\}$ 的一个发散子列；

② 找出 $\{x_n\}$ 的两个有不同极限的子列.

如数列 $\{n+(-1)^n n\}$ 有一个发散的子列 x_{2k}，则 $\{n+(-1)^n n\}$ 发散. 数列 $\{(-1)^n\}$ 有两个有不同极限的子列 x_{2k-1} 和 x_{2k}，从而 $\{(-1)^n\}$ 是发散的.

5. 证明数列 $\{x_n\}$ 无界的常用方法

可以证明：数列 $\{x_n\}$ 无界的充分必要条件是它存在无穷大子列.

基于此结论，可得到证明数列无界的方法：找出 $\{x_n\}$ 的一个无穷大子列，如数列 $\{n+(-1)^n n\}$ 有一个无穷大子列 x_{2k}，则该数列无界.

6. 根据数列递推关系求数列极限的注意事项

设一数列由

$$x_1=1,x_{n+1}=1+2x_n\quad(n=1,2,\cdots)$$

给出. 若令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则由递推关系得 $a=1+2a$，于是 $a=-1$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-1$，结果显然与保号性相悖. 发生错误的原因在于没有判明数列 $\{x_n\}$ 的极限存在的情况下而令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. 这点要特别引起注意，在利用递推关系求极限前必须先设法证明数列极限存在，如利用极限存在准则等.

7. 极限存在准则的条件

准则 I 中的条件：$x_n\leqslant y_n\leqslant z_n\quad(n=1,2,\cdots)$ 和准则 II 中的单调性条件可分别减弱成：从某项开始满足 $x_n\leqslant y_n\leqslant z_n$ 和从某项开始数列是单调. 这由数列极限的定义很容易理解，这样可扩大准则的应用范围.

为应用上的方便，准则 II 通常分述成两部分：

① 单增有上界数列必有极限；

② 单减有下界数列必有极限.

（三）关于函数极限

1. 函数极限的等价定义

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的一个等价定义是：如果对于任意给定的正数 ϵ，总存在正数 δ，使得对于适合不等式 $0<|x-x_0|<k\delta$ 的一切 x 都有不等式

$$|f(x)-A|<l\epsilon$$

成立（其中 k、l 为确定的正数），则称 A 为 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限.

2. 函数极限与函数的性态

极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，反映函数$f(x)$当$x\to x_0$时的变化趋势，是函数的一种局部性质，因此，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$只与$f(x)$在$x_0$的某去心邻域内的函数值有关，而与其它点处的函数值无关. 这个去心邻域的半径可能很小，但也不影响考虑$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$，如

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{x^2-1}, & |x-1|\leqslant 10^{-10}\text{ 且 }x\neq 1\\ 2, & |x-1|>10^{-10}\end{cases}$$

则根据定义容易证明$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\dfrac{1}{2}$. 由此可进一步理解极限的$\varepsilon-\delta$定义. 其它类型的函数极限可类似去理解.

3. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 定义中的条件不等式 $0<|x-x_0|<\delta$

极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$的"$\varepsilon-\delta$"定义比较抽象，初学者自然提出的问题是：为什么不将定义中的条件不等式$0<|x-x_0|<\delta$写成$|x-x_0|<\delta$?即为什么要限制$x\neq x_0$?

如果将$0<|x-x_0|<\delta$改为$|x-x_0|<\delta$，则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$就与$f(x)$在$x_0$处是否有定义有关，这样就限制了极限工具的应用范围. 容易证明：

如果$f(x)$在x_0的某个邻域内有定义，对任意给定的正数ε，总存在正数δ，使得适合不等式$|x-x_0|<\delta$的一切x，都有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

则常数$A=f(x_0)$，进而$f(x)$在x_0处连续.

4. 函数极限与数列极限的区别与联系

(1) 数列$x_n=f(n)$的极限与函数$y=f(x)$的极限的区别

数列$x_n=f(n)$的自变量n的变化过程是间断的（只取正整数），且只有一种变化过程：$n\to+\infty$；一般地，函数$y=f(x)$的自变量x的变化过程是连续的，且变化过程共有六种：$x\to x_0$，$x\to x_0+0$，$x\to x_0-0$，$x\to\infty$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$.

(2) 数列极限与函数极限的联系　对函数$f(x)$

①当$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在时，$\lim\limits_{n\to\infty}f(n)$必定存在，且$\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$. 但当$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$不存在时，$\lim\limits_{x\to\infty}f(n)$可能存在.

某些有关数列极限问题通常转化成相应的连续自变量的函数极限问题，这样处理起来比较方便.

②（海因定理）$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$（或$\infty$）的充分必要条件是对于$x_n\to x_0(n\to\infty)$的任意数列$x_n$，$x_n\neq x_0$，都有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$（或$\infty$）.

（四）关于无穷小与无穷大

1. 无穷小与有界函数的区别与联系

(1) 无穷小定义中的不等式$|f(x)|<\varepsilon$，要求ε是任意小的正数. 因此，无穷小是指在自变量的某种变化过程中，对应的函数值的变化趋势（趋于零）；而有界函数定义中的不等式