水力机械流体力学系列丛书

SHUILIJIXIE
JISUAN LIUTI DONGLIXUE

水力机械
计算流体动力学

◎ 吴玉林　刘树红　钱忠东　著

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

水力机械流体力学系列丛书

水力机械
计算流体动力学

SHUILIJIXIE JISUAN LIUTI DONGLIXUE

◎ 吴玉林　刘树红　钱忠东　著

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本书为水力机械流体力学系列丛书之一。论述应用于水力机械和其他流体机械等方面的计算流体力学，偏重论述不可压缩流体的计算流体力学。主要介绍计算流体力学所应用的流体力学基本方程、湍流方程和湍流模型、不可压缩流体三维定常和非定常湍流的计算方法，包括有限差分法、有限元法和有限体积法等基本原理和基本公式。本书结合水力旋转机械的流动特点，讲述了用于旋转叶轮的流体力学基本公式和相应的数值离散公式。本书还介绍水轮机和水泵的三维定常湍流和非定常湍流的计算结果及其分析。此外，还介绍了不可压缩流体湍流的大涡模拟。

本书可作为水力机械、流体机械、叶轮动力机械、水利工程、建筑机械、化工工程、矿山工程、石油和天然气工程等专业本科生和研究生的教学及科研参考书。也可作为上述专业的工程技术人员的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

水力机械计算流体动力学/吴玉林，刘树红，钱忠东著．—北京：中国水利水电出版社，2007

（水力机械流体力学系列丛书）

ISBN 978-7-5084-4506-9

Ⅰ.水…　Ⅱ.①吴…②刘…③钱…　Ⅲ.水力机械—流体动力学—计算Ⅳ.TV136

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 040852 号

书　名	水力机械流体力学系列丛书 **水力机械计算流体动力学**
作　者	吴玉林　刘树红　钱忠东　著
出版　发行	中国水利水电出版社(北京市三里河路 6 号　100044) 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：sales@waterpub.com.cn 电话：(010)63202266(总机)、68331835(营销中心)
经　售	北京科水图书销售中心(零售) 电话：(010)88383994、63202643 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　版	中国水利水电出版社微机排版中心
印　刷	北京纪元彩艺印刷有限公司
规　格	787mm×1092mm　16 开本　17 印张　403 千字
版　次	2007 年 10 月第 1 版　2007 年 10 月第 1 次印刷
印　数	0001—3000 册
定　价	**39.00 元**

前言

本书为水力机械流体力学系列丛书之一。论述应用于水力机械和其他流体机械等方面的计算流体力学，偏重论述不可压缩流体的计算流体力学。由于计算流体力学的迅速发展，三维湍流的数值计算应用越来越广，所以本书主要讲述应用在水力机械领域的三维不可压缩湍流的数值计算。本书内容包括计算流体力学所应用的流体力学基本方程、湍流方程和湍流模型、不可压缩流体三维定常和非定常湍流的计算方法，包括有限差分法、有限元法和有限体积法等基本原理和基本公式。本书结合水力旋转机械的流动特点，讲述了用于旋转叶轮的流体力学基本公式和相应的数值离散公式。本书还介绍水轮机和水泵的三维定常湍流和非定常湍流的计算结果及其分析。此外，还介绍了不可压缩流体湍流的大涡模拟。

本书是在作者多年来教学和科研成果的基础上编写的。本书作者除了吴玉林、刘树红和钱忠东外，还有阎超、孙自祥、陈庆光、陈学纯、韩海、吴伟章、杨建明、徐朝晖、李永、唐学林、王德军、吴玉珍、唐宏芬和杨辅政等博士，以及张梁、刘宇、邵奇、吴墒锋、吴晓晶和朱莹等。没有他们多年来的合作和辛勤工作，这本书是不能编写成功的。在本书编写过程中，得到编者们所在的清华大学水利工程系和热能工程系的前辈和同事们的支持，也得到其他高校有关教师的帮助，陈铁军对书中的公式和插图进行了校对。本书得到了国家自然科学基金重点项目（编号：90410019）的资助。在此一并表示衷心的感谢。

三维湍流计算在水力机械学科的应用和发展越来越广泛。水力旋转机械中的流动具有固有的非定常性，通常可以分为两类：第一类为稳态运行条件下的非定常流，例如转动部件和静止部件间流动的相互干涉；第二类为非稳态运行条件下的非定常流，例如水力机械的快速启动过程和过渡过程。两类流动中都包括边界条件改变和自激作用与空化引起的非定常流动。所有非定常流都伴随着复杂的旋涡运动和相互作用。这些复杂的非定常周期和过

渡过程中的旋转湍流对机械的外特性有严重的甚至关键的影响。然而，现今的旋转流体机械设计都是针对稳定运行的工况进行的，对上述复杂流动的有效控制目前仍是国际难题。本书作者有幸参加了国家自然科学基金重点项目："巨型混流式水轮机组水力振动与稳定性研究"（编号：90410019）和"水力旋转机械中非定常流动及其控制的基础问题研究"（编号：10532010）的工作。本书是作者从事长期研究和该项研究的成果。

对于书中存在的缺点和错误，敬请读者批评指正。

作者

于"水沙科学和水利水电工程国家重点实验室"（清华大学）

2006年9月20日

目　　录

1 流体力学基本方程

在计算流体力学（Computational Fluid Dynamics，简称 CFD）中，计算控制方程为粘性流体力学的动力学方程和湍流力学中的动力学方程。由于考虑了粘性剪切力，粘性流体力学的动力学方程必然与理想流体的动力学方程不同。这些方程实际上就是经典力学的质量守恒定律、动量守恒定律和能量守恒定律在考虑了粘性流体的本构关系——广义牛顿粘性公式而推导出来的。

1.1 粘性流体力学的动力学方程

1.1.1 连续方程

连续方程是质量守恒定律对于运动流体的表达。由于不涉及力，因此不存在粘性流体和非粘性流体的差别。对于控制体$\forall$连续方程为

$$\iiint_{\forall} \frac{\partial \rho}{\partial t} \mathrm{d}\forall + \oiint_{A} \rho V_n \mathrm{d}A = 0 \tag{1.1}$$

式中 A——控制体$\forall$的全部闭封表面，即控制面；

ρ——流体的密度；

t——时间；

V_n——速度向量 $\boldsymbol{V}$ 在控制面 A 的法线向量 $\boldsymbol{n}$ 上的投影。

式（1.1）表明，由于密度的变化使控制体$\forall$内的质量增加，加上流出控制体$\forall$以外的质量等于 0。根据高斯公式，连续方程可以写成在控制体$\forall$上的积分形式：

$$\iiint_{\forall} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{V})\right] \mathrm{d}\forall = 0 \tag{1.2}$$

$$\iiint_{\forall} \left[\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} + \rho \nabla \cdot \boldsymbol{V}\right] \mathrm{d}\forall = 0 \tag{1.3}$$

式（1.1）、式（1.2）和式（1.3）是连续方程的用欧拉表达法表示的积分形式。由式（1.2）、式（1.3）的被积函数是连续的，$\forall$可以任选，那就可以马上得出用欧拉表达法表示的连续方程的微分形式：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{V}) = 0 \tag{1.4}$$

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} + \rho \nabla \cdot \boldsymbol{V} = 0 \tag{1.5}$$

对于定常流动$\frac{\partial \rho}{\partial t}=0$，即：

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \tag{1.6}$$

对于不可压缩流体 ρ=常数，即$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}=0$，得出：

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \tag{1.7}$$

即不可压缩流体的体积膨胀率为零。

1.1.2 动量方程

由于粘性切应力的存在，粘性流体的动量方程（又称运动方程）和无粘性流体的动量方程不同，后者称为欧拉方程，粘性流体的动量方程叫做 Navier—Stokes 方程（简称 N—S 方程）。根据动量守恒定律，可以得出对控制体$\forall$，用欧拉表达法表示的 N—S 方程的积分表达式：

$$\iiint_{\forall} \frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{V})\mathrm{d}\forall + \oint\!\!\oint_{A} \rho V_n \mathbf{V} \mathrm{d}A = \iiint_{\forall} \rho \boldsymbol{F} \mathrm{d}\forall + \iint_{A} \boldsymbol{\sigma}_n \mathrm{d}A \tag{1.8a}$$

$$\iiint_{\forall} \rho \frac{\mathrm{D}\mathbf{V}}{\mathrm{D}t}\mathrm{d}\forall = \iiint_{\forall} \rho \boldsymbol{F} \mathrm{d}\forall + \oint\!\!\oint_{A} \boldsymbol{\sigma}_n \mathrm{d}A \tag{1.8b}$$

式中 $\boldsymbol{F}$——单位流体所受的体积力；

$\boldsymbol{\sigma}_n$——流体中应力张量 $\boldsymbol{\tau}$ 在控制面 A 的法线向量 $\boldsymbol{n}$ 上的投影。

根据高斯积分公式：

$$\oint\!\!\oint_{A} \boldsymbol{\sigma}_n \mathrm{d}A = \iiint_{\forall} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \mathrm{d}\forall \tag{1.9}$$

由式（1.8b）可得：

$$\iiint_{\forall} \left\{ \rho \frac{\mathrm{D}\mathbf{V}}{\mathrm{D}t} - \rho \boldsymbol{F} - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \right\} \mathrm{d}\forall = 0 \tag{1.10}$$

由于被积函数是连续的，控制体$\forall$可以任意选取，故可以得到用欧拉表达法表示的 N—S方程的微分形式：

$$\rho \frac{\mathrm{D}\mathbf{V}}{\mathrm{D}t} = \rho \boldsymbol{F} + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \tag{1.11}$$

根据广义牛顿粘性公式，式（1.11）可以写成：

$$\rho \frac{\mathrm{D}\mathbf{V}}{\mathrm{D}t} = \rho \boldsymbol{F} - \nabla p + \nabla(\lambda \nabla \cdot \mathbf{V}) + \nabla \cdot (2\mu \boldsymbol{\varepsilon}) \tag{1.12}$$

式中 p——流体中压强；

μ、λ——动力粘性系数和膨胀粘性系数；

$\boldsymbol{\varepsilon}$——流体的应变率张量。

令$\nabla \mathbf{V}$ 表示速度梯度，$\nabla \mathbf{V}$ 也是一个二阶张量。那么，式（1.12）可以写成：

$$\rho \frac{\mathrm{D}\mathbf{V}}{\mathrm{D}t} = \rho \boldsymbol{F} - \nabla p + \nabla(\lambda \nabla \cdot \mathbf{V}) + \nabla \cdot [\mu(\nabla \mathbf{V} + \nabla \mathbf{V}^{\mathrm{T}})] \tag{1.13}$$

写成直角坐标系约定求和形式：

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)=\rho F_i-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\lambda\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right) \tag{1.14}$$

式中　j——重复脚标，称为亚标，表示三项相加，$j=1$，2，3；

i——三个分量的方程，$i=1$，2，3。

当温度变化很小时，可以认为 $\mu=$常数，$\lambda=$常数，式（1.13）写成：

$$\rho\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{V}}{\mathrm{D}t}=\rho\boldsymbol{F}-\nabla p+\lambda\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{V})+\mu\nabla\cdot(\nabla\boldsymbol{V}+\nabla\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}) \tag{1.15}$$

令 ∇^2 表示 laplace 算子：

$$\nabla\cdot(\nabla\boldsymbol{V})=\nabla^2\boldsymbol{V}$$

$$\nabla\cdot(\nabla\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}})=\frac{\partial}{\partial x_k}\boldsymbol{e}_k\cdot\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\right)=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)\boldsymbol{e}_j=\boldsymbol{e}_j\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{V})$$

那么，上式写成：

$$\rho\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{V}}{\mathrm{D}t}=\rho\boldsymbol{F}-\nabla p+\mu\nabla^2\boldsymbol{V}+(\mu+\lambda)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{V}) \tag{1.16}$$

写成直角坐标系，约定求和形式：

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)=\rho F_i-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\mu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\partial x_j}+(\mu+\lambda)\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right) \tag{1.17}$$

式中　x_i、x_j——直角坐标系的坐标分量；

u_i、u_j——速度向量 $\boldsymbol{V}$ 在直角坐标系中的速度分量。

可以证明：

$$-\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{V})=\nabla^2\boldsymbol{V}-\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{V})$$

故式（1.16）可以写成：

$$\rho\left[\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial t}+(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{V}\right]=\rho\boldsymbol{F}-\nabla p-\mu\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{V})+(2\mu+\lambda)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{V}) \tag{1.18}$$

又由于

$$\boldsymbol{V}\times(\nabla\times\boldsymbol{V})=\nabla\left(\frac{V^2}{2}\right)-\boldsymbol{V}\cdot\nabla\boldsymbol{V}$$

定义旋度 $\boldsymbol{\Omega}$ 为

$$\boldsymbol{\Omega}=\nabla\times\boldsymbol{V}$$

可以得出：

$$\rho\left[\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial t}+\nabla\left(\frac{V^2}{2}\right)-\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{\Omega}\right]=\rho\boldsymbol{F}-\nabla p+\mu\nabla^2\boldsymbol{V}+(\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{V}) \tag{1.19}$$

或

$$\rho\left[\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial t}+\nabla\left(\frac{V^2}{2}\right)-\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{\Omega}\right]=\rho\boldsymbol{F}-\nabla p-\mu\nabla\times\boldsymbol{\Omega}+(2\mu+\lambda)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{V}) \tag{1.20}$$

把式（1.20）两边除以 ρ，然后取旋度，并且根据：

$$\nabla\times\left[\nabla\left(\frac{V^2}{2}\right)\right]=0$$

$$-\nabla\times(\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{\Omega})=\nabla\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{V})=(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{\Omega}-(\boldsymbol{\Omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{V}+\boldsymbol{\Omega}\nabla\cdot\boldsymbol{V}-\boldsymbol{V}\nabla\cdot\boldsymbol{\Omega}$$

其中，$\nabla\cdot\boldsymbol{\Omega}=0$。并把 $\lambda=-\frac{2}{3}\mu$ 代入式（1.20）后，方程变换成：

左边 $=\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{D}t}-(\boldsymbol{\Omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{V}+\boldsymbol{\Omega}\nabla\cdot\boldsymbol{V}$

$$右边 = \nabla\times\boldsymbol{F}-\nabla\times\left(\frac{1}{\rho}\nabla p\right)+\frac{4}{3}\nu\{\nabla\times[\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{V})]\}-\nu\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{\Omega})$$

式中 ν——运动粘性系数，$\nu=\frac{\mu}{\rho}$。

已知：$\nabla\times[\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{V})]=0$，如果流体受有势力作用和流体是正压流体，设 P 是压力函数，那么

$$\nabla\times\boldsymbol{F}=0$$

$$\frac{1}{\rho}\nabla p=\nabla(P)\quad 则\ \nabla\times\left(\frac{1}{\rho}\nabla p\right)=0$$

同时

$$-\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{\Omega})=\nabla^2\boldsymbol{\Omega}-\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{\Omega})$$

故对于正压流体，在有势力的作用下，得到涡旋动力方程，即弗里德曼方程：

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{D}t}-(\boldsymbol{\Omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{V}+\boldsymbol{\Omega}\nabla\cdot\boldsymbol{V}=\nu\nabla^2\boldsymbol{\Omega}\tag{1.21a}$$

对于无粘性流体，$\nu=0$，即得到海姆霍兹方程：

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{D}t}-(\boldsymbol{\Omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{V}+\boldsymbol{\Omega}\nabla\cdot\boldsymbol{V}=0\tag{1.21b}$$

式中 $\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{D}t}$——流体质点涡的变化率；

$(\boldsymbol{\Omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{V}$——涡管的伸长所引起的涡量的变化率；

$\boldsymbol{\Omega}\nabla\cdot\boldsymbol{V}$——体积膨胀引起的涡量的变化率；

$\nu\nabla^2\boldsymbol{\Omega}$——涡的扩散引起涡量的变化。

对于不可压缩流体（$\nabla\cdot\boldsymbol{V}$）$=0$ 的等温运动，$\mu=$常数；动量方程可以简化为

$$\rho\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{V}}{\mathrm{D}t}=\rho\boldsymbol{F}-\nabla p+\nabla\cdot(2\mu\boldsymbol{\varepsilon})\tag{1.22}$$

$$\rho\left[\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial t}+(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{V}\right]=\rho\boldsymbol{F}-\nabla p+\mu\nabla^2\boldsymbol{V}\tag{1.23}$$

$$\rho\left[\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right]=\rho F_i-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\mu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\partial x_j}\tag{1.24}$$

$$\rho\left[\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial t}+\nabla\left(\frac{V^2}{2}\right)-\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{\Omega}\right]=\rho\boldsymbol{F}-\nabla p+\mu\nabla^2\boldsymbol{V}\tag{1.25}$$

$$\rho\left[\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial t}+\nabla\left(\frac{V^2}{2}\right)-\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{\Omega}\right]=\rho\boldsymbol{F}-\nabla p-\mu\nabla\times\boldsymbol{\Omega}\tag{1.26}$$

在水力旋转机械中，常用圆柱坐标系（r，θ，z）。在圆柱坐标系中 r 和 θ 方向的加速度除了$\frac{\mathrm{D}V_r}{\mathrm{D}t}$和$\frac{\mathrm{D}V_\theta}{\mathrm{D}t}$以外还出现了以$-\frac{V_\theta^2}{r}$表示的径向加速度和以$\frac{V_rV_\theta}{r}$表示的周向加速度。令径向、周向及轴向的外力分别以 R，Θ，Z 表示，则动量方程为

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{D}V_r}{\mathrm{D}t}-\frac{V_\theta^2}{r}=R+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{\sigma_r}{r}-\frac{\sigma_\theta}{r}+\frac{\partial\tau_{\theta r}}{r\partial\theta}+\frac{\partial\tau_{zr}}{\partial z}\right)\\
&\frac{\mathrm{D}V_\theta}{\mathrm{D}t}-\frac{V_rV_\theta}{r}=\Theta+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\sigma_\theta}{r\partial\theta}+\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r}+2\frac{\tau_{r\theta}}{\partial r}+\frac{\partial\tau_{z\theta}}{\partial z}\right)\\
&\frac{\mathrm{D}V_z}{\mathrm{D}t}=Z+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r}+\frac{\tau_{rz}}{r}+\frac{\partial\tau_{\theta z}}{r\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}\right)
\end{aligned}\right\}\tag{1.27}$$

式中，各应力分量为

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_r &= -p + 2\mu\frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\mathbf{V} \\
\sigma_\theta &= -p + 2\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta} + \frac{V_r}{r}\right) - \frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\mathbf{V} \\
\sigma_z &= -p + 2\mu\frac{\partial V_z}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\mathbf{V} \\
\tau_{r\theta} &= \tau_{\theta r} = \mu\left\{r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{V_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial\theta}\right\} \\
\tau_{\theta z} &= \tau_{z\theta} = \mu\left\{\frac{\partial V_z}{r\partial\theta} + \frac{\partial V_\theta}{\partial z}\right\} \\
\tau_{zr} &= \tau_{rz} = \mu\left\{\frac{\partial V_r}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial r}\right\}
\end{aligned}\right\} \tag{1.28}$$

式中 σ_r、σ_θ、σ_z——径向、周向和轴向的正应力；

$\tau_{r\theta}$、$\tau_{\theta z}$、τ_{zr}——径向、周向和轴向的切应力。

并且：

$$\nabla\cdot\mathbf{V} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_r) + \frac{\partial V_\theta}{r\partial\theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \tag{1.29}$$

对于 μ=常数的不可压缩流体，上式可写成：

$$\frac{\mathrm{D}V_r}{\mathrm{D}t} - \frac{V_\theta^2}{r} = R - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left(\nabla^2 V_r - \frac{V_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta}\right) \tag{1.30a}$$

$$\frac{\mathrm{D}V_\theta}{\mathrm{D}t} + \frac{V_rV_\theta}{r} = \Theta - \frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial\theta} + \nu\left(\nabla^2 V_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial V_r}{\partial\theta} - \frac{V_\theta}{r^2}\right) \tag{1.30b}$$

$$\frac{\mathrm{D}V_z}{\mathrm{D}t} = Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\nabla^2 V_z \tag{1.30c}$$

其中 $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial}{\partial t} + V_r\frac{\partial}{\partial r} + V_\theta\frac{\partial}{r\partial\theta} + V_z\frac{\partial}{\partial z}$，$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{r^2\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

有时坐标系随物体运动，此时应使用在运动坐标系下的运动方程：

$$\frac{\mathrm{D}\mathbf{V}_r}{\mathrm{D}t} = \boldsymbol{F} + \frac{1}{\rho}\nabla\cdot\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{W}_e \tag{1.31}$$

式中 $\mathbf{V}_r$——流体在运动坐标系中的相对速度；

$\boldsymbol{W}_e$——牵连加速度。

如果令 $\boldsymbol{\omega}$ 为运动坐标系的自转角速度，令 $\boldsymbol{r}$ 为流体质点的相对矢径，$\mathbf{V}_0$ 为运动坐标系的平移速度，那么牵连加速度 $\boldsymbol{W}_e$ 可以表示为

$$W_e = \frac{\mathrm{D}V_0}{\mathrm{D}t} + \frac{\mathrm{D}\omega}{\mathrm{D}t}\times\boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) + 2(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{V}_r) \tag{1.32}$$

在叶轮机械中，当叶轮以等 $\boldsymbol{\omega}$ 速度旋转时，此时在动量方程式（1.32）中采用以等 $\boldsymbol{\omega}$ 速度旋转的圆柱坐标系的话，$\boldsymbol{W}_e$ 式中的前两项为 0，只剩下了：$-\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$ 为离心力，和$-2(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{V}_r)$ 的科氏力。

1.1.3 能量方程

能量方程是能量守恒定律在流体流动中的表达式。在控制体中流体的总能量包括单

位质量流体的内能（即分子热运动的动能）e 和单位质量流体的动能$\frac{V^2}{2}$（V 为流速）。根据能量守恒定律，可以得到控制体中，以下两种用欧拉表达法表示的能量方程的积分形式：

$$\iiint_{V} \frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right)\right]\mathrm{d}V + \oiint_{A}(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n})\rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right)\mathrm{d}A$$

$$= \iiint_{V}\rho\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{V}\mathrm{d}V + \oiint_{A}\boldsymbol{\sigma}_n\cdot\boldsymbol{V}\mathrm{d}A + \oiint_{A}K\frac{\partial T}{\partial n}\mathrm{d}A + \iiint_{V}\rho q\mathrm{d}V \tag{1.33}$$

$$\iiint_{V}\rho\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(e+\frac{V^2}{2}\right)\mathrm{d}V$$

$$= \iiint_{V}(\rho\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{V})\mathrm{d}V + \oiint_{A}\boldsymbol{\sigma}_n\cdot\boldsymbol{V}\mathrm{d}A + \oiint_{A}K\frac{\partial T}{\partial n}\mathrm{d}A + \iiint_{V}\rho q\mathrm{d}V \tag{1.34}$$

式中　T——温度；

K——传热系数；

q——单位时间内，由于热辐射而传入到系统单位质量流体的热量。

右边的面积分可以根据高斯积分公式改写成体积分：

$$\oiint_{A}(\boldsymbol{\sigma}_n\cdot\boldsymbol{V})\mathrm{d}A = \oiint_{A}\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{V})\mathrm{d}A = \iiint_{V}\nabla\cdot(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{V})\mathrm{d}V$$

$$\oiint_{A}K\frac{\partial T}{\partial n}\mathrm{d}A = \iiint_{V}\nabla\cdot(K\nabla T)$$

由于体积 $\boldsymbol{V}$ 可以任意选取，同时被积函数是连续的，那么就可以得出能量方程的微分形式：

$$\rho\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(e+\frac{V^2}{2}\right) = \rho\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{V} + \nabla\cdot(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{V}) + \nabla\cdot(K\nabla T) + \rho q \tag{1.35}$$

现在推导 $\nabla\cdot(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{V})$ 的表达式：

已知：$$\boldsymbol{\tau} = \tau_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j,\ \boldsymbol{V} = u_j\boldsymbol{e}_j,\ \boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{V} = \tau_{ij}u_j\boldsymbol{e}_i$$

故：$$\nabla\cdot(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{V}) = \frac{\partial}{\partial x_i}(\tau_{ij}u_j) = \frac{\partial\tau_{ij}}{\partial x_i}u_j + \tau_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}$$

因为：$$\frac{\partial\tau_{ij}}{\partial x_i}u_j = \boldsymbol{V}\cdot\{\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}\}$$

$$\tau_{ij} = \tau_{ji}$$

$$\tau_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \tau_{ij}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = \tau_{ij}\varepsilon_{ij}$$

令 $\tau_{ij}\varepsilon_{ij} = \boldsymbol{\tau}:\boldsymbol{\varepsilon}$ 为二个二阶张量的数量积点积，则：

$$\nabla\cdot\{\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{V}\} = \boldsymbol{V}\cdot\{\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}\} + \boldsymbol{\tau}:\boldsymbol{\varepsilon} \tag{1.36}$$

动量方程式（1.15）两边点积 $\boldsymbol{V}$，可得：

$$\rho\boldsymbol{V}\cdot\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{V}}{\mathrm{D}t} = \rho\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{F} + \boldsymbol{V}\cdot\{\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}\} \tag{1.37}$$

即：$$\boldsymbol{V}\cdot\nabla\cdot\tau = -\rho\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{F} + \rho\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\frac{V^2}{2}\right) \tag{1.38}$$

式（1.38）的意义为控制体内动能的增加，是由于体积力做功和部分表面力的做功 $\boldsymbol{V}\cdot\{\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}\}$ 两项所造成的。由式（1.35）减去式（1.38）即可得到：

$$\rho\frac{\mathrm{D}e}{\mathrm{D}t}=\boldsymbol{\tau}:\boldsymbol{\varepsilon}+\nabla\cdot(K\nabla T)+\rho q \tag{1.39}$$

由式（1.39）可以看出单位时间、单位体积内流体内能的变化等于流体表面力做功的一部分 $\boldsymbol{\tau}:\boldsymbol{\varepsilon}$，加上热传导和热辐射所传入的热量。

式（1.35）和式（1.39）在直角坐标系下写成约定求和的形式：

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}+u_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\left[e+\frac{1}{2}(u_iu_i)\right]=\rho u_iF_i+\frac{\partial}{\partial x_i}(\tau_{ij}u_j)+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(K\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)+\rho q \tag{1.40}$$

$$\rho\left(\frac{\partial e}{\partial t}+u_i\frac{\partial e}{\partial x_i}\right)=\tau_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(K\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)+\rho q \tag{1.41}$$

下面研究一下 $\boldsymbol{\tau}:\boldsymbol{\varepsilon}$ 所表示的意义。

由于 $\boldsymbol{\varepsilon}:\boldsymbol{I}=\nabla\cdot\boldsymbol{V}$，那么：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau}:\boldsymbol{\varepsilon}&=\{(-p+\lambda\nabla\cdot\boldsymbol{V})\boldsymbol{I}+2\mu\boldsymbol{\varepsilon}\}:\boldsymbol{\varepsilon}\\&=-p\nabla\cdot\boldsymbol{V}+\lambda(\nabla\cdot\boldsymbol{V})^2+2\mu\boldsymbol{\varepsilon}:\boldsymbol{\varepsilon}\end{aligned} \tag{1.42}$$

式中，$\boldsymbol{\tau}:\boldsymbol{\varepsilon}$ 由两项组成，$-p\nabla\cdot\boldsymbol{V}$ 代表流体膨胀时克服法向压力 p 所做的功，第二项 $\Phi=\lambda(\nabla\cdot\boldsymbol{V})^2+2\mu\boldsymbol{\varepsilon}:\boldsymbol{\varepsilon}$ 是克服粘性力所做的功，此功转化为热能而耗散掉了，故 Φ 称为耗散函数。

$$\Phi=\mu(2\varepsilon_{11}^2+2\varepsilon_{22}^2+2\varepsilon_{33}^2+4\varepsilon_{12}^2+4\varepsilon_{31}^2+4\varepsilon_{23}^2)+\lambda(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})^2 \tag{1.43}$$

当 $\lambda=-\frac{2}{3}\mu$ 时：

$$\Phi=4\mu(\varepsilon_{12}^2+\varepsilon_{31}^2+\varepsilon_{23}^2)+\frac{2}{3}\mu[(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22})^2+(\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})^2+(\varepsilon_{33}-\varepsilon_{11})^2] \tag{1.44}$$

在直角坐标系中：

$$\begin{aligned}\Phi=\mu\Bigg[&2\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2+2\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2+2\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)^2+\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^2\\&+\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)^2+\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)^2\Bigg]+\lambda\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)^2\end{aligned} \tag{1.45}$$

可以看出 $\Phi\geqslant0$，在一般情况下，$\mu\neq0$，$\lambda\neq0$，故 $\Phi>0$；只有当 $\varepsilon_{ij}=0$（也就是说流体做无变形运动）或者当 $\varepsilon_{ij}=0$，$\varepsilon_{ii}=\varepsilon_{jj}$（也就是当流体做各向同性膨胀或收缩）时，$\Phi=0$，流体中不存在机械损失。对于不可压流体，由于 $\nabla\cdot\boldsymbol{V}=0$，$\Phi=2\mu\boldsymbol{\varepsilon}:\boldsymbol{\varepsilon}$，因此不可压流体只有 $\varepsilon_{ij}=0$ 时，即无变形运动时，耗散函数才为 0。对于非粘性流体由于 $\mu=0$，故 $\Phi=0$，即没有粘性耗散。

引入耗散函数后，式（1.39）可以改写为

$$\rho\frac{\mathrm{D}e}{\mathrm{D}t}=-p\nabla\cdot\boldsymbol{V}+\Phi+\nabla\cdot(K\nabla T)+\rho q \tag{1.46}$$

由连续方程可以得到：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{V}=-\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}=\rho\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\frac{1}{\rho}\right) \tag{1.47}$$

代入式（1.46）中：

$$\rho\left[\frac{\mathrm{D}e}{\mathrm{D}t}+p\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]=\Phi+\nabla\cdot(K\nabla T)+\rho q \tag{1.48}$$

根据完全气体的热力学公式，熵 s 和焓 h 表示为

$$T\frac{\mathrm{D}s}{\mathrm{D}t}=\frac{\mathrm{D}e}{\mathrm{D}t}+p\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

$$\frac{\mathrm{D}h}{\mathrm{D}t}=\frac{\mathrm{D}e}{\mathrm{D}t}+p\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\frac{1}{\rho}\right)+\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{D}p}{\mathrm{D}t}$$

那么，利用熵 s 或者焓 h 表示能量方程为

$$\rho T\frac{\mathrm{D}s}{\mathrm{D}t}=\Phi+\nabla\cdot(K\nabla T)+\rho q \tag{1.49}$$

$$\rho\frac{\mathrm{D}h}{\mathrm{D}t}=\frac{\mathrm{D}p}{\mathrm{D}t}+\Phi+\nabla\cdot(K\nabla T)+\rho q \tag{1.50}$$

式（1.46）和式（1.50）可以写成温度的形式，令 $\mathrm{D}e=C_v\mathrm{D}T$ 和 $\mathrm{D}h=C_p\mathrm{D}T$，其中 C_v 是等容比热，C_p 是等压比热，则：

$$\rho C_v\frac{\mathrm{D}T}{\mathrm{D}t}=-p\nabla\cdot\boldsymbol{V}+\Phi+\nabla\cdot(K\nabla T)+\rho q \tag{1.51}$$

$$\rho C_p\frac{\mathrm{D}T}{\mathrm{D}t}=\frac{\mathrm{D}p}{\mathrm{D}t}+\Phi+\nabla\cdot(K\nabla T)+\rho q \tag{1.52}$$

式（1.35）还可以写成总焓 H 的形式，令：

$$H=h+\frac{V^2}{2}=\frac{p}{\rho}+e+\frac{V^2}{2}$$

$$\rho\frac{\mathrm{D}H}{\mathrm{D}t}=\rho\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(e+\frac{V^2}{2}\right)+\frac{\partial p}{\partial t}+\nabla\cdot(p\boldsymbol{V})$$

总焓 H 的能量方程为

$$\rho\frac{\mathrm{D}H}{\mathrm{D}t}=\frac{\partial p}{\partial t}+\nabla\cdot(p\boldsymbol{V}+\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{V}+K\nabla T)+\rho\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{V}+\rho q \tag{1.53}$$

对于不可压流体，上述能量方程可以简化为

$$\rho\frac{\mathrm{D}e}{\mathrm{D}t}=\Phi+\nabla\cdot(K\nabla T)+\rho q \tag{1.54}$$

$$\rho C_v\frac{\mathrm{D}T}{\mathrm{D}t}=\Phi+\nabla\cdot(K\nabla T)+\rho q \tag{1.55}$$

如果忽略压力项，从式（1.51）可以得出：

$$\rho C_p\frac{\mathrm{D}T}{\mathrm{D}t}=\Phi+\nabla\cdot(K\nabla T)+\rho q \tag{1.56}$$

对于液体 $C_p\approx C_v$，所以式（1.55）和式（1.56）是一致的。

1.1.4 不可压缩流体基本方程的封闭性

对于不可压缩流体，状态方程 ρ=常数，所以连续方程和动量方程共有 4 个分量形式的方程，同时未知数的数目也是 4 个，即 $\boldsymbol{V}$ 和 p，那么方程是封闭的，求出 $\boldsymbol{V}$ 和 p 后，可根据能量方程求出温度 T。

对于可压缩流体，这四个方程（连续方程和三个分量的动量方程）中，多了一个未知

数 ρ，共计 5 个（三个速度分量，加上压强和密度），所以必须加上能量方程，但是加上能量方程后，又多了一个未知数 T，故必须加上下列状态方程式（1.57）：

$$p = p(\rho, T) \tag{1.57}$$

有 6 个方程，才能达到封闭。

1.2 水力机械叶轮中流体运动方程

对于水力机械叶轮中的流动，可以选择与叶轮一起以定角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 转动的旋转坐标系，考察流体的相对运动速度 $\boldsymbol{W}$。

$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{V} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R}$$

式中 $\boldsymbol{V}$——绝对速度；

$\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R}$——牵连速度。

如果采用旋转圆柱旋转（r，θ，z）坐标系，且 z 轴与旋转轴重合，那么就会得到在忽略质量力条件下，在旋转坐标系中的连续方程和动量方程：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{W}) = 0 \tag{1.58}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (r\rho W_r)}{r\partial r} + \frac{\partial (\rho W_\theta)}{r\partial \theta} + \frac{\partial (\rho W_z)}{\partial z} = 0 \tag{1.59}$$

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{W}}{\mathrm{D}t} + 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{W} - r\omega^2 \boldsymbol{e}_r = -\frac{\nabla p}{\rho} + \boldsymbol{f} \tag{1.60}$$

其中，导数均为在相对（旋转）坐标系中的导数，$\boldsymbol{f}$ 为单位质量流体表面粘性力，写成分量形式：

$$\left(\frac{\mathrm{D}W_r}{\mathrm{D}t} - \frac{W_\theta^2}{r}\right) - 2\omega W_\theta - \omega^2 r = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + f_r \tag{1.61a}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{D}(W_\theta r)}{\mathrm{D}t} + 2\omega W_r = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{r\partial \theta} + f_\theta \tag{1.61b}$$

$$\frac{\mathrm{D}W_z}{\mathrm{D}t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + f_z \tag{1.61c}$$

$$\left.\begin{aligned}
\rho f_r = {} & \frac{\partial}{\partial r}\left[2\mu \frac{\partial W_r}{\partial r} + \lambda \nabla \cdot \boldsymbol{W}\right] + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left[\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial W_r}{\partial \theta} + \frac{\partial W_\theta}{\partial r} - \frac{W_\theta}{r}\right)\right] \\
& + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial W_r}{\partial z} + \frac{\partial W_z}{\partial r}\right)\right] + \frac{2\mu}{r}\left[\frac{\partial W_r}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial W_\theta}{\partial \theta} - \frac{W_r}{r}\right] \\
\rho f_\theta = {} & \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left[\frac{2\mu}{r}\frac{\partial W_\theta}{\partial \theta} + \lambda \nabla \cdot \boldsymbol{W}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial W_z}{\partial \theta} + \frac{\partial W_\theta}{\partial z}\right)\right] \\
& + \frac{\partial}{\partial r}\left[\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial W_r}{\partial \theta} + \frac{\partial W_\theta}{\partial r} - \frac{W_\theta}{r}\right)\right] + \frac{2\mu}{r}\left[\frac{2}{r}\frac{\partial W_r}{\partial \theta} + \frac{\partial W_\theta}{\partial r} - \frac{W_\theta}{r}\right] \\
\rho f_z = {} & \frac{\partial}{\partial z}\left[2\mu \frac{\partial W_z}{\partial z} + \lambda \nabla \cdot \boldsymbol{W}\right] + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[\mu r\left(\frac{\partial W_r}{\partial z} + \frac{\partial W_z}{\partial r}\right)\right] \\
& + \frac{\partial}{r\partial \theta}\left[\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial W_z}{\partial \theta} + \frac{\partial W_\theta}{\partial z}\right)\right]
\end{aligned}\right\} \tag{1.62}$$

在正交曲线坐标系中，动量方程可以写成如下形式。

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial(\rho H_2H_3W_1)}{\partial q_1}+\frac{\partial(\rho H_3H_1W_2)}{\partial q_2}+\frac{\partial(\rho H_1H_2W_3)}{\partial q_3}\right]=0 \tag{1.63}$$

动量方程可以写成：

$$\begin{aligned}&\frac{\partial W_1}{\partial t}+\frac{W_1}{H_1}\frac{\partial W_1}{\partial q_1}+\frac{W_2}{H_1}\frac{\partial W_2}{\partial q_1}+\frac{W_3}{H_1}\frac{\partial W_3}{\partial q_1}+\frac{W_3}{H_3H_1}\left[\frac{\partial(H_1W_1)}{\partial q_3}-\frac{\partial(H_3W_3)}{\partial q_1}\right]\\&-\frac{W_2}{H_1H_2}\left[\frac{\partial(H_2W_2)}{\partial q_1}-\frac{\partial(H_1W_1)}{\partial q_2}\right]-2W_2\omega_3+2W_3\omega_2-\frac{\omega^2r}{H_1}\frac{\partial r}{\partial q_1}\\=&-\frac{1}{\rho H_1}\frac{\partial p}{\partial q_1}+f_{q1}\end{aligned} \tag{1.64a}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial W_2}{\partial t}+\frac{W_1}{H_2}\frac{\partial W_1}{\partial q_2}+\frac{W_2}{H_2}\frac{\partial W_2}{\partial q_2}+\frac{W_3}{H_2}\frac{\partial W_3}{\partial q_2}-\frac{W_3}{H_3H_2}\left[\frac{\partial(H_3W_3)}{\partial q_2}-\frac{\partial(H_2W_2)}{\partial q_3}\right]\\&+\frac{W_1}{H_1H_2}\left[\frac{\partial(H_2W_2)}{\partial q_1}-\frac{\partial(H_1W_1)}{\partial q_2}\right]+2W_1\omega_3-2W_3\omega_1-\frac{\omega^2r}{H_2}\frac{\partial r}{\partial q_2}\\=&-\frac{1}{\rho H_2}\frac{\partial p}{\partial q_2}+f_{q2}\end{aligned} \tag{1.64b}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial W_3}{\partial t}+\frac{W_1}{H_3}\frac{\partial W_1}{\partial q_3}+\frac{W_2}{H_3}\frac{\partial W_2}{\partial q_3}+\frac{W_3}{H_3}\frac{\partial W_3}{\partial q_3}+\frac{W_2}{H_2H_3}\left[\frac{\partial(H_3W_3)}{\partial q_2}-\frac{\partial(H_2W_2)}{\partial q_3}\right]\\&-\frac{W_1}{H_3H_1}\left[\frac{\partial(H_1W_1)}{\partial q_3}-\frac{\partial(H_3W_3)}{\partial q_1}\right]+2W_2\omega_1-2W_1\omega_2-\frac{\omega^2r}{H_3}\frac{\partial r}{\partial q_3}\\=&-\frac{1}{\rho H_3}\frac{\partial p}{\partial q_3}+f_{q_3}\end{aligned} \tag{1.64c}$$

其中，f_{q_1}、f_{q_2}、f_{q_3}为除去压力以外的表面粘性力。

$$\left.\begin{aligned}\rho f_{q_1}=&\frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(H_2H_3\tau_{11}^*)+\frac{\partial}{\partial q_2}(H_3H_1\tau_{12})+\frac{\partial}{\partial q_3}(H_1H_2\tau_{31})\right]\\&+\frac{\tau_{12}}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}+\frac{\tau_{13}}{H_1H_3}\frac{\partial H_1}{\partial q_3}-\frac{\tau_{22}^*}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}-\frac{\tau_{33}^*}{H_3H_1}\frac{\partial H_3}{\partial q_1}\\\rho f_{q_2}=&\frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(H_2H_3\tau_{12})+\frac{\partial}{\partial q_2}(H_3H_1\tau_{22}^*)+\frac{\partial}{\partial q_3}(H_1H_2\tau_{23})\right]\\&+\frac{\tau_{12}}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}+\frac{\tau_{23}}{H_2H_3}\frac{\partial H_2}{\partial q_3}-\frac{\tau_{33}^*}{H_2H_3}\frac{\partial H_3}{\partial q_2}-\frac{\tau_{11}^*}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\\\rho f_{q_3}=&\frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(H_2H_3\tau_{31})+\frac{\partial}{\partial q_2}(H_3H_1\tau_{23})+\frac{\partial}{\partial q_3}(H_1H_2\tau_{33}^*)\right]\\&+\frac{\tau_{31}}{H_1H_3}\frac{\partial H_3}{\partial q_1}+\frac{\tau_{23}}{H_2H_3}\frac{\partial H_2}{\partial q_2}-\frac{\tau_{11}^*}{H_3H_1}\frac{\partial H_1}{\partial q_3}-\frac{\tau_{22}^*}{H_3H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_3}\end{aligned}\right\} \tag{1.65}$$

由于本构方程是在惯性坐标系中建立起来的，现在从惯性坐标系中的本构方程推导出在叶轮旋转坐标系中的本构方程的表达式。

$$\nabla_a\cdot\boldsymbol{A}=\nabla\cdot\boldsymbol{A}$$

其中，用下标 a 表示在绝对坐标系中的导数，无下标则表示在相对旋转坐标系中的导数。从而可以得出：

$$\boldsymbol{\tau}^*=\lambda(\nabla_a\cdot\boldsymbol{V})\boldsymbol{I}+\mu(\nabla_a\boldsymbol{V}+\nabla_a\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}})=\lambda(\nabla\cdot\boldsymbol{V})\boldsymbol{I}+\mu(\nabla\boldsymbol{V}+\nabla\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}})$$