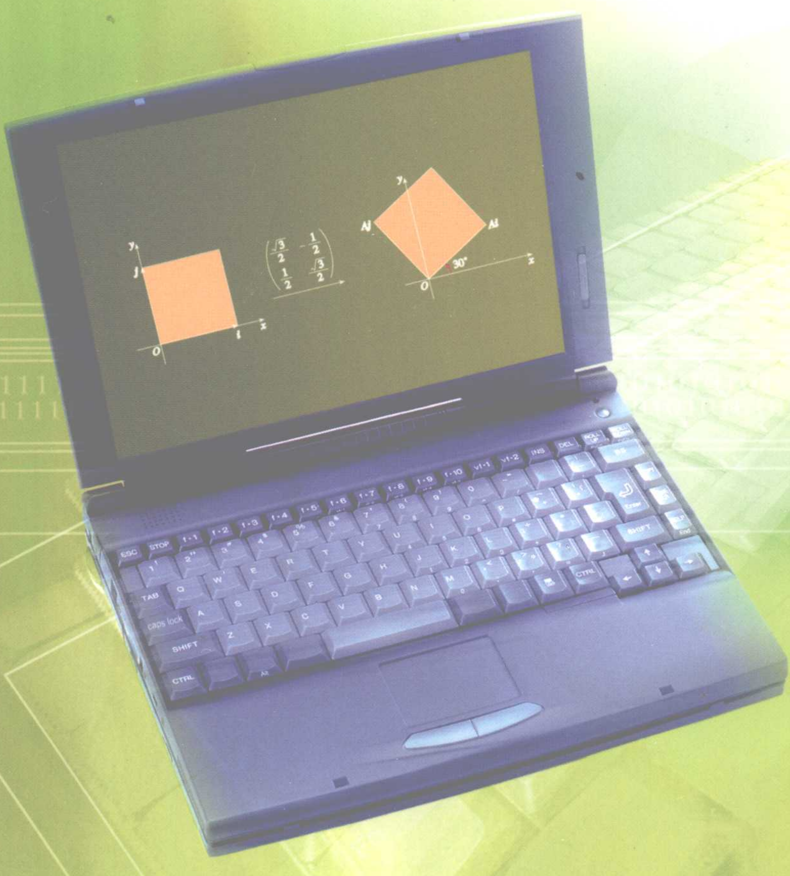
普通高中课程标准实验教科书

数学 选修 4–2

矩阵与变换

教师教学用书

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心 编著



人民教育出版社

A版

数学

教师教学用书

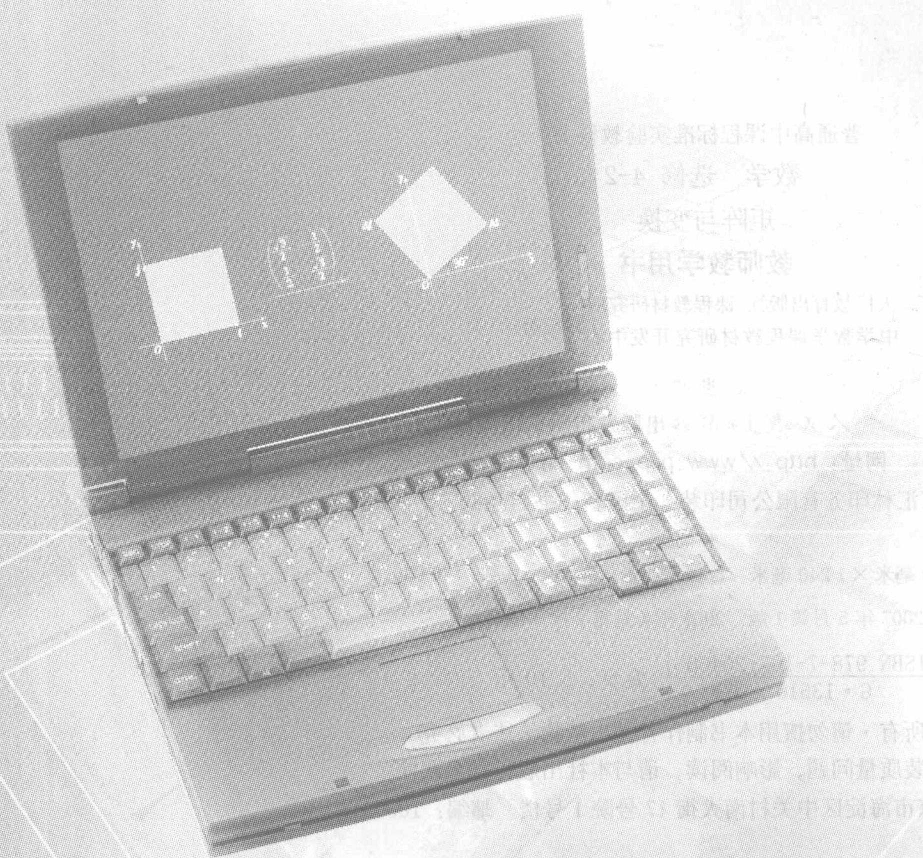
普通高中课程标准实验教科书

数学 选修 4–2

矩阵与变换

教师教学用书

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心
编著



人民教育出版社

A版

普通高中课程标准实验教科书

数学　选修 4-2

矩阵与变换

教师教学用书

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心　编著

*

人民教育出版社出版发行

网址：http://www.pep.com.cn

北京汇林印务有限公司印装　全国新华书店经销

*

开本：890 毫米×1 240 毫米　1/16　印张：3.75　字数：80 000

2007 年 5 月第 1 版　2008 年 4 月第 2 次印刷

ISBN 978-7-107-20466-1
G・13516（课）　定价：5.10 元

如发现印、装质量问题，影响阅读，请与本社出版科联系调换。
（联系地址：北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼　邮编：100081）

主　　编：刘绍学
副 主 编：钱佩玲　章建跃

编　　者：李龙才
责任编辑：俞求是
版式设计：王　艾
封面设计：李宏庆

说明

人教版普通高中课程标准实验教材·数学（A版），是以教科书为基础的系列化教材，包括基本教材和配套教学资源. 基本教材是教科书和教师教学用书，配套教学资源包括新课程导学·数学、教学设计与案例、教学投影片、信息技术支持系统等.

人教版《普通高中课程标准实验教科书·数学（A版）》包括教育部制定的《普通高中数学课程标准（实验）》中规定的全部内容. 本套教科书在坚持我国数学教育优良传统的前提下，认真处理继承、借鉴、发展、创新之间的关系，体现基础性、时代性、典型性和可接受性等，具有如下特点：

1. “亲和力”：以生动活泼的呈现方式，激发兴趣和美感，引发学习激情.

尽量选取与内容密切相关的、典型的、丰富的和学生熟悉的素材，用生动活泼的语言，创设能够体现数学的概念、结论及其思想方法发生发展过程的学习情境，使学生感到数学是自然的，水到渠成的，激发学生对数学的亲切感，引发学生“看个究竟”的冲动，兴趣盎然地投入学习.

在体现知识归纳概括过程中的数学思想、解决各种问题中数学的力量、数学探究和论证方法的优美和精彩之处、数学的科学和文化价值等地方，将作者的感受用“旁批”等方式呈现，与学生交流，增强了教科书的“亲和力”，启发学生更深入的数学思考，不断引发学习激情.

2. “问题性”：以恰时恰点的问题引导数学活动，培养问题意识，孕育创新精神.

在知识形成过程的“关键点”上，在运用数学思想方法产生解决问题策略的“关节点”上，在数学知识之间联系的“联结点”上，在数学问题变式的“发散点”上，在学生思维的“最近发展区”内，通过“观察”“思考”“探究”等栏目，提出恰当的、对学生数学思维有适度启发的问题，引导学生的思考和探索活动，使他们经历观察、实验、猜测、推理、交流、反思等理性思维的基本过程，切实改进学生的学习方式.

提问是创新的开始. “看过问题三百个，不会解题也会问”，通过恰时恰点地提出问题，提好问题，给学生示范提问的方法，使他们领悟发现和提出问题的艺术，引导他们更加主动、有兴趣地学，富有探索性地学，逐步培养学生的问题意识，孕育创新精神.

3. “思想性”：螺旋上升地安排核心数学概念和重要数学思想，加强数学思想方法的渗透与概括.

以数及其运算、函数、空间观念、数形结合、向量、导数、统计、随机观念、算法等数学核心概念和基本思想为贯穿整套教科书的“灵魂”，体现寻求一般性模式的思想和追求简洁与形式完美的精神等，引导学生领悟数学本质，体验数学中的理性精神，加强数学形式下的思考和推理训练，从而提高教科书的“思想性”.

4. “联系性”：通过不同数学内容的联系与启发，强调类比、推广、特殊化、化归等思想方法的运用，学习数学地思考问题的方式，提高数学思维能力，培育理性精神.

利用数学内容的内在联系，使不同的数学内容相互沟通，提高学生对数学的整体认识水平. 特别地，在教科书中强调类比、推广、特殊化、化归等思想方法，尽最大可能展示以下常用的逻辑思考方法：

推广
↑
类比 ← 当前内容 → 类比
↓
特殊化

以使学生体会数学探索活动的基本规律，逐步学会借助数学符号和逻辑关系进行数学推理和探究，推求新的事实和论证猜想，从而发展学生认识事物的“数”、“形”属性和规律、处理相应的逻辑关系的悟性和潜能，养成逻辑思维的习惯，能够有条理地、符合逻辑地进行思考、推理、表达与交流.

教科书力求使数学内容的呈现做到脉络清晰，重点突出，体系简约，在学生原有认知结构基础上，依据数学学习规律、相关内容在不同模块中的要求以及数学内在的逻辑联系，以核心知识（基本概念和原理，重要的数学思想方法）为支撑和联结点，循序渐进、螺旋上升地组织学习内容，形成结构化的教材体系.

选修系列 4 的教师教学用书，按照相应教科书的内容顺序编排，包括总体设计、教科书分析、习题解答、教学设计案例、自我检测题、拓展资源等栏目.

1. 总体设计是对整个专题作概括性介绍，重点说明教科书设计思想. 包括：课程目标、学习目标、内容安排（知识结构框图及说明）、课时分配等.

（1）课程与学习目标说明学生通过学习本专题内容应达到的要求，表述时关注了目标的可测性；

（2）内容安排中给出了本专题的知识结构框图及其对内容安排的概括性说明，以利于教师从整体上把握本章知识发生、发展的脉络；

（3）课时分配根据具体内容的分量提出课时分配的建议，教师可以根据自己的教学实际进行调整.

2. 教科书分析按照教科书内容顺序、以讲为单位进行分析，着重说明了编写意图. 主要包括：本讲知识结构、重点与难点、编写意图与教学建议等.

（1）本讲知识结构说明本讲知识点及其发生、发展过程（逻辑关系）. 说明学习本讲内容时，涉及的前后相关知识，采用“知识框图”或“表格”的方式表述；

（2）重点不仅指数学概念、数学结论，而且包括数学思想方法、数学能力等方面的内容；难点说明学生在学习过程中可能遇到的困难和问题；

（3）编写意图与教学建议主要对教科书"为什么要这样写"进行分析，包括学习相应内容应具备的认知发展基础，如何理解其中的一些关键概念，知识中蕴含的数学思想方法，突破重点、难点的建议，如何激发学生学习兴趣，渗透能力培养，以及数学应用意识、创新意识的培养等；对例题要达到的目的进行说明；对"观察""思考""探究"中的内容以及边空中的问题，给出解释或解答.

教学建议主要对教师如何引导学生学习进行分析，从教科书编写者的角度结合具体内容给教师提出一些建议.

3. 教学设计案例选取了一些具有典型性的、教学难度大、新增知识、适宜使用信息技术的内容，包括概念课、研究（探究）课、习题课、复习课等不同课型. 具体包括了下面一些内容.

（1）教学任务分析重点对学习相应内容时的认知要求进行分析；

（2）教学基本流程以框图的形式表示出教学的基本进程；

（3）重点和难点表述了本课内容的重点，以及学习中可能碰到的困难；

（4）教学情境设计以"问题串"为主线，在提出问题的同时，说明了设计意图.

4. 习题解答不仅给出解答过程，讲清楚"可以这样解"，而且还对一些典型问题分析了解答中的数学思想方法，说明"为什么可以这样解"，从而体现了习题作为巩固知识，深化概念学习，深刻理解知识，开展研究性学习，应用知识解决实际问题，培养学生的数学能力、创新精神和实践能力等功能.

5. 拓展资源为教师提供了一些教学中有用的资料，既有知识性的，又有数学历史、数学文化方面的资料. 同时，在适当的地方，对数学教学中如何使用科学计算器、计算机、网络等进行说明或解释.

本书是选修课程数学 4-2 的教师教学用书，包含线性变换与二阶矩阵、变换的复合与二阶矩阵的乘法、逆变换与逆矩阵、变换的不变量与矩阵的特征向量等四讲内容. 全书共 18 课时，具体分配如下（仅供参考）：

第一讲	线性变换与二阶矩阵	约 5 课时
第二讲	变换的复合与二阶矩阵的乘法	约 4 课时
第三讲	逆变换与逆矩阵	约 5 课时
第四讲	变换的不变量与矩阵的特征向量	约 4 课时

我们在广泛听取广大教师、教学研究人员意见的基础上，对教师教学用书进行了较大的改进，希望它能够较好地满足广大教师的教学需要. 由于是对教师教学用书编写工作的一次新尝试，其中肯定存在许多值得改进的地方，希望广大教师在使用过程中提出宝贵意见，我们愿意根据大家的意见作出修正，使其更好地为教师教学服务.

目 录

Ⅰ 总体设计

一、课程目标与学习目标

（一）课程目标

矩阵是研究图形（向量）变换的基本工具，有着广泛的应用，许多数学模型都可以用矩阵来表示．本专题通过平面图形的变换讨论二阶方阵的乘法及性质、逆矩阵和矩阵的特征向量等概念，并以变换的观点理解解线性方程组的意义，初步展示矩阵应用的广泛性．

（二）学习目标

1. 通过实例，了解二阶矩阵的概念

2. 二阶矩阵与平面向量（列向量）的乘法、平面图形的变换

（1）以变换的观点认识矩阵与向量乘法的意义．

（2）证明矩阵变换把平面上的直线变成直线，即证明

$$A(\lambda_1\boldsymbol{\alpha}+\lambda_2\boldsymbol{\beta})=\lambda_1A\boldsymbol{\alpha}+\lambda_2A\boldsymbol{\beta}.$$

（3）通过大量具体的矩阵对平面上给定图形（如正方形）的变换，认识到矩阵可表示如下的线性变换：恒等、反射、伸压、旋转、切变、投影．

3. 变换的复合——二阶方阵的乘法

（1）通过变换的实例，了解矩阵与矩阵的乘法的意义．

（2）验证二阶方阵乘法满足结合律．

（3）通过具体的几何图形变换，说明矩阵乘法不满足交换律和消去律．

4. 逆矩阵与二阶行列式

（1）通过具体图形变换，理解逆矩阵的意义；通过具体的投影变换，说明逆矩阵可能不存在．

（2）会证明逆矩阵的唯一性和$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$等简单性质，并了解其在变换中的意义．

（3）了解二阶行列式的定义，会用二阶行列式求逆矩阵．

5. 二阶矩阵与二元一次方程组

（1）能用变换的观点认识解二元一次方程组的意义．

（2）会用系数矩阵的逆矩阵解系数矩阵可逆的二元一次方程组．

（3）会通过具体的可逆的系数矩阵，从几何上说明线性方程组解的存在性、唯一性．

6. 变换的不变量

（1）掌握矩阵特征值与特征向量的定义，能从几何变换的角度说明特征向量的意义．

（2）会求二阶方阵的特征值与特征向量（只要求特征值是两个不同实数的情形）．

7. 矩阵的应用

（1）利用矩阵A的特征值、特征向量给出$A^n\boldsymbol{\alpha}$简单的表示，并能用它来解决问题．

（2）初步了解三阶或高阶矩阵．

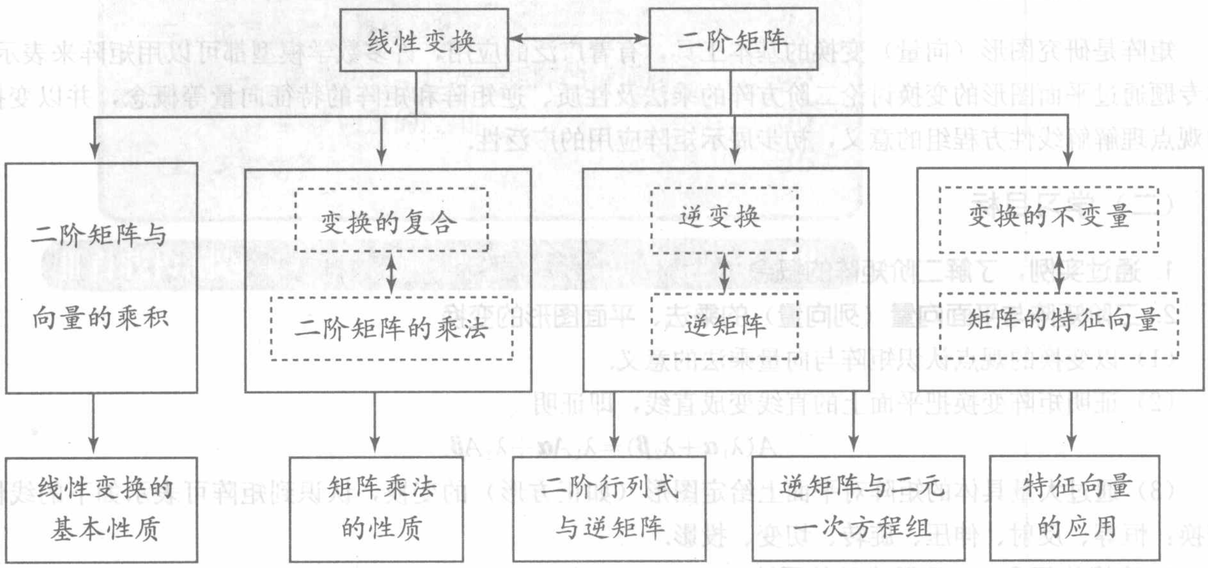
（3）了解矩阵的应用．

8. 完成一个学习总结报告

报告应包括三方面的内容：(1) 知识的总结，理解本专题的整体思路、结构和内容，进一步认识变换的思想；(2) 拓展，通过查阅资料、调查研究、访问求教、独立思考，对矩阵变换及其应用做进一步探讨；(3) 学习本专题的感受、体会.

二、内容安排

1. 本专题知识结构框图



2. 对内容安排的说明

本专题分为四讲：第一讲，线性变换与二阶矩阵，内容包括：线性变换与二阶矩阵、二阶矩阵与平面向量的乘法、线性变换的基本性质；第二讲，变换的复合与二阶矩阵的乘法，内容包括：复合变换与二阶矩阵的乘法、矩阵乘法的性质；第三讲，逆变换与逆矩阵，内容包括：逆变换与逆矩阵、二阶行列式与逆矩阵、逆矩阵与二元一次方程组；第四讲，变换的不变量与矩阵的特征向量，内容包括：变换的不变量——矩阵的特征向量、特征向量的应用.

(1) 在引言中，首先回顾学生熟悉的平面图形的轴对称变换；然后用映射的语言重新叙述；接着在平面直角坐标系中进一步进行研究，得到这个变换的坐标变换公式，从而明确形如$\begin{cases}x'=ax+by\\y'=cx+dy\end{cases}$（其中 a，b，c，d 均为常数）的变换可以由一个二阶矩阵完全确定；并给出本专题中研究问题的基本思想——类比解析几何中对曲线与方程的讨论，对二阶矩阵与某些几何变换进行类似的研究；最后明确本专题的主要内容.

(2) 在平面直角坐标系中，线性变换与二阶矩阵是一一对应的，因此既可以通过二阶矩阵来研究对应的线性变换，也可以通过线性变换来研究对应的二阶矩阵. 本专题中，总是先通过具体的线性变换从几何直观上获得感知，进而抽象出矩阵中的概念或结论. 线性变换与二阶矩阵之间的一一对应关系是本专题研究线性变换与二阶矩阵的基本出发点.

（3）本专题注重在呈现知识时渗透数学思想方法，除了（2）中提及的充分利用几何直观（数形结合）外，还特别强调下面两种思想方法：第一，从特殊到一般的思想方法，本讲中几乎所有的知识都是通过这种方式引入的．第二，类比的方法，例如，类比实数乘法的运算律，研究二阶矩阵乘法的运算律；类比实数的乘法运算中的一条重要性质“如果 $a\neq0$，则 $\frac{1}{a}\cdot a=a\cdot\frac{1}{a}=1$”，通过线性变换引入逆矩阵；等.

三、课时分配

本专题教学时间约为 18 课时，具体分配如下（仅供参考）：

第一讲　线性变换与二阶矩阵

一　线性变换与二阶矩阵	约 2 课时
二　二阶矩阵与平面向量的乘法	约 1 课时
三　线性变换的基本性质	约 2 课时

第二讲　变换的复合与二阶矩阵的乘法

一　复合变换与二阶矩阵的乘法	约 2 课时
二　矩阵乘法的性质	约 2 课时

第三讲　逆变换与逆矩阵

一　逆变换与逆矩阵	约 2 课时
二　二阶行列式与逆矩阵	约 1 课时
三　逆矩阵与二元一次方程组	约 2 课时

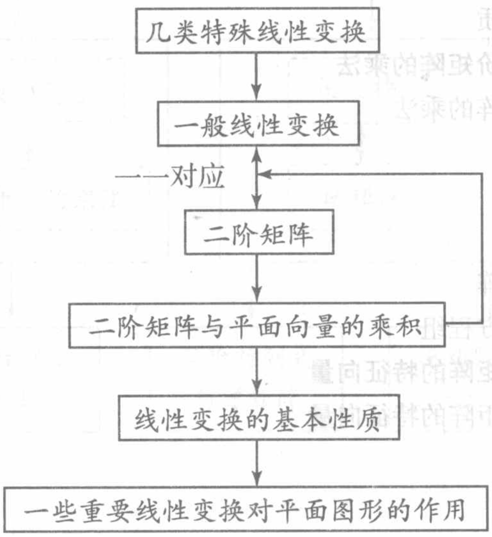
第四讲　变换的不变量与矩阵的特征向量

一　变换的不变量——矩阵的特征向量	约 2 课时
二　特征向量的应用	约 2 课时

II 教科书分析

第一讲 线性变换与二阶矩阵

一、本讲知识结构



二、教学重点与难点

重点：

1. 二阶矩阵的概念；
2. 二阶矩阵与平面向量的乘积；
3. 线性变换的基本性质.

难点：线性变换的基本性质.

三、编写意图与教学建议

在直角坐标系中，平面上的点与有序实数对是一一对应的. 这样，可以用代数方法表示几何变换，进而就可以从代数的角度研究几何变换. 在本讲中，首先通过两个特殊的旋转变换引入线性变换的概念，并通过线性变换引入二阶矩阵；接着介绍一般的旋转变换、反射变换、伸缩变换、投影变换和切变变换等几类重要的线性变换，熟悉它们对应的二阶矩阵，并通过这些具体的线性变换及其二阶矩阵，体会在直角坐标系中线性变换与二阶矩阵之间的一一对应关系，进而进一步建立线性变换与二阶矩阵

的联系，用二阶矩阵和向量的乘积表示线性变换；以二阶矩阵为工具研究线性变换的基本性质——二阶矩阵对应的线性变换把平面上的直线变成直线（或一点）；利用线性变换的基本性质研究一些重要线性变换对单位正方形区域的作用，进一步加深对线性变换及其基本性质的理解.

（一）线性变换与二阶矩阵

1. 几类特殊线性变换及其二阶矩阵

（1）线性变换、二阶矩阵的引入

教科书首先讨论旋转角为180°的旋转变换，这是学生比较熟悉的变换. 该变换把平面内的点对应到该点关于原点O的对称点，其坐标变换公式非常简单. 但是，由于其坐标变换公式过于简洁，因而很难抽象出一般的线性变换的形式. 于是，教科书接着讨论旋转角为30°的旋转变换，其坐标变换公式中x，y项的系数均不为0，与一般的线性变换的形式类似. 由此抽象出线性变换的概念，并给出二阶矩阵的定义.

在引入线性变换、二阶矩阵概念的过程中，应特别强调线性变换与二阶矩阵是相互唯一确定的，即它们之间是一一对应的.

需要指出的是，平面变换（或称为几何变换）是平面内所有的点所成的集合到其自身的映射. 本专题讨论的线性变换$\begin{cases}x'=ax+by,\\ y'=cx+dy\end{cases}$是一类特殊的平面变换，它把平面内任意一点（$x$，$y$）对应到（或称变为）（$x'$，$y'$）.

（2）几类重要的线性变换

引入线性变换、二阶矩阵的概念后，教科书介绍了旋转变换、反射变换、伸缩变换、投影变换和切变变换等几类重要的线性变换，推导它们的坐标变换公式，给出它们对应的二阶矩阵，并通过这些具体的线性变换及其二阶矩阵，引导学生体会在直角坐标系中线性变换与二阶矩阵之间的一一对应关系. 应该说，学生掌握这些内容并不困难，但需要指出的是，本专题中呈现矩阵内容的主要指导思想是，通过直观的线性变换引入矩阵的有关概念、研究矩阵的一些性质，因此，这些重要的线性变换是我们学习本专题后续内容的重要基础，教学中应予以充分重视.

2. 变换、矩阵的相等

引入线性变换、二阶矩阵的概念后，首先需要界定两个线性变换、两个二阶矩阵何时相等. 教科书通过对一个具体旋转变换的讨论，引入线性变换相等和二阶矩阵相等的概念. 在平面直角坐标系内，线性变换与二阶矩阵是一一对应的. 利用这一关系容易得到：

两个线性变换相等当且仅当对应的二阶矩阵相等.

（二）二阶矩阵与平面向量的乘法

我们在上一节建立了线性变换与二阶矩阵之间的一一对应关系，本节在此基础上进一步建立线性变换与二阶矩阵的联系，用二阶矩阵和向量的乘积表示线性变换.

1. 三种一一对应关系

教科书首先复习平面直角坐标系内的向量、点以及有序实数对之间的一一对应关系，这些内容都是学生熟悉的. 正是由于这三种一一对应关系，我们有时可以把这三者不加区分. 在上一节中，我们把线性变换看成是平面上所有的点所成的集合到其自身的映射，在本专题后面的内容中，总把线性变换看成是平面上所有以原点为起点的向量所成的集合到其自身的映射，并且所有的向量都用列向量表示.

2. 二阶矩阵与平面向量的乘法

教科书先讨论旋转角是 30° 的旋转变换

$$\begin{cases} x'=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x-\dfrac{1}{2}y, \\ y'=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}y, \end{cases}$$

它把直角坐标系内的向量 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 变成了新向量 $\begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2}x-\dfrac{1}{2}y \\ \dfrac{1}{2}x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}y \end{bmatrix}$，并设想 $\begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2}x-\dfrac{1}{2}y \\ \dfrac{1}{2}x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}y \end{bmatrix}$ 是二阶矩阵 $\begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$ 与向量 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ “相乘”的结果．教学中应揭示出这种“相乘”的特点：$\begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2}x-\dfrac{1}{2}y \\ \dfrac{1}{2}x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}y \end{bmatrix}$ 的第一个分量为 $\begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$ 的第一行的元素与 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 的对应位置元素乘积的和，第二个分量为 $\begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$ 的第二行的元素与 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 的对应位置元素乘积的和．以此引入二阶矩阵与平面向量的乘法．

在二阶矩阵与平面向量乘法的教学中，应特别强调以下两点：

（1）二阶矩阵与平面向量的乘法与以前遇到过的乘法——数的乘法、数与向量的乘法都不相同，学生特别容易出错，应提示学生弄清二阶矩阵与平面向量的乘法法则中蕴涵的规律，切不可死记硬背．

（2）熟练使用二阶矩阵与平面向量的乘积表示线性变换．一方面，任何一个线性变换

$$\begin{cases} x'=ax+by, \\ y'=cx+dy \end{cases} \quad (a,\ b,\ c,\ d \text{ 均为常数})$$

都可以表示为

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix};$$

另一方面，任何一个二阶矩阵 A 都唯一确定了一个线性变换，这个变换把在直角坐标系 xOy 内的每一个向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 变成了新向量 $A\boldsymbol{\alpha}=A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

3. 对例 1、例 2 的说明

安排例 1、例 2 的目的都是巩固、掌握二阶矩阵与平面向量的乘法，例 2 还帮助学生进一步掌握平面直角坐标系内的点与向量的一一对应关系．

（三）线性变换的基本性质

1. 线性变换的基本性质

教科书首先定义“数乘平面向量”和“平面向量的加法”，接着设置一个“探究”栏目，让学生通过作图探究数乘平面向量和平面向量加法的几何意义．这部分内容是以矩阵为工具研究线性变换的基本性质的基础．

（1）线性变换的基本性质

数学中，引进一种运算后，一般都要考察相应的运算律问题．对于二阶矩阵与平面向量的乘法，教科书也遵循此一般性原则，通过研究运算律得到线性变换的基本性质．

教科书首先设置了一个“探究”栏目，学生通过几何直观可以得到：把向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ 先伸长 2 倍再按逆时针方向旋转 90°，以及把向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 先按逆时针方向旋转 90°再伸长 2 倍，这两个过程的结果相同，用数学式子表示为 $A(2\boldsymbol{\alpha})=2A\boldsymbol{\alpha}$，其中 $A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$．当然，也可以通过计算“数乘平面向量”“二阶矩阵与平面向量的乘积”，验证其正确性．在此基础上，从特殊到一般，从具体到抽象，提出问题：“设 A 是一个二阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}$ 是平面上的任意一个向量，λ 是任意一个实数，是否也有 $A(\lambda\boldsymbol{\alpha})=\lambda A\boldsymbol{\alpha}$ 成立呢？”最后证明结论 $A(\lambda\boldsymbol{\alpha})=\lambda A\boldsymbol{\alpha}$ 成立．教科书通过类似的过程，得到 $A(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=A\boldsymbol{\alpha}+A\boldsymbol{\beta}$．这就得到了线性变换的基本性质．需要指出的是，线性变换的基本性质有两种表述形式，也就是教科书中的性质 1 与定理 1，它们是等价的（即它们能够互相推出）．

（2）线性变换基本性质的几何解释

点、线是构成平面图形的基本元素．根据线性变换的定义，线性变换把平面上的基本元素——点（或向量）变成点（或向量），自然需要讨论线性变换把平面上的基本元素——直线（或线段）变成什么图形．教科书先考察两个特殊线性变换对平面上直线的作用结果，从几何图形上容易发现：在平面直角坐标系 xOy 内，关于 x 轴的（正）投影变换把直线变为直线（或一点）；伸缩变换

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

把直线 $y=kx+b$（其中 k，b 均为常数）变成直线 $y=2kx+2b$．这两个线性变换或把直线变成了直线，或把直线变成了一点．进一步，通过“思考”栏目引导学生考察旋转变换 R_{30°：$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$，切变变换 σ：$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ 把直线 $y=kx+b$（其中 k，b 均为常数）变成什么图形．类似于前面的讨论，学生容易发现它们都把直线 $y=kx+b$（其中 k，b 均为常数）变成了直线．通过上述实例，学生对线性变换的几何性质有了感性认识，在此基础上，教科书给出线性变换的基本性质：二阶矩阵对应的变换（线性变换）把平面上的直线变成直线（或一点）．上述过程是一个典型的从特殊到一般、运用归纳推理得出一般结论的过程．

为了证明这个性质，最关键的是确定直线的向量形式．最常用的直线的向量形式是点向式，已知直线上的一点（即一个向量 $\boldsymbol{\alpha}$）和平行于该直线的一个非零向量 $\boldsymbol{\beta}$（称为直线的方向向量），确定直线的向量形式．容易得到，任意一个向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 的终点在直线上的充分必要条件是：$(\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\alpha})/\!/\boldsymbol{\beta}$，即存在实数 t，使得 $\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\alpha}=t\boldsymbol{\beta}$．从而该直线的点向式为

$$\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+t\boldsymbol{\beta}\text{，其中 } t \text{ 是实参数．} \qquad ①$$

教科书采用的是由向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 的终点所确定的直线的向量形式：

$$\boldsymbol{\gamma}=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2\text{，其中 } \lambda_1\text{，}\lambda_2 \text{ 是实参数，且 } \lambda_1+\lambda_2=1． \qquad ②$$

这种形式实际上是对点向式变形得到的，这里的方向向量取为 $\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1$．形式①的优点是与选修 2-1 中的形式一致；形式②的优点是与线性变换的基本性质的形式（代数形式）类似，有利于学生巩固、理解基本性质．教学中，可选用直线的这两种向量形式中的任意一种，但都应围绕任意一个向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 的终点在直线上的充分必要条件展开．如果选用形式①，那么性质 2 的证明过程如下：