考研数学精题660

陈文灯 陈启浩 编著

分析·详解·评注

抓基础
抓方法
抓技巧

多看书
多做题
多总结

Ⓐ
Ⓑ
Ⓒ

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

考研数学精题660

——分析·详解·评注——

陈文灯　陈启浩　编著

中国铁道出版社

2008年·北　京

图书在版编目(CIP)数据

考研数学精题660:分析·详解·评注/陈文灯,陈启浩主编.—北京:中国铁道出版社,2008.6

ISBN 978-7-113-08974-0

Ⅰ.考… Ⅱ.①陈…②陈… Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-习题 Ⅳ.013-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第083537号

书　　名:考研数学精题660

作　　者:陈文灯　陈启浩　编著

策划编辑:殷小燕

责任编辑:殷小燕　　　**电话:**51873147

封面设计:付　巍

责任校对:张玉华

责任印制:李　佳

出版发行:中国铁道出版社

印　　刷:北京鑫正大印刷有限公司

版　　次:2008年6月第1版　2008年6月第1次印刷

开　　本:787 mm×1 092 mm　1/16　印张:30.5　字数:873千

印　　数:1~10 000册

书　　号:ISBN 978-7-113-08974-0/O·186

定　　价:40.00元

前　言

如何复习好数学,考好数学,这是历届考生常问的话题。我们想借此机会将历届高分学员的成功经验向同学们作一介绍:

“二抓”,“三多一少”。

“二抓”是指抓基础,抓方法技巧。基础是指基本概念、基本理论、基本运算。如果概念没有完全搞清楚,似是而非,做题时必然无从下手,甚至会犯南辕北辙的错误。基本理论吃不透就会犯错套公式定理的错误。基本运算不熟练会影响做题速度和正确性。抓方法技巧也是应试复习中必不可少的重要环节。有人说“不要技巧”,这是一种无知罔说或故意误导,要知道研究生考试是水平和选拔考试。是选拔就必然有一定难度、技巧性较高的考题。要快速、准确地解这类题,就必须在平时通过观摩和做一定数量的题才有可能。

“三多一少”是指多看书、多做题、多做归纳总结,做题时要少核对书中的参考答案。核对多了,一会浪费很多时间,二会产生依赖性,对自己不相信。

我们现在编写的这本书的例题均是选自国内外重要的文献资料。概念性、技巧性比较强。解题分析比较详细,目的在于传授学生分析问题的方法和技巧。评注部分虽寥寥数语,往往却能进一步打开学生心扉,启迪思维,扩展思路,请勿忽视。

本书可供考研学子及本科生、专科生使用。

本书编写仓促,错讹之处请读者和数学同仁批评指正。

编　者

2008.5

目　录

第一部分　高等数学

第一章　极限与连续

1.1　(1234)*) 求数列极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1}\dfrac{\cos 2t}{4t^2}\mathrm{d}t$.

【分析】　利用$1-2t^2<\cos 2t<1(0<t<1)$对$\dfrac{\cos 2t}{4t^2}$进行缩小和放大,然后应用数列极限存在准则 I(见本题【评注】)计算所给极限.

【详解】由于$0<t<1$时,$1-2t^2<\cos 2t<1$,所以

$$\frac{1}{4t^2}-\frac{1}{2}<\frac{\cos 2t}{4t^2}<\frac{1}{4t^2}.$$

于是有$\dfrac{1}{4}-\dfrac{3}{4n}+\dfrac{1}{2n^2}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1}\left(\dfrac{1}{4t^2}-\dfrac{1}{2}\right)\mathrm{d}t<\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1}\dfrac{\cos 2t}{4t^2}\mathrm{d}t<\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1}\dfrac{1}{4t^2}\mathrm{d}t=\dfrac{1}{4n}(n-1)$,即

$$\frac{1}{4}-\frac{3}{4n}+\frac{1}{2n^2}<\frac{1}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{1}\frac{\cos 2t}{4t^2}\mathrm{d}t<\frac{1}{4}-\frac{1}{4n}(n=1,2,\cdots),$$

并且$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{3}{4n}+\dfrac{1}{2n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4n}\right)=\dfrac{1}{4}$. 因此由数列极限存在准则 I 得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{1}\frac{\cos 2t}{4t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{4}.$$

【评注】　(Ⅰ)$\cos 2t>1-2t^2(0<t<1)$的证明:

记$f(t)=\cos 2t-(1-2t^2)$,则$f'(t)=-2\sin 2t+4t$, $f''(t)=-4\cos 2t+4>0$. 所以$f'(t)>f'(0)=0(0<t<1)$,从而$f(t)>f(0)=0$,即$\cos 2t>1-2t^2(0<t<1)$.

(Ⅱ)数列极限存在准则是:

准则Ⅰ. 设数列$\{x_n\}$,$\{y_n\}$,$\{z_n\}$满足$y_n\leqslant x_n\leqslant z_n(n=1,2,\cdots)$且$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=A$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.

准则Ⅱ. 设数列$\{x_n\}$单调不减(不增)且有上界(下界),则$\{x_n\}$收敛.

1.2　(1234)求极限$I=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{2^2}{n^2}\right)^2\cdots\left(1+\dfrac{n^2}{n^2}\right)^n}$.

【分析】　对$\sqrt[n^2]{\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{2^2}{n^2}\right)^2\cdots\left(1+\dfrac{n^2}{n^2}\right)^n}$取对数转化成和式,并考察它是否为积分和.

【详解】　由于

$$\ln\sqrt[n^2]{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right)^2\cdots\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)^n}=$$
$$\frac{1}{n^2}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)+2\ln\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right)+\cdots+n\ln\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)\right]=$$
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\ln\left[1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right]$$

---

*)括号内的数字1、2、3、4表示本题在数学一、二、三、四范围内,如果括号内的数字为1034,则表示这一题在数学一、三、四范围内,而不在数学二的范围内;如果括号内的数字为1000,则表示这一题仅在数学一范围内,等等.

是函数 $x\ln(1+x^2)$ 在 $[0,1]$ 上的积分和,所以

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right)^2\cdots\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)^n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\ln\left[1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right]}=e^{\int_0^1 x\ln(1+x^2)dx}.$$

容易算出

$$\int_0^1 x\ln(1+x^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1\ln(1+x^2)\mathrm{d}(1+x^2)=$$

$$\frac{1}{2}\left[(1+x^2)\ln(1+x^2)\Big|_0^1-\int_0^1(1+x^2)\cdot\frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x\right]=$$

$$\ln2-\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1=\ln2-\frac{1}{2},$$

所以,$I=e^{\ln2-\frac{1}{2}}=\frac{2}{\sqrt{e}}$.

【评注】 计算通项 x_n 是由 n 个因子的乘积组成的数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 时,总是先考虑 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln x_n$,即将乘积的极限转化为和式极限. 下面顺便考虑数列

$$x_n=\left(1+\frac{1}{1^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n^2}\right)(n=1,2,\cdots)$$

的收敛性. 对 x_n 取对数得

$$\ln x_n=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k^2}\right).$$

显然数列 $\{\ln x_n\}$ 单调增加,并由

$$\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k^2}\right)<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2}<1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)}=$$

$$1+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)=1+\left(1-\frac{1}{n}\right)<2(n=1,2,\cdots)$$

知 $\{\ln x_n\}$ 有上界,所以 $\{\ln x_n\}$ 收敛,因此 $\{x_n\}$ 收敛.

1.3 (1234)设 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上单调减小且非负的连续函数,$a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)\mathrm{d}x(n=1,2,\cdots)$,证明数列 $\{a_n\}$ 的极限存在.

【分析】 由 $f(x)$ 单调减少且非负可知

$$f(k)-\int_k^{k+1}f(x)\mathrm{d}x\geqslant0,\ \int_n^{n+1}f(x)\mathrm{d}x\geqslant0(k=1,2\cdots).$$

因此,$\{a_n\}$ 单调减少有下界,从而 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在.

【详解】 由 $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)\mathrm{d}x=\sum\limits_{k=1}^{n}\left[f(k)-\int_k^{k+1}f(x)\mathrm{d}x\right]+\int_n^{n+1}f(x)\mathrm{d}x\geqslant$

$\sum\limits_{k=1}^{n}\left[f(k)-\int_k^{k+1}f(x)\mathrm{d}x\right]\left(\text{由于}f(x)\text{ 是非负连续函数,所以}\int_n^{n+1}f(x)\mathrm{d}x\geqslant0\right)\geqslant$
$0(n=1,2,\cdots)$

知 $\{a_n\}$ 有下界.

由 $a_{n+1}-a_n=\left[\sum\limits_{k=1}^{n+1}f(k)-\int_1^{n+1}f(x)\mathrm{d}x\right]-\left[\sum\limits_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)\mathrm{d}x\right]=$

$$f(n+1)-\int_n^{n+1}f(x)\mathrm{d}x\leqslant0(n=1,2,\cdots)$$

知 $\{a_n\}$ 单调不增. 所以由极限存在准则Ⅱ(见第1.1题【评注】)知,数列 $\{a_n\}$ 的极限存在.

【评注】 作为本题的特例:记

$$x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n(n=1,2,\cdots),$$

则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

1.4 (1234)设$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2+(2x)^n+x^{2n}}$,求$f(x)$在$[0,+\infty)$上的表达式.

【分析】 比较$2,(2x)^n,x^{2n}$的大小:当$0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$时,$2>(2x)^n,2>x^{2n}(n=1,2,\cdots)$;当$\frac{1}{2}<x<2$时,$(2x)^n>2$($n$充分大),$(2x)^n>x^{2n}(n=1,2,\cdots)$;当$x\geqslant2$时,$x^{2n}>2,x^{2n}>(2x)^n(n=1,2,\cdots)$.所以应分三种情形分别计算极限.

【详解】 当$0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$时,$\sqrt[n]{2}\leqslant\sqrt[n]{2+(2x)^n+x^{2n}}<\sqrt[n]{6}$,且$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{6}=1$,所以,$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2+(2x)^n+x^{2n}}=1$.

当$\frac{1}{2}<x<2$时,$2x=\sqrt[n]{(2x)^n}<\sqrt[n]{2+(2x)^n+x^{2n}}<\sqrt[n]{3(2x)^n}=2x\sqrt[n]{3}$($n$充分大),且$\lim\limits_{n\to\infty}2x=\lim\limits_{n\to\infty}2x\sqrt[n]{3}=2x$,所以,$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2+(2x)^n+x^{2n}}=2x$.

当$x\geqslant2$时,$x^2=\sqrt[n]{x^{2n}}<\sqrt[n]{2+(2x)^n+x^{2n}}<\sqrt[n]{3x^{2n}}=x^2\sqrt[n]{3}$,且$\lim\limits_{n\to\infty}x^2=\lim\limits_{n\to\infty}x^2\sqrt[n]{3}=x^2$,所以,$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2+(2x)^n+x^{2n}}=x^2$.

因此,
$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2},\\ 2x, & \frac{1}{2}<x<2,\\ x^2, & x\geqslant2.\end{cases}$$

【评注】 在极限运算时,抓住极限过程中起主要作用的部分是十分重要的.等价无穷小代替实际上就是抓住“起主要作用的部分”.本题在$n\to\infty$时,起主要作用的部分与x的大小有关,比较$2,(2x)^n,x^{2n}$知应分三种情形分别考虑.

1.5 (1234)设$x_1=10,x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}(n=1,2,\cdots)$.

(1)试证:数列$\{x_n\}$收敛;

(2)求极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

【分析】 (1)由于$\{x_n\}$是由递推式定义的,所以用数列极限存在准则Ⅱ证明$\{x_n\}$收敛.

(2)对递推式两边令$n\to\infty$取极限即可算出$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$的值.

【详解】 (1)由$x_1=10$及$x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}(n=1,2,\cdots)$知$x_n>0(n=1,2,\cdots)$,即$\{x_n\}$有下界.记$f(x)=\sqrt{6+x}(x>0)$,则$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{6+x}}>0(x>0)$,即$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调增加,并且$x_1=10,x_2=4$,即$x_1>x_2$所以$\{x_n\}$单调减少.从而由数列极限存在准则Ⅱ知$\{x_n\}$收敛.

(2)记$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,则对递推式$x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$两边令$n\to\infty$取极限得$a=\sqrt{6+a}$.解此方程得 $a=3$,所以$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=3$.

【评注】 (Ⅰ)当数列$\{x_n\}$由递推式定义时,通常利用数列极限存在准则Ⅱ,证明$\{x_n\}$收敛.虽然准则Ⅱ往往只能确定$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$的存在性,但有时通过对递推式两边令$n\to\infty$取极限也能确定这个极限的值.本题就是如此.

(Ⅱ)设数列$\{x_n\}$由递推式$x_1=a,x_{n+1}=f(x_n)(n=1,2,\cdots)$定义,则在利用数列极限存在准则Ⅱ时需考虑的$\{x_n\}$的单调性可以利用导数方法解决,具体有以下的结论:

设$f'(x)\geqslant0$,则当$x_1\geqslant x_2$时$\{x_n\}$单调不增;当$x_1\leqslant x_2$时$\{x_n\}$单调不减.

这一结论证明如下:

设 $f'(x)\geqslant 0$，即 $f(x)$ 单调不减，从而由 $x_1\geqslant x_2$ 得 $x_2=f(x_1)\geqslant f(x_2)=x_3$，即 $x_2\geqslant x_3$；由 $x_2\geqslant x_3$ 得 $x_3=f(x_2)\geqslant f(x_3)=x_4$，即 $x_3\geqslant x_4$；依次类推得 $\{x_n\}$ 单调不增.
对 $x_1\leqslant x_2$ 情形同样可证.
本题的数列 $\{x_n\}$ 的单调性就是由此得到的.

1.6 (1234)设 $0<x_1<3, x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}\ (n=1,2,\cdots)$.
(1)试证：数列 $\{x_n\}$ 收敛；
(2)求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

【分析】 (1)由于数列 $\{x_n\}$ 是由递推式定义的，所以用数列极限存在准则Ⅱ证明 $\{x_n\}$ 收敛.
(2)对递推式两边令 $n\to\infty$ 取极限即可算出 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 的值.

【详解】 (1) $0<x_1<3, 0<x_{x+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}\leqslant\frac{1}{2}[x_n+(3-x_n)]=\frac{3}{2}(n=1,2,\cdots)$，所以 $x_n\in\left(0,\frac{3}{2}\right](n=2,3,\cdots)$. 记 $f(x)=\sqrt{x(3-x)}\left(0<x\leqslant\frac{3}{2}\right)$，则

$$f'(x)=\frac{3-2x}{2\sqrt{x(3-x)}}\geqslant 0\left(0<x\leqslant\frac{3}{2}\right),$$

于是由 $x_3-x_2=\sqrt{x_2(3-x_2)}-x_2=\sqrt{x_2}(\sqrt{3-x_2}-\sqrt{x_2})\geqslant\sqrt{x_2}\left(\sqrt{3-\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)=0$，即 $x_3\geqslant x_2$ 知 $\{x_n\}$ 单调不减. 从而数列 $\{x_n\}$ 收敛.

(2)记 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则对递推式两边令 $n\to\infty$ 取极限得 $a=\sqrt{a(3-a)}$. 解此方程得 $a=\frac{3}{2}, 0$（由于对 $n=2,3,\cdots$ 有 $x_n\geqslant x_2>0$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\geqslant x_2>0$，所以 $a=0$ 舍去），即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{3}{2}$.

【评注】 注意本题数列 $\{x_n\}$ 的单调性是从 $n=2$ 开始，即 $x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots$ 是单调不减的数列.

1.7 (1234)设 $x_1>0, x_{n+1}=\frac{2(1+x_n)}{2+x_n}(n=1,2,\cdots)$.
(1)试证：数列 $\{x_n\}$ 收敛；
(2)求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

【分析】 (1)由于 $\{x_n\}$ 是由递推式定义的，所以用数列极限存在准则Ⅱ证明 $\{x_n\}$ 收敛.
(2)对递推式两边令 $n\to\infty$ 取极限即可算出 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 的值.

【详解】 (1)由 $x_1>0, x_{n+1}=\frac{2(1+x_n)}{2+x_n}(n=1,2,\cdots)$ 知 $x_n>0(n=1,2,\cdots)$，且由此可得 $x_{n+1}=1+\frac{x_n}{2+x_n}<2(n=1,2,\cdots)$. 因此 $\{x_n\}$ 是有界的.
记 $f(x)=\frac{2(1+x)}{2+x}(x>0)$，则 $f'(x)=\frac{2}{(2+x)^2}>0(x>0)$，于是由

$$x_2-x_1=\frac{2(1+x_1)}{2+x_1}-x_1=\frac{2-x_1^2}{2+x_1}\begin{cases}\geqslant 0, 0<x_1\leqslant\sqrt{2},\\ <0, x_1>\sqrt{2}\end{cases}$$

知，当 $x_1\in(0,\sqrt{2}]$ 时，$x_1\leqslant x_2$，从而 $\{x_n\}$ 单调不减；当 $x_1\in(\sqrt{2},+\infty)$ 时，$x_1>x_2$，从而 $\{x_n\}$ 单调减少. 于是当 $x_1\in(0,\sqrt{2}]$ 时，$\{x_n\}$ 单调不减有上界；当 $x_1\in(\sqrt{2},+\infty)$ 时，$\{x_n\}$ 单调减少有下界. 因此 $\{x_n\}$ 收敛.

(2)记 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则对递推式 $x_{n+1}=\frac{2(1+x_n)}{2+x_n}(n=1,2,\cdots)$ 两边令 $n\to\infty$ 取极限得 $a=\frac{2(1+a)}{2+a}$. 解此方程得 $a=\sqrt{2}, -\sqrt{2}$（不合题意，舍去）. 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2}$.

【评注】 解本题时应注意的是：

数列$\{x_n\}$的单调性与x_1取值有关：当$x_1\in(0,\sqrt{2}]$时，$\{x_n\}$单调不减；当$x_1\in(\sqrt{2},+\infty)$时，$\{x_n\}$单调减少．但是，不管何种情形，$\{x_n\}$都收敛．

1.8 (1234)设$F(x,y)=\dfrac{\phi(y-x)}{2x}$，$F(1,y)=\dfrac{y^2}{2}-y+5$，$x_0>0$，$x_{n+1}=F(x_n,2x_n)(n=0,1,2,\cdots)$．求极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$．

【分析】 先确定$F(x,y)$的表达式，从而确定数列$\{x_n\}$的递推式，然后由数列极限存在准则Ⅱ，判定$\{x_n\}$收敛和计算极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$．

【详解】 在$F(x,y)=\dfrac{\phi(y-x)}{2x}$中令$x=1$得$F(1,y)=\dfrac{1}{2}\phi(y-1)$，所以由题设 $F(1,y)=\dfrac{y^2}{2}-y+5$得$\dfrac{1}{2}\phi(y-1)=\dfrac{y^2}{2}-y+5$，即$\dfrac{1}{2}\phi(y)=\dfrac{(y+1)^2}{2}-(y+1)+5=\dfrac{y^2}{2}+\dfrac{9}{2}$．

因此$F(x,y)=\dfrac{\phi(y-x)}{2x}=\dfrac{(y-x)^2}{2x}+\dfrac{9}{2x}$．从而得到$\{x_n\}$的递推式：

$$x_{n+1}=F(x_n,2x_n)=\frac{x_n}{2}+\frac{9}{2x_n}(n=0,1,2,\cdots). \qquad ①$$

显然，$x_{n+1}\geqslant 2\sqrt{\dfrac{x_n}{2}\cdot\dfrac{9}{2x_n}}=3(n=0,1,2,\cdots)$．记$f(x)=\dfrac{x}{2}+\dfrac{9}{2x}$，则$f'(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{9}{2x^2}\geqslant 0(x\geqslant 3)$．此外，$x_2-x_1=\dfrac{x_1}{2}+\dfrac{9}{2x_1}-x_1=\dfrac{9-x_1^2}{2x_1}\leqslant 0$，所以$\{x_n\}$(从$n=1$开始)单调不增．从而$\{x_n\}$是单调不增有下界的数列，于是由极限存在准则Ⅱ知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，记其值为$a$．

在①的两边令$n\to\infty$取极限得$a=\dfrac{a}{2}+\dfrac{9}{2a}$．解此方程得$a=3,-3$(不合题意，舍去)，所以$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=3$．

【评注】 本题获解的关键之一是确定数列$\{x_n\}$的递推式．

1.9 (1234)设$x_1>0$，$x_{n+1}=\dfrac{a-1+x_n}{1+x_n}(n=1,2,\cdots)$，其中$a$是常数，且$a\leqslant 2$．试问$a$为何值时数列$\{x_n\}$收敛，并计算此时的$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$．

【分析】 先推定$a<1$时$\{x_n\}$发散，然后利用数列极限存在准则Ⅱ证明$1\leqslant a\leqslant 2$时$\{a_n\}$收敛，由此得到使$\{x_n\}$收敛的a的值及$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$．

【详解】 如果$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，记为$A$，则对递推式两边令$n\to\infty$取极限得$A=\dfrac{a-1+A}{1+A}$，即$A^2=a-1$．由此可知，$a<1$时$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$不存在．下面考虑$1\leqslant a\leqslant 2$时$\{x_n\}$的收敛性．

当$1\leqslant a\leqslant 2$时，$0<x_{n+1}=1+\dfrac{a-2}{1+x_n}\leqslant 1(n=1,2,\cdots)$，即$\{x_n\}$有界．记$f(x)=\dfrac{a-1+x}{1+x}=\dfrac{a-2}{1+x}+1$，则$f'(x)=\dfrac{2-a}{(1+x)^2}\geqslant 0$．于是由

$$x_2-x_1=\frac{a-1+x_1}{1+x_1}-x_1=\frac{a-1-x_1^2}{1+x_1}\begin{cases}\geqslant 0, 0<x_1\leqslant\sqrt{a-1},\\ <0, x_1>\sqrt{a-1}\end{cases}$$

知，当$0<x_1\leqslant\sqrt{a-1}$时，$\{x_n\}$单调不减；当$x_1>\sqrt{a-1}$时，$\{x_n\}$单调减少．

综上所述，当$1\leqslant a\leqslant 2$时，$\{x_n\}$收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{a-1}$．

【评注】 本题先通过对递推式两边令$n\to\infty$取极限确定当$a<1$时$\{x_n\}$发散，于是接着只要讨论$a\in[1,2]$时$\{x_n\}$的收敛性即可．当数列由递推式定义，且递推式中含有参数(如本题的a)，要考虑参数

与该数列收敛性的关系时,一般都按本题的步骤求解.

1.10 (1234)设数列$\{x_n\}$满足$0<x_1<\pi, x_{n+1}=\sin x_n (n=1,2,\cdots)$.

(1)证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在并求该极限;

(2)计算极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

【分析】 (1)由于数列$\{x_n\}$是递推式定义的,所以利用数列极限存在准则Ⅱ证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在,并求它的值.

(2)利用$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$((1)中已算出),则由$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$知只要计算$\lim\limits_{t\to a}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{\frac{1}{t^2}}$,即得所求极限值.

【详解】 (1)由$\{x_n\}$的定义可知,对$n=1,2,\cdots$有

$$0<x_{n+1}=\sin x_n<x_n,$$

即$\{x_n\}$单调减少且有下界.因此由极限存在准则Ⅱ知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

记$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,则$a\in[0,\pi)$.对递推式$x_{n+1}=\sin x_n$两边取极限得$a=\sin a$,在$[0,\pi)$上该方程有唯一解$a=0$.从而有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

(2)对数列极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$,考虑函数极限$\lim\limits_{t\to0}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{\frac{1}{t^2}}=e^{\lim\limits_{t\to0}\frac{\ln\frac{\sin t}{t}}{t^2}}=e^{\lim\limits_{t\to0}\frac{\ln\left[1+\left(\frac{\sin t}{t}-1\right)\right]}{t^2}}=e^{\lim\limits_{t\to0}\left(\frac{\sin t}{t}-1\right)\frac{1}{t^2}}$.由于

$$\lim_{t\to0}\left(\frac{\sin t}{t}-1\right)\frac{1}{t^2}=\lim_{t\to0}\frac{\sin t-t}{t^3}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{t\to0}\frac{\cos t-1}{3t^2}=\lim_{t\to0}\frac{-\frac{1}{2}t^2}{3t^2}=-\frac{1}{6},$$

所以,$\lim\limits_{t\to0}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{\frac{1}{t^2}}=e^{-\frac{1}{6}}$,从而$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=e^{-\frac{1}{6}}$.

【评注】 题解中使用了以下结论:

$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$的充分必要条件为任意收敛于$a$的数列$\{x_n\}$都有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.因此,要计算数列极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n}}$,由$x_n\to0$知只要计算函数极限$\lim\limits_{t\to0}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{\frac{1}{t^2}}$即可.函数极限的计算方法较多,例如可以考虑使用洛必达法则,但对数列极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n}}$是不能直接使用洛必达法则的.

1.11 (1234)试确定常数A、B、C的值,使得

$$e^x(1+Bx+Cx^2)=1+Ax+o(x^3),$$

其中,$o(x^3)$是当$x\to0$时比x^3高阶的无穷小.

【分析】 由题设知

$$e^x(1+Bx+Cx^2)-(1+Ax)=o(x^3),$$

由此利用麦克劳林公式即可得到A、B、C的值.

【详解】 由于 $e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$,所以

$$e^x(1+Bx+Cx^2)-(1+Ax)=\left(1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right)(1+Bx+Cx^2)-(1+Ax)=$$

$$(1-A+B)x+\left(\frac{1}{2}+B+C\right)x^2+\left(\frac{1}{6}+\frac{B}{2}+C\right)x^3+o(x^3).$$

因此由题设 $e^x(1+Bx+Cx^2)-(1+Ax)=o(x^3)$ 得

$$\begin{cases}1-A+B=0,\\ \dfrac{1}{2}+B+C=0,\\ \dfrac{1}{6}+\dfrac{B}{2}+C=0,\end{cases}\text{即 } A=\frac{1}{3},B=-\frac{2}{3},C=\frac{1}{6}.$$

【评注】 本题也可以用以下方法求解:

记 $f(x)=e^x(1+Bx+Cx^2)$,则 $f(0)=1$,且由

$f'(x)=e^x[(1+B)+(B+2C)x+Cx^2]$ 得 $f'(0)=1+B$,且由

$f''(x)=e^x[(1+2B+2C)+(B+4C)x+Cx^2]$ 得 $f''(0)=1+2B+2C$,且由

$f'''(x)=e^x[(1+3B+6C)+(B+6C)x+Cx^2]$ 得 $f'''(0)=1+3B+6C$,

所以 $f(x)$ 的三阶麦克劳林公式为

$$f(x)=1+(1+B)x+(1+2B+2C)x^2+(1+3B+6C)x^3+o(x^3)$$

于是由题设得

$$\begin{cases}1+B=A,\\ 1+2B+2C=0,\\ 1+3B+6C=0,\end{cases}\text{即 } A=\frac{1}{3},B=-\frac{2}{3},C=\frac{1}{6}.$$

1.12 (1234)设 $f(x,y)=\dfrac{y}{1+xy}-\dfrac{1-y\sin\frac{\pi x}{y}}{\arctan x}$,$x>0,y>0$,求

(1)函数 $g(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}f(x,y)$;

(2)极限 $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)$.

【分析】 (1)对固定的 $x>0$,计算 $g(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}f(x,y)$.

(2)由(1)算得的 $g(x)$,计算 $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)$.

【详解】 (1)$g(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}f(x,y)=\lim\limits_{y\to+\infty}\left(\dfrac{y}{1+xy}-\dfrac{1-y\sin\frac{\pi x}{y}}{\arctan x}\right)=$

$$\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{1}{\frac{1}{y}+x}-\frac{1-\sin\frac{\pi x}{y}\Big/\frac{1}{y}}{\arctan x}\right)=\frac{1}{x}-\frac{1-\pi x}{\arctan x}(x>0).$$

(2) $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1-\pi x}{\arctan x}\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\arctan x-x+\pi x^2}{x\arctan x}=$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\arctan x-x+\pi x^2}{x^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{\arctan x-x}{x^2}+\pi$$

$$\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to0^+}\frac{-x^2}{2x(1+x^2)}+\pi=\pi.$$

【评注】 (Ⅰ)由于 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x,y)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{y}{1+xy}-\dfrac{1-y\sin\frac{\pi x}{y}}{\arctan x}\right)$ 不存在,所以对于本题的 $f(x,y)$ 有,

$\lim\limits_{x\to0^+}\lim\limits_{y\to+\infty}f(x,y)\neq\lim\limits_{y\to+\infty}\lim\limits_{x\to0^+}f(x,y)$,即极限次序是不能随意交换的.

(Ⅱ) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1-\pi x}{\arctan x}\right)$ 是"$\infty-\infty$"型未定式极限,对这种类型的极限总是利用通分转化成"$\dfrac{0}{0}$"或"$\dfrac{\infty}{\infty}$"型未定式极限,本题就是如此计算的.

1.13 (1234)求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}$.

【分析】"$\dfrac{0}{0}$"型未定式.先将分子有理化并算出非未定式部分的极限,然后用等价无穷小对函数进行化简,如还不能求得极限则施行洛必达法则.

【详解】
$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{[x\ln(1+x)-x^2](\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}=$$
$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x[\ln(1+x)-x]}\cdot\underbrace{\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos x(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}}_{\text{(非未定式极限)}}=$$
$$\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^3}{x[\ln(1+x)-x]}=\frac{1}{4}\lim_{x\to0}\frac{x^2}{\ln(1+x)-x}\overset{\text{洛必达法则}}{=\!=\!=}$$
$$\frac{1}{4}\lim_{x\to0}\frac{2x}{\frac{1}{1+x}-1}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to0}(1+x)=-\frac{1}{2}.$$

【评注】在计算"$\dfrac{0}{0}$"型未定式极限时,不要忙于使用洛必达法则,而应先对函数进行化简,例如分出其中的非未定式因子,并用极限运算法则算出它的极限;用等价无穷小代替分子或分母等.本题题解中,充分地运用了上述手段将极限化简为 $\dfrac{1}{4}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{\ln(1+x)-x}$ 后再施行洛必达法则.

1.14 (1234)求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin^2x}-\dfrac{\cos^2x}{x^2}\right)$.

【分析】"$\infty-\infty$"型未定式.先通分转化为"$\dfrac{0}{0}$"型未定式,然后计算极限.

【详解】
$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin^2x}-\frac{\cos^2x}{x^2}\right)=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\cos^2x\sin^2x}{x^2\sin^2x}=$$
$$\lim_{x\to0}\frac{x^2-\frac{1}{4}\sin^22x}{x^4}=\lim_{x\to0}\left(\frac{x+\frac{1}{2}\sin2x}{x}\cdot\frac{x-\frac{1}{2}\sin2x}{x^3}\right)=$$
$$\lim_{x\to0}\left(1+\frac{\sin2x}{2x}\right)\cdot\lim_{x\to0}\frac{x-\frac{1}{2}\sin2x}{x^3}=$$
$$2\lim_{x\to0}\frac{x-\frac{1}{2}\sin2x}{x^3}\overset{\text{洛必达法则}}{=\!=\!=}2\lim_{x\to0}\frac{1-\cos2x}{3x^2}=$$
$$2\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}(2x)^2}{3x^2}=\frac{4}{3}.$$

【评注】类似地可以计算极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$:
$$\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]\overset{\text{令}t=\frac{1}{x}}{=\!=\!=}\lim_{t\to0}\left[\frac{1}{t}-\frac{\ln(1+t)}{t^2}\right]=$$
$$\lim_{t\to0}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}\overset{\text{洛必达法则}}{=\!=\!=}\lim_{t\to0}\frac{1-\frac{1}{1+t}}{2t}=\frac{1}{2}.$$

1.15 (1234)求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^3}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$.

【分析】 “$\dfrac{0}{0}$”型未定式.用等价无穷小代替化简后再计算极限.

【详解】 由于

$$\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x-1=e^{x\ln\frac{2+\cos x}{3}}-1\sim x\ln\frac{2+\cos x}{3}=x\ln\left[1-\frac{1}{3}(1-\cos x)\right]$$

$$\sim x\left[-\frac{1}{3}(1-\cos x)\right]\sim-\frac{1}{6}x^3\,(x\to0),$$

所以 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^3}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\dfrac{1}{6}x^3}{x^3}=-\dfrac{1}{6}$.

【评注】 题解中多次使用等价无穷小代替.$x\to0$ 时:

$$e^{x\ln\frac{2+\cos x}{3}}-1\sim x\ln\frac{2+\cos x}{3},$$

$$\ln\left[1-\frac{1}{3}(1-\cos x)\right]\sim-\frac{1}{3}(1-\cos x),$$

$$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2.$$

应熟练掌握等价无穷小代替技巧.$x\to0$ 时常用的等价无穷小有:
$\sin x\sim x,\tan x\sim x,\arcsin x\sim x,\arctan x\sim x,\ln(1+x)\sim x,e^x-1\sim x,(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x(\alpha\neq0),1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$.

1.16 计算极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2+x+1}-\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}\dfrac{\ln(x+e^x)}{x}\right]$.

【分析】 所给极限是“$\infty-\infty$”型未定式,先对函数通过初等运算变形,然后利用等价无穷小代替计算极限.

【详解】

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2+x+1}-\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}\frac{\ln(x+e^x)}{x}\right]=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left\{\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2+x+1}-\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}\left[1+\frac{\ln(1+xe^{-x})}{x}\right]\right\}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2+x+1}-\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}\right)-\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}\ln(1+xe^{-x})\right],\qquad ①$$

其中,$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2+x+1}-\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}\right)\xlongequal{令t=\frac{1}{x}}$

$$\lim_{t\to0^+}\left(\sqrt[4]{\frac{1}{t^4}+\frac{1}{t^3}+\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}+1}-\sqrt[3]{\frac{1}{t^3}+\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}+1}\right)=$$

$$\lim_{t\to0^+}\frac{\sqrt[4]{1+(t+t^2+t^3+t^4)}-\sqrt[3]{1+(t+t^2+t^3)}}{t}=$$

$$\lim_{t\to0^+}\frac{\sqrt[4]{1+(t+t^2+t^3+t^4)}-1}{t}-\lim_{t\to0^+}\frac{\sqrt[3]{1+(t+t^2+t^3)}-1}{t}=$$

$$\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{1}{4}(t+t^2+t^3+t^4)}{t}-\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{1}{3}(t+t^2+t^3)}{t}=\frac{1}{4}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{12},\qquad ②$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}\ln(1+xe^{-x})=1\cdot0=0.\qquad ③$$

将②③代入①得

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2+x+1}-\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}\frac{\ln(x+e^x)}{x}\right]=-\frac{1}{12}.$$

【评注】 看上去所给极限中的函数表达式很复杂，但经初等运算变形后，所给极限成为两个极限：$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2+x+1}-\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1})$与$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}\ln(1+xe^{-x})$之差，而前一个是"$\infty-\infty$"未定式极限，而后一个是非未定式定式极限. 对这个"$\infty-\infty$"未定式极限通过变量代换转化为"$\frac{0}{0}$"型未定式极限，然后做进一步计算.

1.17 (1234)已知$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+f(x)\sin2x}-1}{e^{3x}-1}=2$，求极限$\lim\limits_{x\to0}f(x)$.

【分析】 本题是已知"$\frac{0}{0}$"型未定式极限的条件下，计算另一个函数极限$\lim\limits_{x\to0}f(x)$.

【详解】 由于$\lim\limits_{x\to0}(e^{3x}-1)=0$，所以由题设得$\lim\limits_{x\to0}[\sqrt{1+f(x)\sin2x}-1]=0$，从而$\lim\limits_{x\to0}f(x)\sin2x=0$. 因此

$$2=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+f(x)\sin2x}-1}{e^{3x}-1}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}f(x)\sin2x}{3x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\left[f(x)\frac{\sin2x}{2x}\right]. \qquad ①$$

由于$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin2x}{2x}=1\neq0$，所以由①知$\lim\limits_{x\to0}f(x)$存在，并且

$$2=\frac{1}{3}\lim_{x\to0}f(x)，即\lim_{x\to0}f(x)=6.$$

【评注】 应当注意：当$\lim\limits_{x\to a}h(x)$和$\lim\limits_{x\to a}[g(x)h(x)]$都存在时，未必有$\lim\limits_{x\to a}g(x)$存在. 但是当$\lim\limits_{x\to a}h(x)$存在且不为零和$\lim\limits_{x\to a}[g(x)h(x)]$存在时，必有$\lim\limits_{x\to a}g(x)$存在.

1.18 (1234)已知函数$f(x)$满足$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\left[1+\frac{f(x)}{1-\cos x}\right]}{2^x-1}=4$，求极限$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^3}$.

【分析】 由题设知$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{1-\cos x}=0$，且$\ln\left[1+\frac{f(x)}{1-\cos x}\right]\sim\frac{f(x)}{1-\cos x}(x\to0)$. 由此可以算得$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^3}$的值.

【详解】 由于
$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\left[1+\frac{f(x)}{1-\cos x}\right]}{2^x-1}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{f(x)}{1-\cos x}}{x\ln2}=\frac{1}{\ln2}\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x(1-\cos x)}=$$
$$\frac{1}{\ln2}\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{\frac{1}{2}x^3}=\frac{2}{\ln2}\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^3},$$

所以由题设得

$$\frac{2}{\ln2}\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^3}=4，即\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^3}=2\ln2.$$

【评注】 (Ⅰ)本题获解的关键是由题设推出$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{1-\cos x}=0$.

(Ⅱ)类似地可以计算以下问题：

已知 $\lim\limits_{x\to0}\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=e^2$，求$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}$. 解答如下：

由题设知$\lim\limits_{x\to0}\left[x+\frac{f(x)}{x}\right]=0$，所以$\lim\limits_{x\to0}\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$是"$1^\infty$"型未定式极限.

因此,由 $\lim\limits_{x\to0}\left[1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=e^2$ 得 $\lim\limits_{x\to0}\left[x+\dfrac{f(x)}{x}\right]\dfrac{1}{x}=2$,即 $1+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=2$.

由此得到　$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=1$.

1.19 (1234)设极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}[(x^5+7x^4+2)^c-x]$存在.

(1)求常数 c;

(2)对(1)求得的 c,求该极限值.

【分析】 (1)令 $t=\dfrac{1}{x}$,则由极限 $\lim\limits_{t\to0^+}\left[\dfrac{(1+7t+2t^5)^c}{t^{5c}}-\dfrac{1}{t}\right]$存在可以计算 c 的值.

(2)对于(1)确定的 c,计算所给的极限,

【详解】 由题设 $\lim\limits_{x\to+\infty}[(x^5+7x^4+2)^c-x]$存在知 $c>0$. 于是由

$$\lim_{x\to+\infty}[(x^5+7x^4+2)^c-x]\xlongequal{令 t=\frac{1}{x}}\lim_{t\to0^+}\left[\frac{(1+7t+2t^5)^c}{t^{5c}}-\frac{1}{t}\right]=$$

$$\lim_{t\to0^+}\frac{(1+7t+2t^5)^c-t^{5c-1}}{t^{5c}}$$

存在知必有 $\lim\limits_{t\to0^+}[(1+7t+2t^5)^c-t^{5c-1}]=0$. 从而有 $5c-1=0$,即 $c=\dfrac{1}{5}$.

(2)当 $c=\dfrac{1}{5}$时,

$$\lim_{x\to+\infty}[(x^5+7x^4+2)^c-x]=\lim_{t\to0^+}\frac{(1+7t+12t^5)^{\frac{1}{5}}-1}{t}=$$

$$\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{1}{5}(7t+12t^5)}{t}=\frac{7}{5}.$$

【评注】 关于未定式极限的题型大致可以分为三类:

(1)计算具体函数的未定式极限;

(2)已知某个包含有抽象函数的未定式极限,计算另一个包含有这个抽象函数的未定式极限;

(3)已知某个包含有未知常数的未定式极限,确定这些常数.

1.20 (1234)确定常数 a,b,c 的值,使得 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ax-\sin x}{\int_b^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}dt}=c(c\neq0)$.

【分析】 由题设知$\lim\limits_{x\to0}\int_b^x\dfrac{\ln(1+t^3)}{t}dt=0$,由此可得$b=0$. 于是对$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ax-\sin x}{\int_0^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}dt}$使用洛必达法则即可得到 a 与 c 的值.

【详解】 如果 $b\neq0$,则$\lim\limits_{x\to0}\int_b^x\dfrac{\ln(1+t^3)}{t}dt\neq0$(事实上,当 $b<0$ 时,$\lim\limits_{x\to0}\int_b^x\dfrac{\ln(1+t^3)}{t}dt=\int_b^0\dfrac{\ln(1+t^3)}{t}dt>0$;当 $b>0$ 时,$\lim\limits_{x\to0}\int_b^x\dfrac{\ln(1+t^3)}{t}dt=\int_b^0\dfrac{\ln(1+t^3)}{t}dt<0$). 由此得到 $c=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ax-\sin x}{\int_b^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}dt}=0$,这与题设矛盾. 于是 $b=0$,因此

$$c=\lim_{x\to0}\frac{ax-\sin x}{\int_0^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}dt}\xlongequal{洛必达法则}\lim_{x\to0}\frac{a-\cos x}{\frac{\ln(1+x^3)}{x}}. \quad ①$$

由此可知$\lim\limits_{x\to0}(a-\cos x)=0$,即$a=1$代入①得

$$c=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\frac{\ln(1+x^3)}{x}}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

【评注】 本题获解的关键是由$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ax-\sin x}{\int_b^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}=c(c\neq0)$推出$b=0$.

这里指出$\int_b^x\dfrac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t$不是广义积分,是定积分,这是因为$\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\ln(1+t^3)}{t}=0$.

1.21 (1234) 设函数$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(\mathrm{e}^n+x^n)}{n}(x>0)$.

(1) 求$f(x)$的表达式;

(2) 讨论$f(x)$的连续性.

【分析】 (1)x^n与e^n的大小关系为:当$0<x\leqslant\mathrm{e}$时$0<x^n\leqslant\mathrm{e}^n$;当$x>\mathrm{e}$时,$\mathrm{e}^n<x^n$.所以应分两种情形计算所给的极限.

(2) 由连续性的定义和(1)算得的表达式确定$f(x)$的连续性.

【详解】 (1) 由于当$0<x\leqslant\mathrm{e}$时,

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(\mathrm{e}^n+x^n)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+\ln\left[1+\left(\frac{x}{\mathrm{e}}\right)^n\right]}{n}=1+\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left[1+\left(\frac{x}{\mathrm{e}}\right)^n\right]}{n}=1;$$

当$x>\mathrm{e}$时,

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(\mathrm{e}^n+x^n)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln x+\ln\left[1+\left(\frac{\mathrm{e}}{x}\right)^n\right]}{n}=\ln x,$$

所以,
$$f(x)=\begin{cases}1, & 0<x\leqslant\mathrm{e},\\ \ln x, & x>\mathrm{e}.\end{cases}$$

(2) 由$f(x)$的表达式可知,当$x\in(0,\mathrm{e})\cup(\mathrm{e},+\infty)$时,$f(x)$连续.由于

$$f(\mathrm{e})=\lim_{x\to\mathrm{e}^-}f(x)=\lim_{x\to\mathrm{e}^+}f(x)=1,$$

所以$f(x)$在点$x=\mathrm{e}$处也连续.因此$f(x)$在$(0,+\infty)$内连续.

【评注】 注意:$f(x)$在点$x=\mathrm{e}$处不可导.

1.22 (1234) 求极限$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

【分析】 由于其中的函数是分段函数,所以应从计算点$x=0$处的左、右极限入手.

【详解】 因为$\lim\limits_{x\to0^-}\left(\dfrac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(\dfrac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}-\dfrac{\sin x}{x}\right)=\dfrac{2+0}{1+0}-1=1;$

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2\mathrm{e}^{-\frac{4}{x}}+\mathrm{e}^{-\frac{3}{x}}}{\mathrm{e}^{-\frac{4}{x}}+1}+\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{0+0}{0+1}+1=1,$$

所以,$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)=1$.

【评注】 (Ⅰ)计算分段函数在分段点处的极限时,总是从计算左、右极限入手.$f(x)$在$x=x_0$处的极限与其左、右极限的关系为: