普通高等教育

电气信息类规划教材

免费下载电子教案

信号与控制基础

张家海 主编

机械工业出版社

CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育电气信息类规划教材

信号与控制基础

张家海　主编
徐耀群　主审

机 械 工 业 出 版 社

本书的主要内容包括连续系统的时域分析，连续系统的 s 域分析，自动控制的一般概念，控制系统的数学模型，线性系统的时域分析，频域分析法，控制系统的综合与校正。每章均配有习题，以帮助读者深入地进行学习。

本书既可作为高等学校自动控制原理课程的教材，也可作为工程技术人员自学的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

信号与控制基础/张家海主编. —北京：机械工业出版社，2008.3
（普通高等教育电气信息类规划教材）
ISBN 978-7-111-23494-4

Ⅰ. 信…　Ⅱ. 张…　Ⅲ. ①信号系统②自动控制系统　Ⅳ. TN911.6　TP273

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 020026 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码　100037）
责任编辑：李馨馨
责任印制：邓　博

北京市朝阳展望印刷厂印刷

2008 年 5 月第 1 版・第 1 次印刷
184mm×260mm ・ 15 印张 ・367 千字
0001—5000 册
标准书号：ISBN 978—7—111—23494—4
定价：25.00 元

凡购本书，如有缺页，倒页，脱页，由本社发行部调换
销售服务热线电话：(010)68326294
购书热线电话：(010)88379639　88379641　88379643
编辑热线电话：(010)88379753　88379739
封面无防伪标均为盗版

前　　言

本书是在当前很多院校将“信号与系统”和“自动控制原理”合并为一门课程的背景下编写的。近年来随着高等院校专业面的拓宽和专业界限的模糊化，电气类专业和电子类专业都要开设“信号与系统”和“自动控制原理”课程，很多学校的机电类和机械类专业也要开设这两门课程。实际上这两门课程关系密切，“自动控制原理”是“信号与系统”在自动控制领域的应用和发展，“信号与系统”是“自动控制原理”的基础，两门课程的内容有大量的重复。目前在很多专业都在压缩学时的情况下，可根据两门课程的关系，将其内容有机地结合成一门课程。本课程建议授课学时为60～80小时，实验学时8～16小时。

本书给出“信号与系统”和“自动控制原理”的基本概念、基本理论和基本方法。从内容上删繁就简，压缩非主流、数学性或工程性很强的内容，尽可能少而精。本书的写作思路是从一般系统到控制系统，即一般理论是控制理论的基础，而控制理论是一般理论的应用。书中第1章至第3章是信号部分，由信号的基本概念入手对一般系统的基本理论和分析方法进行介绍。第4章至第8章是自动控制部分，主要介绍了控制系统的基本概念，控制理论研究的对象和任务，控制系统的数学模型的建立和分析，线性系统的时域分析中的系统稳定性、快速性、准确性问题，系统根轨迹分析法，系统的频域分析法，并对线性系统的校正方法做了整体的介绍。

本书的主要篇幅是“自动控制原理”部分，共占5个章节，每个章节都配合大量的实例对基本概念、基本理论和基本方法进行阐述。遵照认识规律使理论内容由浅入深，由易到难，层层深入。本书注重通过实例体现理论的完整性与工程实用性相结合，培养学生的工程意识。书中各个章节都带有适量精选的习题，题目难度层次不同，适于不同层次的学生和读者使用。

本书由张家海主编。第1、2、3章由孙传峰编写，第4、5章由孙书芳编写，第6、7、8章由张家海编写。全书由哈尔滨商业大学徐耀群教授审阅，其中信号部分由三江学院孙宪君教授审阅，并提出了许多宝贵意见，在此表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，书中难免存在不妥之处，请读者见谅，并提出宝贵意见。

为了配合本书的教学，机械工业出版社为读者提供了免费的电子教案，读者可在机械工业出版社网站(www.cmpedu.com)下载。

作　者

目　　录

前言

第 1 章　信号与系统概述 ………… 1

1.1　信号与系统的基本概念 ………… 1

1.2　信号的描述 ………… 1

1.2.1　信号的特性 ………… 1

1.2.2　信号的分类 ………… 2

1.2.3　信号的基本运算与变换 ………… 4

1.2.4　典型信号介绍 ………… 8

1.3　系统的分类 ………… 15

1.3.1　线性时不变系统的性质 ………… 16

1.3.2　系统数学模型的形式 ………… 17

1.3.3　系统方程的求解方法 ………… 22

1.4　小结 ………… 22

1.5　习题 ………… 22

第 2 章　连续系统的时域分析 ………… 25

2.1　LTI 连续系统的响应 ………… 25

2.2　冲激响应和阶跃响应 ………… 31

2.3　卷积积分 ………… 34

2.4　卷积积分的性质 ………… 36

2.5　小结 ………… 38

2.6　习题 ………… 39

第 3 章　连续系统的 s 域分析 ………… 40

3.1　拉普拉斯变换 ………… 40

3.2　拉普拉斯变换的性质 ………… 41

3.3　拉普拉斯逆变换 ………… 44

3.4　复频域分析 ………… 48

3.5　小结 ………… 51

3.6　习题 ………… 51

第 4 章　自动控制的一般概念 ………… 52

4.1　自动控制理论发展概述 ………… 52

4.2　自动控制和自动控制系统的基本概念 ………… 53

4.2.1　自动控制问题的提出 ………… 53

4.3.2 开环控制系统 …… 55
4.2.3 闭环控制系统 …… 56
4.2.4 开环控制系统与闭环控制系统的比较 …… 56
4.2.5 复合控制系统 …… 57
4.3 自动控制系统的基本组成 …… 57
4.4 控制系统示例 …… 58
4.5 自动控制系统的分类 …… 61
4.5.1 线性系统和非线性系统 …… 61
4.5.2 定常系统和时变系统 …… 62
4.5.3 连续系统和离散系统 …… 63
4.5.4 单输入单输出系统和多输入输出系统 …… 63
4.6 对控制系统性能的基本要求 …… 63
4.7 本课程的研究内容 …… 65
4.8 小结 …… 66
4.9 习题 …… 66
第5章 控制系统的数学模型 …… 68
5.1 控制系统的时域数学模型 …… 68
5.1.1 线性元部件、线性系统微分方程的建立 …… 68
5.1.2 非线性系统微分方程的线性化 …… 72
5.2 控制系统的复域数学模型 …… 73
5.2.1 传递函数 …… 74
5.2.2 传递函数的特点 …… 75
5.2.3 典型环节的传递函数 …… 76
5.3 控制系统的框图及其等效变换 …… 81
5.3.1 框图 …… 81
5.3.2 系统框图的构成 …… 81
5.3.3 环节间的连接 …… 83
5.3.4 框图的变换和简化 …… 85
5.4 控制系统的信号流图 …… 88
5.4.1 系统的信号流图 …… 88
5.4.2 信号流图的性质 …… 89
5.4.3 信号流图的简化 …… 89
5.4.4 信号流图的增益公式 …… 89
5.5 小结 …… 91
5.6 习题 …… 91
第6章 线性系统的时域分析 …… 95
6.1 典型输入信号 …… 95
6.2 时域性能指标 …… 96
6.3 一阶系统的时域分析 …… 97

6.3.1 单位阶跃响应 …… 98
6.3.2 单位斜坡响应 …… 98
6.3.3 单位脉冲响应 …… 99
6.4 二阶系统的时域分析 …… 100
6.4.1 典型二阶系统的传递函数 …… 101
6.4.2 二阶系统的阶跃响应 …… 102
6.4.3 系统的暂态性能指标 …… 103
6.5 高阶系统的时域分析 …… 107
6.5.1 高阶系统单位阶跃响应 …… 107
6.5.2 闭环主导极点 …… 108
6.5.3 估算高阶系统动态性能指标的零点极点法 …… 108
6.6 系统的稳定性分析 …… 109
6.7 控制系统的误差与稳态误差 …… 114
6.7.1 控制系统的误差与稳态误差 …… 114
6.7.2 稳态误差分析与静态误差系数 …… 116
6.8 小结 …… 124
6.9 习题 …… 124
第7章 频域分析法 …… 127
7.1 频率特性的基本概念 …… 127
7.1.1 频率特性的定义 …… 127
7.1.2 频率特性和传递函数的关系 …… 128
7.1.3 频率特性的图形表示方法 …… 129
7.2 频率特性的极坐标图 …… 132
7.2.1 基本概念 …… 132
7.2.2 典型环节频率特性的极坐标图 …… 133
7.2.3 系统的开环频率特性极坐标图 …… 136
7.3 频率特性的对数坐标图 …… 142
7.3.1 基本概念 …… 142
7.3.2 典型环节频率特性的伯德图 …… 145
7.3.3 系统开环伯德图的绘制 …… 150
7.3.4 最小相位系统和非最小相位系统 …… 153
7.4 频域稳定判据及其相对稳定性 …… 154
7.4.1 奈奎斯特稳定判据 …… 154
7.4.2 奈奎斯特稳定判据的应用 …… 158
7.4.3 对数稳定判据 …… 159
7.5 用开环频率特性分析系统的性能 …… 162
7.5.1 系统开环对数频率特性与闭环稳定性的关系 …… 162
7.5.2 系统开环对数频率特性与闭环稳态误差的关系 …… 164
7.5.3 开环对数频率特性与系统时域性能之间的关系 …… 166

7.5.4 开环频率特性的高频段对系统性能的影响 ······ 172
7.6 开环和闭环指标的关系 ······ 172
7.6.1 闭环频率特性 ······ 172
7.6.2 闭环频域指标与时域指标的关系 ······ 173
7.6.3 开环频域指标和闭环频域指标的关系 ······ 175
7.7 系统的闭环频率特性 ······ 176
7.8 系统时域指标估算 ······ 182
7.9 小结 ······ 190
7.10 习题 ······ 191
第8章 控制系统的综合与校正 ······ 195
8.1 校正的基础知识 ······ 195
8.1.1 性能指标 ······ 196
8.1.2 校正的作用 ······ 196
8.1.3 校正方式 ······ 197
8.1.4 基本控制规律 ······ 198
8.2 频率法串联校正 ······ 200
8.2.1 开环频率特性与时域性能指标间的关系 ······ 200
8.2.2 串联超前校正 ······ 203
8.2.3 串联滞后校正 ······ 207
8.2.4 串联滞后－超前校正 ······ 211
8.2.5 串联PID校正 ······ 214
8.2.6 按期望特性进行串联校正 ······ 217
8.3 反馈校正设计 ······ 218
8.3.1 反馈校正的原理 ······ 218
8.3.2 反馈校正举例 ······ 220
8.4 复合控制校正设计 ······ 221
8.4.1 复合控制的概念 ······ 221
8.4.2 按扰动补偿的复合控制系统 ······ 222
8.4.3 按输入补偿的复合控制系统 ······ 223
8.5 小结 ······ 226
8.6 习题 ······ 226
参考文献 ······ 229

第 1 章　信号与系统概述

1.1　信号与系统的基本概念

随着科学技术的飞速发展,信号与系统的概念极为广泛地出现在通信、电力电子、自动控制、图像处理、生物医学、政治经济等各种领域中。从广义上讲,信号是信息的载体,而系统是信号传输与处理(亦即信息传输与处理)的过程与手段。

常见的系统有通信系统、运输系统、控制系统、经济系统和生态系统等,在分析它们时往往进行抽象化处理,即抽去具体系统的物理或社会含义而把它转化为理性化的数学模型,从而使所有属性相同的系统都可以使用相同的描述和分析方法,同时把系统中运动和变化的各种量,如电流、电压、温度、产量等统称为信号,这些信号一般都是随时间变化的,其往往也抽象化成数学形式,表示成时间的函数或序列。

系统是客观存在的,信号是其中按一定规律运动、变化的量。它们之间的关系是信号作用于系统,系统对其进行加工、处理、变换之后发送输出信号,常称系统的输入信号为激励(excitation),输出信号为响应(response)。系统分析的目的就是研究给定系统在已知激励作用下所产生的响应,其相互作用关系如图 1.1 所示。

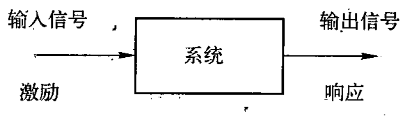

图 1.1　信号与系统关系图

随着电子技术的发展与成熟,各种系统都可以用电子系统来模拟和表示。一般称小规模电系统为电路,中规模电系统为系统,大规模电系统为网络。同时,电信号也成为最典型的一种信号形式,它反映了电压或者电流随时间或空间的变化关系。当其仅依赖于时间变化时称为一维信号,如果同时依赖于时间和空间变化则称为 n 维信号;当这种关系成连续变化时则将其抽象化成数学中的函数 $f(t)$或 $f(t,x,y)$,而成离散变化时则表示成序列 $f(k)$。

称函数或序列的图像为信号的波形。信号波形可以从几何上比较直观地反映出信号的变化趋势和规律,数学上的函数(包括序列)与几何上的波形是时域空间中比较常用的表示信号的两种方式。

1.2　信号的描述

1.2.1　信号的特性

信号的特性可以从两个方面来描述,即信号的时间特性和信号的频率特性。

(1) 信号的时间特性

任何信号都可以表示为随时间变化的函数。主要表现在随着时间 t 的变化,其波形幅值

的大小、持续时间的长短、变化速率的快慢、波动的速度以及重复周期的大小等都在发生改变。

(2) 信号的频率特性

任何信号都可以分解为许多不同频率的正弦分量之和。主要表现在各频率正弦分量所占比重的大小、主要频率分量所占有的频率范围等都不相同。

不同形式的信号具有各自不同的时间特性和频率特性，而信号的时间特性和频率特性又有着密切的联系，无论是信号的时间特性还是信号的频率特性，都包含着信号的全部信息。

1.2.2 信号的分类

对于各种信号，可以从不同角度进行划分，大致可以分为以下几类：

1. 确定性信号和随机信号

按信号随时间变化的规律来分，可以分为确定性信号和随机信号。确定性信号是指能够用一个确定的时间函数 $f(t)$（或序列 $f(k)$）来表示的信号，例如 $f(t)=2e^{-t}$、$f(t)=A\sin\omega t$ 以及我们所熟知的正弦信号、指数信号、各种周期信号等都是确定性信号。当给定某一时间值时，信号有确定的数值，通常信号可以表示为某些变量的函数形式，所以常将“信号”和“函数”二词通称。

如果一个信号不能用一个或几个确定的时间函数（或序列）来表示，就称其为随机信号，随机信号不是时间 t 的确定函数，它在每一个确定时刻的分布值是不确定的，只能通过大量试验测出它在某些确定时刻上取某些值的可能性的分布（概率分布），即它在给定时刻的值为一随机变量，需要用概率统计的理论来研究，太空中的噪声，电路元件的热噪声、散弹噪声等都是随机信号。

实际传输的信号几乎都是随机信号，但是在一定条件下，随机信号也会表现出某种确定性，例如在一个较长的时间内随时间变化的规律比较确定，即可近似看成是确定信号。总之，研究确定性信号十分重要，它是一种理想化的模型，是研究随机信号的基础，本书只研究确定性信号。以下都可以看作是确定性信号的分类。

2. 时限信号和非时限信号

按信号的持续时间划分，将信号分为时限信号和非时限信号。

存在于有限时间范围内的信号称为时限信号，如图 1.2 所示的单脉冲信号 $f_1(t)$，该信号只在 $t=0\sim3$ 的时间范围内有值。

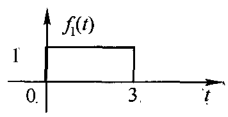

图 1.2 时限信号

存在于无限时间内的信号称为非时限信号，它又可以细分为：有始信号、有终信号和无始无终信号。有始信号又称因果信号，是指有确定的时间起始点、无明确的终点（终点在时间的 $+\infty$ 处）的非时限信号，图 1.3a 所示的信号为有始信号，其时间起点是 $t=0$；图 1.3b 所示的信号为有终信号，其时间终点是 $t=3$；图 1.3c 所示的信号为无始无终信号。

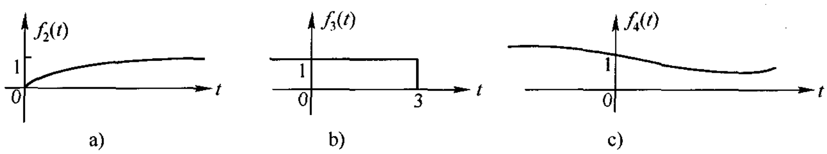

图 1.3 非时限信号

a) 有始信号 b) 有终信号 c) 无始无终信号

3. **连续时间信号和离散时间信号**

按自变量 t 取值的连续与否来分，可将信号分为连续时间信号和离散时间信号，分别简称为连续信号和离散信号。

在整个时间范围内（$-\infty < t < +\infty$）都有定义的信号称为连续信号，可以表示为 $f(t)$。其值域可能连续也可能离散。如生物的生长与时间的关系以及一年四季温度的变化等，这些都是随连续时间 t 变化的连续时间信号。

离散信号自变量 t 的取值不是连续的而是离散的，仅在时间轴上等间隔的离散点 kT（($-\infty < k < +\infty$）上才有定义，其他点不予考虑，简记为 $f(k)$，其值域可能连续也可能离散，并且称时间轴上各离散点为样点（或序列点），其对应的数值为样值，信号波形图如图 1.4 所示。

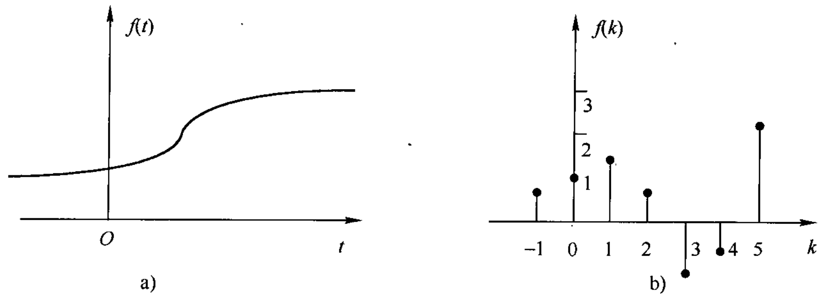

图 1.4　连续信号与离散信号

a）连续信号　b）离散信号

特别地，当连续信号的幅度也连续时，称为模拟信号；当离散信号的幅度也离散时，称为数字信号。

4. **周期信号和非周期信号**

周期信号定义在（$-\infty < t < +\infty$）区间，每个相同的时间间隔 T（或整数 N），信号波形按相同规律重复变化的信号。连续周期信号可以表示为

$$f(t)=f(t+mT),m=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

典型的信号有正弦信号、半波或全波整流信号、周期性矩形脉冲信号、方波、三角波、锯齿波等。

离散周期信号可以表示为

$$f(k)=f(k+mN),m=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

典型的信号有锯齿序列、正弦序列等。

不具有周期性的信号称为非周期信号，其中也包括通过波形包络的起伏来看具有大致规律的准周期信号。如图 1.5 所示的单边指数信号 $f(t)=\mathrm{e}^{-\alpha t}, t>0$，其在整个时间轴上波形没有规律性变化，即为非周期信号。通常对于一个序列，当无法得到一个整数 N 使得

$$f(k)=f(k+mN)$$

存在时，则为非周期序列。

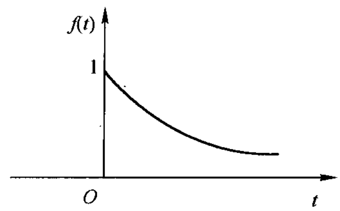

图 1.5　单边指数信号

5. **实信号和复信号**

物理可实现的信号常常是时间 t（或 k）的说函数（或序列），其在各时刻的函数（或序列）

值为实数。例如单边指数信号、正弦信号等,称它们为实信号。函数(或序列)值为复数的信号称为复信号,最常用的是复指数信号。

连续时间的复指数信号可表示为

$$f(t)=\mathrm{e}^{st}$$

式中,$s=\sigma+\mathrm{j}\omega$,$\sigma$ 是s 的实部,记作 $Re[s]$,ω 是s 的虚部,记作 $Im[s]$。根据欧拉公式可展开为

$$f(t)=\mathrm{e}^{(\sigma+\mathrm{j}\omega)t}=\mathrm{e}^{\sigma t}\cos(\omega t)+\mathrm{j}\mathrm{e}^{\sigma t}\sin(\omega t)$$

可见,一个复指数函数可分解为实部、虚部两部分,即

$$Re[f(t)]=\mathrm{e}^{\sigma t}\cos(\omega t),Im[f(t)]=\mathrm{e}^{\sigma t}\sin(\omega t)$$

两者均为实信号,而且是频率相同、振幅随时间变化的正(余)弦振荡。s 的实部σ 表征了该信号振幅随时间变化的情况,虚部 ω 表征了其振荡角频率。若 $\sigma>0$,则是增幅振荡;若 $\sigma<0$,则是衰减振荡;若 $\sigma=0$,则是等幅振荡。复指数信号的重要特征之一是它对时间的导数和积分仍然是复指数信号。

离散时间的复指数信号可表示为

$$f(t)=\mathrm{e}^{(\sigma+\mathrm{j}\omega)k}=\mathrm{e}^{\alpha k}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta k}=a^k\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta k}$$

式中,$a=\mathrm{e}^{\alpha}$,上式可以展开为

$$f(t)=a^k\cos(\beta k)+\mathrm{j}a^k\sin(\beta k)$$

其实部、虚部分别为

$$Re[f(k)]=a^k\cos(\beta k),Im[f(t)]=a^k\sin(\beta k)$$

6. **能量信号和功率信号**

为了知道信号能量或功率的特性,常研究信号(电流或电压)在单位电阻上的能量或功率,称为归一化能量或功率。

信号$f(t)$在单位电阻上的瞬时功率为$|f(t)|^2$,在区间$-a<t<a$的能量为$\int_{-a}^{a}|f(t)|^2\mathrm{d}t$;在区间$-a<t<a$的平均功率为$\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}|f(t)|^2\mathrm{d}t$。

信号能量定义为在区间$(-\infty,+\infty)$的信号 $f(t)$的能量,用字母 E 来表示,即

$$E=\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a}|f(t)|^2\mathrm{d}t \text{ 或} E=\sum_{k=-\infty}^{\infty}|f(k)|^2$$

信号功率定义为在区间$(-\infty,+\infty)$的信号 $f(t)$的能量,用字母 P 来表示,即

$$P=\lim_{a\to\infty}\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}|f(t)|^2\mathrm{d}t \text{ 或} P=\lim_{a\to\infty}\frac{1}{2a+1}\sum_{k-a}^{a}|f(k)|^2$$

若信号 $f(t)$的能量有界(即 $0<E<\infty$,这时 $P=0$)则称其为能量有限信号,简称为能量信号。仅在有限时间区间不为零或其面积可积的信号是能量信号;若信号 $f(t)$的功率有界(即$0<P<\infty$,这时 $E=\infty$),则称其为功率有限信号,简称为功率信号。周期信号或面积不可积的信号为功率信号。例如,通信系统中载波 $A\sin(\omega_0 t)$或 $P=\frac{1}{2}A^2$。

1.2.3 信号的基本运算与变换

信号在时域空间中的基本运算有加、减、平移、反转、尺度变换、微分、积分、差分,另外还有

两种特殊运算——卷积积分、卷积和，它们将在后续章节中介绍。

1. **加减运算**

信号 $f_1(t)$和 $f_2(t)$之和是指同一瞬时两信号之值对应相加所构成的“和信号”，即

$$f(t)=f_1(t)\pm f_2(t)$$

【例 1-1】 分别求出门函数 $g_\tau(t)$与符号函数 $\mathrm{sgn}(t)$相加和相减后的信号，并写出表达式。

解：两信号的加减运算过程如图 1.6 所示。

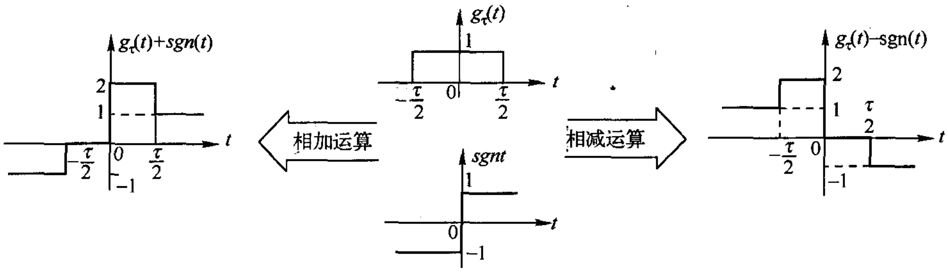

图 1.6 信号的加减运算

最后得到的表达式为

$$g_\tau(t)+\mathrm{sgn}(t)=\begin{cases}-1, & t<-\tau/2\\ 0, & -\tau/2<t<0\\ 2, & 0<t<\tau/2\\ 1, & t>\tau/2\end{cases}$$

$$g_\tau(t)-\mathrm{sgn}(t)=\begin{cases}1, & t<-\tau/2\\ 2, & -\tau/2<t<0\\ 0, & 0<t<\tau/2\\ -1, & t>\tau/2\end{cases}$$

2. **相乘运算**

信号 $f_1(t)$和 $f_2(t)$之积是指同一瞬时两信号之值对应相乘所构成的“积信号”，即

$$f(t)=f_1(t)f_2(t)$$

【例 1-2】 求门函数 $g_\tau(t)$与符号函数 $\mathrm{sgn}(t)$相乘后的信号，并写出表达式。

解：两信号的相乘运算如图 1.7 所示。

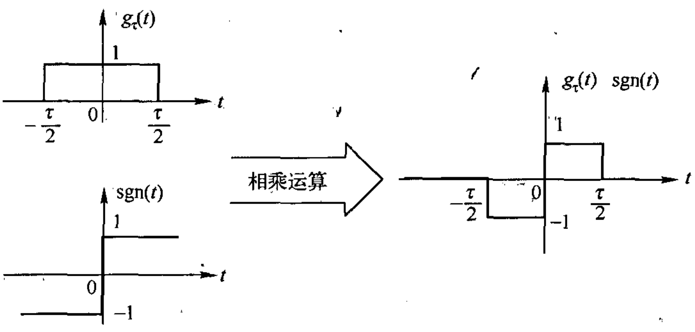

图 1.7 相乘运算

表达式为

$$g_\tau(t)\operatorname{sgn}(t)=\begin{cases}0, & |t|>\tau/2\\ -1, & -\tau/2<t<0\\ 1, & 0<t<\tau/2\end{cases}$$

注：上述加减运算和相乘运算也适用于序列 $f(k)$。

3. **反转和时移**

将信号 $f(t)$ 中的自变量 t 转换为 $-t$ 得到 $f(-t)$，其波形是将原信号 $f(t)$ 的波形以纵坐标为轴反转，如图 1.8 所示。

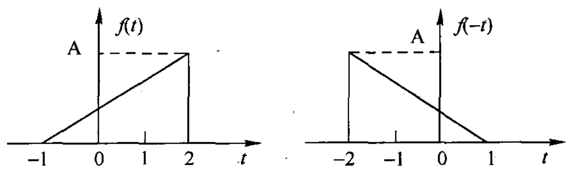

图 1.8 $f(t)$ 的反转

时移是指，若有常数 $t_0>0$，将信号 $f(t)$ 中的自变量 t 转换为 $t-t_0$ 得到信号 $f(t-t_0)$，其波形是将原信号 $f(t)$ 的波形沿时间轴向右平移时间；而将信号 $f(t)$ 中的自变量 t 转换为 $t+t_0$ 得到信号 $f(t+t_0)$，其波形是将原信号 $f(t)$ 的波形沿时间轴向左平移时间，如图 1.9 所示。

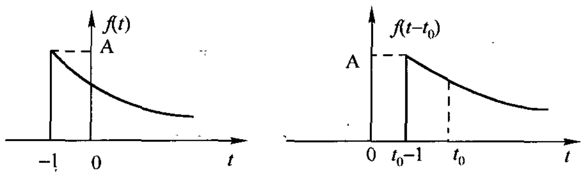

图 1.9 $f(t)$ 的时移

以上两运算也适用于序列，并且当原信号自变量变负时，同样也适用。

如果将时移和反转相结合，就可以得到信号 $f(-t-t_0)$ 和 $f(-k-k_0)$。类似地，也可以得到信号 $f(-t+t_0)$ 和 $f(-k+k_0)$。即

$$f(t)\xrightarrow{\text{右移 } t_0}f(t-t_0)\xrightarrow{\text{反转}}f(-t-t_0)$$

$$f(k)\xrightarrow{\text{右移 } k_0}f(k-k_0)\xrightarrow{\text{反转}}f(-k-k_0)$$

4. **尺度变换**

若要将信号 $f(t)$ 横坐标的尺寸进行展宽或压缩（常称为尺度变换），则可用变量 at（a 为非零常数）替代原信号 $f(t)$ 的自变量 t，即得到信号 $f(at)$。若 $a>1$，则信号 $f(at)$ 是将原信号 $f(t)$ 以原点（$t=0$）为基准，沿横轴压缩到原来的 $1/a$；若 $0<a<1$，则 $f(at)$ 表示将 $f(t)$ 沿横轴展宽至 $1/a$ 倍。如图 1.10 所示。

离散信号通常不作尺度变换，尤其不作压缩变换，这时因为 $f(ak)$ 只有在 ak 为整数时才有定义，而当 $a>1$ 或 $a<1$ 且不等于 $1/m$（m 为整数）时，离散信号常常丢失原信号 $f(k)$ 的部分信息，从而导致信号作反变换之后无法完全恢复原来的信息。

总之,结合信号的基本运算,由 $f(t)$得到 $f(-at-b)$有以下方法:

$$f(t)\xrightarrow{\text{右移 }b}f(t-b)\xrightarrow{\text{反转}}f(-t-b)\xrightarrow{\text{展宽或压缩至原来的 }1/a}f(-at-b)$$

$$f(t)\xrightarrow{\text{右移 }b}f(t-b)\xrightarrow{\text{展宽或压缩至原来的 }1/a}f(at-b)\xrightarrow{\text{反转}}f(-at-b)$$

$$f(t)\xrightarrow{\text{反转}}f(-t)\xrightarrow{\text{左移 }b}f(-t-b)\xrightarrow{\text{展宽或压缩至原来的 }1/a}f(-at-b)$$

$$f(t)\xrightarrow{\text{展宽或压缩至原来的 }1/a}f(at)\xrightarrow{\text{反转}}f(-at)\xrightarrow{\text{左移 }b/a}f(-at-b)$$

【例 1-3】 已知原信号 $f(t)$如图 1.10 所示,求 $f\left(-\frac{1}{2}t+1\right)$的波形。

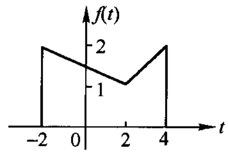

图 1.10 $f(t)$信号波形图

解: 按照先时移,后反转,最后尺度变换的顺序对原信号 $f(t)$进行变换。其变换过程及结果波形图如图 1.11 所示。

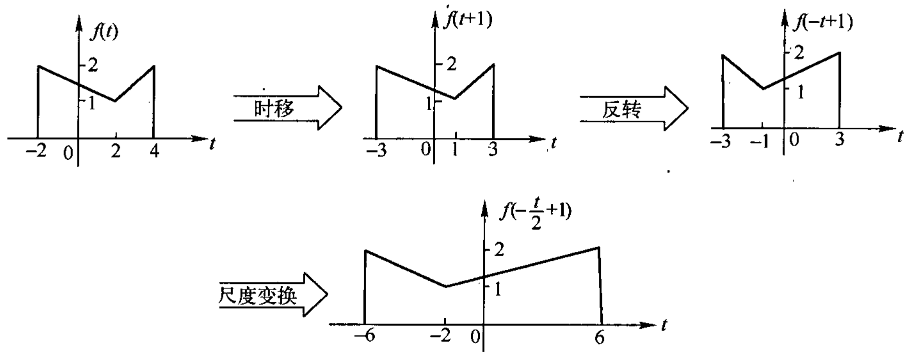

图 1.11 信号变换过程及结果

5. 微分与积分

将信号 $f(t)$求一阶导数,称为对信号 $f(t)$的微分运算,所得信号

$$f'(t)=\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$$

称为信号 $f(t)$的微分信号。

将信号 $f(t)$在区间$(-\infty,t)$内求一次积分,称为对信号 $f(t)$的积分运算。所得信号

$$f^{-1}(t)=\int_{-\infty}^{t}f(t)\mathrm{d}t$$

称为信号 $f(t)$的积分信号。

【例 1-4】 已知信号 $f(t)$ 的波形如图 1.12a 所示,求积分$\int_{-\infty}^{t}f(2-t)\mathrm{d}\tau$, 并画出波形。

解: 将信号左移 2 再反转,可得 $f(2-t)$的波形如图 1.12b 所示。

当 $t<0$ 时,$f(2-t)=0$,故

$$\int_{-\infty}^{t}f(2-\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{t}0\mathrm{d}\tau=0$$

当 $0<t<1$ 时,$f(2-t)=1$,故

$$\int_{-\infty}^{t}f(2-\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{t}0\mathrm{d}\tau+\int_{0}^{t}1\mathrm{d}\tau=t$$

当 $1<t<2$ 时，$f(2-\tau)=2$，故

$$\int_{-\infty}^{t} f(2-\tau)\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{t} 0\mathrm{d}\tau + \int_{0}^{t} 1\mathrm{d}\tau + \int_{1}^{t} 2\mathrm{d}\tau = 0 + 1 + (2t-2) = 2t-1$$

当 $t>2$ 时，$f(2-t)=0$，故

$$\int_{-\infty}^{t} f(2-\tau)\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{t} 0\mathrm{d}\tau + \int_{0}^{t} 1\mathrm{d}\tau + \int_{1}^{2} 2\mathrm{d}\tau + \int_{2}^{t} 0\mathrm{d}\tau = 0 + 1 + 2 + 0 = 3$$

总结以上各段计算结果，故可得

$$\int_{-\infty}^{t} f(2-\tau)\mathrm{d}\tau = \begin{cases} 0, & t<0 \\ t, & 0<t<1 \\ 2t-1, & 1<t<2 \\ 3, & t>2 \end{cases}$$

其波形如图 1.12c 所示。

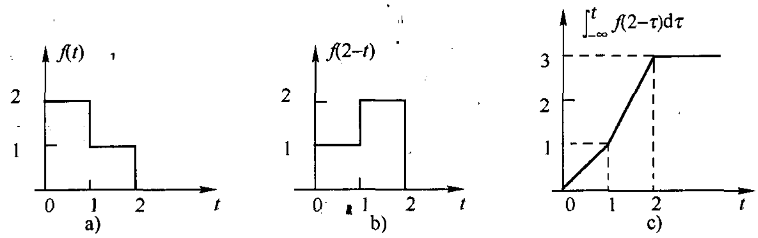

图 1.12 例 1-4 图

6. **差分运算**

离散时间序列 $f(k)$ 的一阶差分运算定义为

$$\Delta f(k) = f(k+1) - f(k)$$

从定义的离散时间一阶差分看，差分信号等于在 $k+1$ 时刻的值减去其在 k 时刻值，也表示了在该时刻的变化率。此外，还可以定义高阶差分运算，即

$$\Delta^{n} f(k) = \Delta[\Delta^{n-1} f(k)]$$

1.2.4 典型信号介绍

1. **普通信号**

(1) 直流信号

直流信号的函数表达式为

$$f(t) = A$$

式中，A 为实常数，其波形如图 1.13 所示。若 $A=1$，则称之为单位直流信号。直流信号称为常量信号。

(2) 正弦信号

正弦信号的函数表达式为

$$f(t) = A\sin(\omega t + \phi)$$

式中，A、ω、ϕ 分别称为正弦信号的振幅、角频率、初相角，均为实常数，其波形如图 1.14 所示。在信号与系统理论中把正弦函数和余弦函数都称为正弦信号。正弦信号有如下性质：

1) 它是非时限信号。

2) 它是周期信号,其角频率为 $d(\omega t+\phi)/dt=\omega$($\phi$ 为常量时),而其周期 $T=2\pi/\omega$。

3) 其微分仍然是正弦信号,即

$$f'(t)=\frac{d}{dt}f(t)=\frac{d}{dt}[A\cos(\omega t+\phi)]=\omega A\cos\left(\omega t+\phi+\frac{\pi}{2}\right)$$

可见,与原信号 $f(t)$ 相比仍是正弦信号,仅是振幅变为 ωA,初相角增加了 $\pi/2$。

4) 根据欧拉公式,正弦信号可以表示为

$$f(t)=A\cos(\omega t+\phi)=\frac{A}{2}[e^{j(\omega t+\phi)}+e^{-j(\omega t+\phi)}]$$

可见,一个正弦信号可以表示为两个相同角频率的共轭虚指数函数的加权和。

5) 它是频域空间中的一种不可再分的基本信号,频域空间的一个频率点就表示一个对应频率的正弦信号。

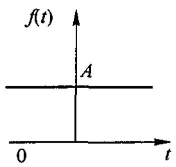

图 1.13　直流信号

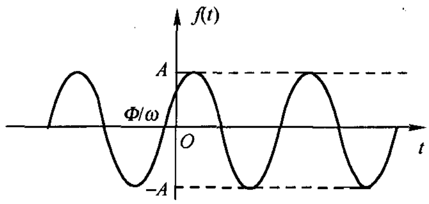

图 1.14　正弦信号

(3) 单位门信号

门宽为 τ、门高为 1 的单位门信号常用符号 $g_\tau(t)$ 表示,有时也称为单个矩形脉冲信号。其函数表达式为

$$g_\tau(t)=\begin{cases}1, & -\tau/2<t<\tau/2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

其波形如图 1.15 所示。

(4) 符号函数

符号函数用 $sgn(t)$ 表示,其函数表达式为

$$sgn(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ -1, & t<0\end{cases}$$

其波形如图 1.16 所示。

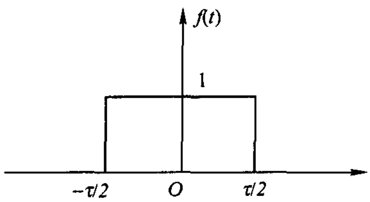

图 1.15　单位门信号

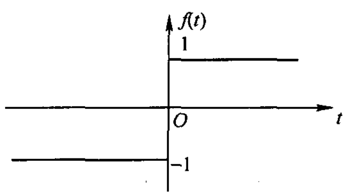

图 1.16　符号信号

(5) 单位斜坡信号

单位斜坡信号用 $r(t)$ 表示,其函数表达式为