

2003

MPA 联考高分突破

数学分册

胡显佑 褚永增 编著



中国人民大学出版社

2003 年 MPA 联考高分突破 数学分册

胡显佑 褚永增 编著

中国人民大学出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

2003 年 MPA 联考高分突破·数学分册/胡显佑, 褚永增编著. 3 版
北京: 中国人民大学出版社, 2003

ISBN 7-300-04811-0/G·995

I . 2...

II . ①胡…②褚…

III . ①公共管理-研究生-统一考试-自学参考资料

②高等数学-研究生-统一考试-自学参考资料

IV . D035

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2003) 第 060428 号

2003 年 MPA 联考高分突破 数学分册

胡显佑 褚永增 编著

出版发行 中国人民大学出版社
社 址 北京中关村大街 31 号 邮政编码 100080
电 话 010-62511242 (总编室) 010-62511239 (出版部)
010-62515351 (邮购部) 010-62514148 (门市部)
网 址 <http://www.crup.com.cn>
<http://www.easyky.com> (人大考研网)
经 销 新华书店
印 刷 三河市新世纪印刷厂
开 本 787×965 毫米 1/16 版 次 2000 年 12 月第 1 版
印 张 18.25 印 次 2003 年 7 月第 3 版
字 数 343 000 定 价 25.00 元



前言

前言

公共管理硕士(MPA)自2001年实行全国统一联考,数学作为联考的必考科目之一,要求考生系统地掌握微积分和概率统计的基础知识,要求考生具有一定的抽象概括能力、逻辑推理能力、空间想像能力、基本运算能力和综合运用能力。这对于工作多年、尤其是工作中不系统运用数学的考生来说确实是一个相当高的要求。

为了帮助有志攻读MPA的考生顺利通过数学联考,我们建议,考生在复习数学时应有计划地分为三个阶段:在第一阶段,应根据联考数学考试大纲和考试指南,系统地复习有关概念、定理和公式。每复习一单元的内容,必须完成必要的基本练习,达到基本掌握考试内容的目的。在第二阶段,则应在第一阶段的基础上,总结问题,将考试重点和题型进行归纳,通过适量的综合练习达到融会贯通的目的。在第三阶段,则进行适量的考前模拟测验,检查自己复习的效果,补救复习中的漏洞。

本书是为第二阶段的复习编写的。根据考试大纲的要求,本书将各章节的重点题型加以归纳总结。各类题型均有适量的典型例题,并做了详细解答。书中还对各类解题方法做了小结,并在各章都附有自测练习。例题和自测练习既注重循序渐进,又强调数学概念、定理和方法的综合运用。这将使考生的应试能力有较大的提高。

本书第一版出版后,得到了广大考生的欢迎,成为许多辅导班的必备教材。根据新颁布的MPA联考数学考试大纲,本书第二版进行了较大的修改:(1)增加了例题的数量和类型;增加了各节自测练习题。(2)书后的附录系统地总结了与考试内容有关的初等数学基础知识,可随手查阅常用的概念和公式。考虑到许多考生在较长时间内没有系统地运用数学,在这部分仍附有少量例题和练习题。本书第三版增加了2002年全国联考MPA数学试题。

我们希望本书修订后更便于广大考生使用,书中不足之处请广大考生赐教。

本书在编写过程中,得到了中国人民大学出版社马胜利同志和相关部门的大力支持,在此我们表示衷心的感谢.

编者

2003年6月





目

录

目 录

第一章 函数、极限与函数的连续性	1
第一节 函数	1
第二节 极限	12
第三节 函数的连续性	31
第二章 导数与微分	39
第一节 导数与微分的概念	39
第二节 导数与微分的计算	48
第三节 导数的应用	57
第三章 不定积分与定积分	80
第一节 不定积分	80
第二节 定积分	101
第四章 多元函数微分学	128
第一节 偏导数与全微分	128
第二节 多元函数的极值与条件极值	144
第五章 概率统计初步	153
第一节 随机事件及其概率	153
第二节 概率的加法公式和乘法公式	166
第三节 随机变量及其数字特征	185
附录一 初等数学重要概念、公式	203
第一节 绝对值与不等式	203
第二节 方程与方程组	211
第三节 指数与对数	218



第四节	排列与组合	227
第五节	数列	236
第六节	直线与圆锥曲线	244
第七节	三角	256
附录二	2001 年在职攻读硕士学位全国联考公共管理硕士(MPA)数学 试题及详解	269
附录三	2002 年在职攻读硕士学位全国联考公共管理硕士(MPA)数学 试题及详解	280



第一章

函数、极限与函数的连续性

第一节 函数

考点归纳

1. 函数的概念、函数的定义域和值域.
2. 函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 反函数.
4. 复合函数.
5. 基本初等函数的性质和图形.

考点突破

命题趋势

函数是微积分学的研究对象,有关函数性质的讨论将贯穿整个微积分学,在本节中,有关的重点题型为:求函数的定义域;求反函数;求复合函数;判断函数的奇偶性.

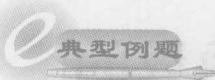
难点剖析

1. 分段函数.分段函数的定义域是各段定义域的并集;其反函数、复合函数应

分段求出.

2. 函数的有界性与单调性. 函数的这两个性质可应用导数进行讨论, 我们将在第三章讨论这一问题. 一些简单的初等函数的有界性、单调性可根据基本初等函数的性质直接判定.

3. 函数的周期性. 有关三角函数周期的讨论请参阅附录.



题型 1: 求函数的定义域

基本初等函数的定义域可直接得出; 分段函数的定义域为各段定义域的并集; 复合函数的定义域, 则应根据基本初等函数的定义域, 得到一个不等式组, 解不等式组可得复合函数的定义域.

例 1(填空题) 函数 $f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{\ln(x+2)}$ 的定义域为_____.

解 由已知函数, 自变量 x 应满足

$$\begin{cases} 9-x^2 \geqslant 0 \\ x+2 > 0 \\ x+2 \neq 1 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} -3 \leqslant x \leqslant 3 \\ x > -2 \\ x \neq -1 \end{cases}$$

在数轴上表示(图 1—1)

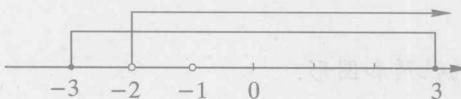


图 1—1

由此可得, 定义域

$$D(f) = (-2, -1) \cup (-1, 3]$$

例 2(填空题) 设 $f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{\ln(x+2)}$, 则 $f(\ln x)$ 的定义域为_____.

解 由例 1. $f(x)$ 的定义域为

$$D(f) = (-2, -1) \cup (-1, 3]$$

所以, 对于 $f(\ln x)$, 有

$-2 < \ln x < -1$ 或 $-1 < \ln x \leq 3$

即 $e^{-2} < x < e^{-1}$ 或 $e^{-1} < x \leq e^3$

于是 $f(\ln x)$ 的定义域为 $(e^{-2}, e^{-1}) \cup (e^{-1}, e^3]$.

例 3(选择题) 下列各选项中,两个函数相同的是().

(A) $f(x) = \cos x, g(x) = \sqrt{1 - \sin^2 x}$

(B) $f(x) = \frac{x \ln(1-x)}{x^2}, g(x) = \frac{\ln(1-x)}{x}$

(C) $f(x) = \sqrt{x(x-1)}, g(x) = \sqrt{x}\sqrt{x-1}$

(D) $f(x) = \sqrt{x^2}, g(x) = x$

解 (A) $f(x)$ 和 $g(x)$ 的定义域均为 $(-\infty, +\infty)$, 但是

$$g(x) = |\cos x|$$

即 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的对应规则不同. $f(x)$ 与 $g(x)$ 是不同的函数.

(B) 两函数有相同的定义域 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 当 $x \neq 0$ 时, $f(x) = \frac{\ln(1-x)}{x}$, 故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是相同的两个函数.

故本题应选(B).

小结 1. 两个函数 $f(x), g(x)$ 的定义域相同,且对应规律相同时,两个函数相同.

2. 如果已知函数 $y = f(x)$ 的解析表达式,求其定义域.应考虑:

(1) 分母不能是零;

(2) 偶次根式下,被开方数非负;

(3) 对数函数中底数大于 0,且不等于 1,而真数应大于 0.

(4) 在反正弦、反余弦函数 $\arcsin x$ 和 $\arccos x$ 中, $|x| \leq 1$.

根据这些要求,列出不等式组,即可求出定义域.

例 4(填空题) 设函数

$$f(x) = \begin{cases} -4x^2, & -3 \leq x < 0 \\ x, & 0 < x \leq 4 \\ \frac{x^2}{4}, & x > 4 \end{cases}$$

则函数 $y = f^{-1}(x)$ 的定义域为_____.

解 函数 $y = f^{-1}(x)$ 的定义域就是函数 $y = f(x)$ 的值域,故只需求 $f(x)$ 的值域.

对于 $y = f(x)$,

当 $-3 \leq x < 0$ 时,有 $-36 \leq f(x) < 0$;

当 $0 < x \leq 4$ 时,有 $0 < f(x) \leq 4$;

当 $x > 4$ 时, 有 $f(x) > 4$.

由此得 $f(x)$ 的值域为 $[-36, 0) \cup (0, +\infty)$, 即 $f^{-1}(x)$ 的定义域为 $[-36, 0) \cup (0, +\infty)$

小结 求函数的定义域的方法:

(1) 根据基本初等函数的定义域, 列出不等式组, 求出其解集, 一般, 用区间表示. 如例 1.

(2) 对于分段函数, 其定义域是各段定义域的并集, 如例 4.

(3) 对于复合函数 $f(g(x))$ 的定义域, 应先求出 $f(x)$ 的定义域, 再列出关于 $g(x)$ 的不等式, 此不等式的解集就是 $f(g(x))$ 的定义域, 如例 2.

题型 2: 求反函数

求函数 $y = f(x)$ 的反函数, 只需解出 $x = f^{-1}(y)$. 习惯上, 需将 x 换为 y , y 换成 x , 即得反函数 $y = f^{-1}(x)$.

例 5(填空题) 函数 $y = \frac{e^x}{e^x + 1}$ 的反函数为_____.

解 由已知函数, 得

$$e^x y + y = e^x$$

$$e^x = \frac{y}{1-y}$$

$$\text{即, } x = \ln \frac{y}{1-y}$$

所以 $f(x)$ 的反函数 $y = \ln \frac{x}{1-x}$.

例 6 求函数

$$y = \begin{cases} x - 2, & x \leq 0 \\ -\sqrt{4 - x^2}, & 0 < x < 2 \\ \ln x - \ln 2, & x \geq 2 \end{cases}$$

的反函数.

解 由 $x \leq 0$, $y = x - 2$, 得

$$x = y + 2, y \leq -2$$

由 $0 < x < 2$ 和 $y = -\sqrt{4 - x^2}$, 得

$$x = \sqrt{4 - y^2}, -2 < y < 0$$

由 $x \geq 2$ 和 $y = \ln x - \ln 2$, 得

$$x = 2e^y, y \geq 0$$

即

$$x = \begin{cases} y+2, & y \leq -2 \\ \sqrt{4-y^2}, & -2 < y < 0 \\ 2e^y, & y \geq 0 \end{cases}$$

故所求反函数

$$y = \begin{cases} x+2, & x \leq -2 \\ \sqrt{4-x^2}, & -2 < x < 0 \\ 2e^x, & x \geq 0 \end{cases}$$

注意 分段函数的反函数应分段求出,再合写在一起.

例 7 求函数 $y = \frac{10^x - 10^{-x}}{10^x + 10^{-x}}$ 的值域.

解 函数的值域为其反函数的定义域,由已知函数,有

$$y = \frac{10^{2x} - 1}{10^{2x} + 1}$$

可得其反函数为

$$y = \frac{1}{2} \lg \frac{1+x}{1-x}$$

解不等式 $\frac{1+x}{1-x} > 0$, 得 $-1 < x < 1$. 即函数 $y = \frac{10^x - 10^{-x}}{10^x + 10^{-x}}$ 的值域为 $-1 < y <$

1.

题型 3: 求复合函数的表达式

若已知 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的解析表达式, 求 $f(g(x))$ 的表达式, 只需用 $g(x)$ 代入 $f(x)$ 中的 x .

若已知 $f(g(x))$ 的解析表达式, 求 $f(x)$ 的表达式, 可令 $t = g(x)$, 并将 $f(g(x))$ 化为 t 的一个式子.

例 8(填空题) 已知 $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$, 则 $f'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 要求 $f'(x)$, 需由已知条件先求出 $f(x)$,

令 $t = x + \frac{1}{x}$, 则 $t^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$. 即

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$$

所以

$$f(t) = t^2 - 2$$

即 $f(x) = x^2 - 2$. 由此易得

$$f'(x) = 2x$$

$$\text{例 9} \quad \text{已知 } f(x) = \begin{cases} x - 1, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

求 $f(x+1)$.

$$\text{解 } f(x+1) = \begin{cases} (x+1)-1, & x+1 < 0 \\ (x+1)^2, & x+1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{即 } f(x+1) = \begin{cases} x, & x < -1 \\ (x+1)^2, & x \geq -1 \end{cases}$$

例 10 设

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & |x| = 1 \\ -1, & |x| > 1, \end{cases} \quad g(x) = e^x$$

求 $f(g(x))$ 和 $g(f(x))$.

解 将 $f(x)$ 中的 x 代入 $g(x)$, 得

$$f(g(x)) = \begin{cases} 1, & |e^x| < 1 \\ 0, & |e^x| = 1 \\ -1, & |e^x| > 1 \end{cases}$$

即

$$f(g(x)) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x > 0 \end{cases}$$

类似可得

$$g(f(x)) = e^{f(x)} = \begin{cases} e, & |x| < 1 \\ 1, & |x| = 1 \\ e^{-1}, & |x| > 1 \end{cases}$$

例 11 设函数 $f(x)$ 满足 $2f(x) + x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{x+1}$, 则 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 $f(x)$ 与 $f\left(\frac{1}{x}\right)$ 变量之间互为倒数, 于是用 $\frac{1}{x}$ 代替 x , 有等式 $\frac{1}{x^2}f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1+x}$, 与原方程联立, 可解得 $f(x) = \frac{2x-x^2}{3(x+1)}$

题型 4: 判断函数的奇偶性、有界性和单调性

讨论函数 $y=f(x)$ 的奇偶性时, 必须注意函数定义域的对称性. 例如, 定义在 $[0, +\infty)$ 上的函数 $y=x^2$ 就不是偶函数.

判断函数 $y=f(x)$ 是否为奇函数或偶函数的基本方法是利用函数奇偶性的定义.

例 12 设 $F(x) = f(x)\left(\frac{1}{2^x+1} - \frac{1}{2}\right)$, $f(x)$ 为奇函数, 判断 $F(x)$ 的奇偶性.

解 设 $g(x) = \frac{1}{2^x+1} - \frac{1}{2}$. 于是

$$\begin{aligned} g(-x) &= \frac{1}{2^{-x}+1} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{2^x}{1+2^x} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{2^x+1-1}{2^x+1} - \frac{1}{2} \\ &= -g(x) \end{aligned}$$

即 $g(x)$ 为奇函数, 又 $f(x)$ 为奇函数, 故 $F(x)$ 为偶函数.

例 13(选择题) 函数 $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ 的反函数 $f^{-1}(x)$ 是 [].

- (A) 奇函数, 但非偶函数
(B) 偶函数, 但非奇函数
(C) 既是奇函数, 也是偶函数
(D) 非奇、非偶函数

解法 1 因为

$$f(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\frac{e^x - e^{-x}}{2} = -f(x)$$

故 $f(x)$ 为奇函数. 而 $f(x)$ 与 $f^{-1}(x)$ 的曲线关于 $y=x$ 成轴对称, 因此 $f^{-1}(x)$ 必为奇函数. 本题应选(A).

解法 2 由 $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ 可得

$$e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$$

$$\text{所以 } e^x = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 - 4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$$

由于 $e^x > 0$, 由上式舍去负号项, 有

$$e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$$

$$\text{所以 } x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$$

$$\text{反函数 } f^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$\text{由于 } f^{-1}(-x) = \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$= \ln \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = -\ln(\sqrt{x^2 + 1} + x)$$



$$= -\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \\ = -f^{-1}(x)$$

所以 $f^{-1}(x)$ 为奇函数.

故本题应选(A).

例 14(选择题) 设 $f(x) = e^{\cos x}$, $g(x) = e^{-\sin x}$, 则在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内 [].

- (A) $f(x)$ 是单调增函数, $g(x)$ 是单调减函数
- (B) $f(x)$ 是单调减函数, $g(x)$ 是单调增函数
- (C) $f(x), g(x)$ 都是单调增函数
- (D) $f(x), g(x)$ 都是单调减函数

解 基本初等函数 $y = e^x$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内为单调增函数, 而 $y = \cos x, y = -\sin x$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内均为单调减函数, 所以 $f(x), g(x)$ 都是单调减函数.

故本题应选(D).

例 15(选择题) 设定义在 $(-\infty, +\infty)$ 的偶函数 $f(x)$ 存在导函数, 下列函数可能既非奇函数也非偶函数的是 [].

- (A) $f'(x)$
- (B) $\int_a^x f(t) dt$
- (C) $-f(2x)$
- (D) $f(x)x^3$

解 可以验证, $f'(x)$ 为奇函数, $f(x)x^3$ 也为奇函数, $-f(2x)$ 为偶函数, 仅(B)的奇偶性与 a 的取值有关, 即仅当 $a=0$ 时, 为偶函数. 故本题应选(B).

例 16 设 $F(x) = \int_0^x f(t^2) dt$, 其中 $f(x)$ 是连续函数, 判断 $F(x)$ 的奇偶性.

$$\text{解 } F(-x) = \int_0^{-x} f(t^2) dt,$$

令 $u = -t$, 则 $t=0$ 时, $u=0$; $t=-x$ 时, $u=x$. $dt = -du$. 于是

$$\begin{aligned} F(-x) &= \int_0^{-x} f(t^2) dt \\ &= - \int_0^x f(u^2) du \\ &= -F(x) \end{aligned}$$

所以 $F(x)$ 为奇函数.

小结 一些有关奇函数、偶函数的结论可作为定理使用, 应熟记. 其中较重要的:

- (1) 奇(偶)函数的代数和仍为奇(偶)函数.

- (2) 两个奇(偶)函数的积必为偶函数.
 (3) 可导奇(偶)函数的导数必为偶(奇)函数.
 (4) 若 $f(x)$ 为连续的奇(偶)函数, 则

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

为偶(奇)函数.

考点归纳

(一) 选择题

1. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ x^2 + x, & x > 0 \end{cases}$, 则 [].

(A) $f(-x) = \begin{cases} -x^2, & x \leq 0 \\ -(x^2 + x), & x > 0 \end{cases}$

(B) $f(-x) = \begin{cases} -(x^2 + x), & x \leq 0 \\ -x^2, & x > 0 \end{cases}$

(C) $f(-x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ x^2 - x, & x > 0 \end{cases}$

(D) $f(-x) = \begin{cases} x^2 - x, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$

2. 函数 $y = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ 的值域是().

(A) $-1 \leq y \leq 1$ (B) $-1 \leq y < 1$

(C) $-1 < y \leq 1$ (D) $0 \leq y \leq 1$

3. $f(x) = xe^{-|\sin x|}$, ($-\infty < x < +\infty$) 是().

(A) 有界函数 (B) 单调函数

(C) 周期函数 (D) 奇函数

4. 函数 $y = \sqrt{x^2 - x - 6} + \arcsin \frac{2x-1}{7}$ 的定义域为[].

(A) $[-3, -2] \cup [3, 4]$ (B) $(-3, -2) \cup (3, 4)$

(C) $(-3, 2] \cup [3, 4]$ (D) $[-3, 2] \cup (3, 4]$

5. 设 $x \in (-1, 1)$, 则函数 $f(x) = \lg \frac{1-x}{1+x}$ [].

(A) 既是奇函数, 又是单调减函数

(B) 既是奇函数, 又是单调增函数

- (C) 既是偶函数,又是单调减函数
(D) 既是偶函数,又是单调增函数

6. 下列函数中,非奇非偶的函数是[].

(A) $f(x) = 3^x - 3^{-x}$ (B) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

(C) $f(x) = x(1-x)$ (D) $f(x) = \ln \frac{x+1}{x-1}$

7. 已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调减, 则下列函数中单调增的是[].

(A) $f^2(x)$ (B) $\frac{1}{f(x)}$

(C) $f(-x)$ (D) $xf(x)$

8. $f(x) = \begin{cases} e^{x^2} - x, & -\pi < x < 0 \\ e^{x^2} + x, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$ 在其定义域内为[].

(A) 无界函数 (B) 周期函数

(C) 单调函数 (D) 偶函数

(二) 填空题

1. $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ 的定义域为_____.

反函数为_____.

值域为_____.

2. 如果 $f(x) = \frac{ax}{2x+3}$, 且 $f(f(x)) = x$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 设 $f(e^{2x}) = xe^{-2x}$. 则 $f'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

4. 设 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, 记 $f_n(x) = \underbrace{f(f(\cdots f(x)))}_{n \text{ 次}}$, 则 $f_n(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

5. 函数 $y = \frac{kx+7}{kx^2+4kx+3}$ 的定义域为全体实数, 则 k 的取值范围是_____.

6. 已知 $f(x) + f(y) = f(z)$. 如果 $f(x) = \frac{1}{x}$, 则 $z = \underline{\hspace{2cm}}$.

7. 设 $f(x) = ax^2 + bx + c$, 且 $f(x+1) - f(x) = 8x + 3$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}, b = \underline{\hspace{2cm}}$.

8. 设 $f\left(\sin \frac{\pi}{2}\right) = \cos x + 1$, 则 $f\left(\cos \frac{\pi}{2}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(三) 计算题

1. 判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$