义务教育课程标准

YI WU JIAO YU KE CHENG BIAO ZHUN

人教版

初中数学

教材全解

九年级

下

主编 吴郑珊 严文科

一书在手 别无他求

廣東省出版集團

新世纪出版社

义务教育课程标准

YI WU JIAO YU KE CHENG BIAO ZHUN

人教版

初中数学

教材全解

九年级

下

主编 吴郑珊 严文科

·广州·

广东省出版集团

新世纪出版社

出 版 人:陈锐军
责任编辑:高可时
责任技编:陈垂涛

图书在版编目(CIP)数据

教材全解:课标人教版. 初中数学. 九年级. 下册/吴郑珊,严文科主编.—广州:广东新世纪出版社,2007.12
ISBN 978-7-5405-3484-4

Ⅰ. 教… Ⅱ. ①吴… ②严… Ⅲ. 数学课—初中—教学参考资料 Ⅳ. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 164015 号

义务教育课程标准(人教版)
教 材 全 解
初中数学
九年级 下册
主编 吴郑珊 严文科
*
新世纪出版社出版发行
(地址:广州市大沙头四马路 10 号)
湛江南华印务公司印刷
(厂址:广东省湛江市霞山区绿塘路 61 号)
880 毫米×1230 毫米 32 开本 10.25 印张 402,500 字
2007 年 12 月第 1 版 2007 年 12 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-5405-3484-4
定价:13.30 元

初中课标教材全解编委会

丛书策划：戴　和　吴郑珊

丛书主编：吴郑珊　严文科

丛书编委(按姓氏笔划排序)：

丁保莉	丁　志	丁海英	于建华	于利国	马凤苓	马广标
马培衡	马爱华	马广玉	马学飞	马丰学	万晓燕	广晓莉
王　雷	王　梅	王广莲	王　琳	王桂英	王　芳	王　霞
王衍腾	王振书	王文飞	王新路	王志文	王　勇	王雪珍
王传霞	王　莹	王乔兵	王清晨	王冬青	王凤莲	王保华
王永生	王化莹	王建强	孔万东	孔凡盾	毛夫平	付新红
石泉新	仙艳梅	纪　律	白奉军	卢淑凤	冯志勇	冯福领
边玉华	田素雪	朱　璐	朱玉伟	朱瑞平	朱宁伟	朱　振
朱宁臣	刘继锋	刘国群	刘爱萍	刘　佳	刘艳辉	刘　雷
刘建辉	刘新成	刘　豫	刘　玉	刘增慧	刘仁芳	刘瑞启
刘连强	许世珍	闫宪富	孙良凤	孙太军	孙晓荣	孙志刚
孙迎秋	孙志远	孙金中	齐春芹	毕成均	牟　丰	任树民
庄　严	陈代玉	陈　鹏	陈先友	陈　东	陈灯平	陈　旭
陈友桥	陈锦波	陈　煜	张红梅	张秋华	张凤东	张淑苓
张　梅	张　瑜	张　粲	张文军	张雪梅	张　玉	张义福
张金玲	张国莲	张云志	张国富	张志刚	张天悦	张宜申
张　燕	张　力	张　潇	张宜森	张　文	张爱军	张　润
张关省	张学丽	张　颖	张晓丽	李俊广	李伟光	李凤銮
李怀顺	李　敏	李向阳	李德顺	李海霞	李　波	李继英
李长领	李　伟	李玉林	李建民	李中义	李振章	李大勇
李仰友	李世伟	严宏伟	严　雪	吴仕杰	吴金柱	吴验涛
吴昭玲	吴巧丽	吴秀敏	吴四化	宋玉珍	苏公辉	何友玲
何东恂	汤文亮	邵　杰	周广举	周长木	周广伟	周广锋
杨忠霞	杨胜文	杨慎荣	吕同芳	吕永新	乔太线	邹振伯
孟宪霞	柳　燕	苗艳丽	金春芳	范宝红	胡大庆	胡凤梅
胡荣娟	姚彦玉	赵春红	赵金云	赵显奇	赵　峰	赵海涛
赵兴国	赵　昕	赵赛男	赵士力	姜亭亭	贺广富	侯子安

项宏玲	秦绪莹	秦　琴	郜建国	徐何勇	徐　晶	钱光玉
唐明秀	唐雪梅	高　峰	梅长厚	盛玉金	郭　灏	郭宏图
郭　翠	郭丙锋	曹营山	曹爱红	曹卫强	程学明	阎　祯
黄冬立	戚焕芹	谢建林	谢随军	谢作栋	韩秋菊	韩广胜
嵇成红	董金顺	窦红平	鲍志民	鲍建中	颜世田	颜素芹
臧德清	薛卫东	薛　海	戴向和	魏齐福	魏长生	

本册主编:蒋　辉　周长木

副 主 编:刘连强　吴巧丽　边玉华

编 写 者:侯子安　李中义　马爱华　广晓丽　马广玉　周广伟
张宜森　李　伟　毕成均　于建华　朱宁臣　田素雪
赵士力　董金顺　吴秀敏　严　雪　刘瑞启　吕永新

编写说明

为了适应课程改革需要，配合初中课标实验教材的使用和推广，我们组织资深教材编写人员、造诣较高的教研员和教学经验丰富的教师，编写了《课标教材全解》系列丛书。

这套丛书初中部分有七至九年级，与人民教育出版社等出版的语文、数学、英语、物理、化学等科目的教材配套，每学科每年级的用书按学期分上、下册。

这套丛书的编写，以课程改革的“以学生发展为本”理念为指导，以服务为宗旨，服务于学生，服务于家长，服务于教师。通过这套丛书，引导学生把握学习要求，逐步学会学习方法，转变学习方式，实现自主学习、探究式学习，自觉地完成学习任务，切实提高学习成绩和素质；为那些有能力辅导孩子的家长排忧解难，帮助他们了解教材，掌握教材，并提供多方面的信息资源，更好地辅导孩子；为广大教师提供丰实的课程资源，当好参谋，有利于提高课堂教学效益。

丛书编写凸显如下特点：

一、新。丛书以课程改革的先进理念为指导，以最新版的课程标准为依据，紧扣各种版本的最新课标实验教材进行编写。遵循各学科教材的特点及其教学规律，遵循学生的年龄特点及其认知规律，来设置板块和栏目，编写体例推陈出新，新颖科学。编写的内容，既重视知识的掌握和能力的培养，又重视情感、态度、价值观的正确导向，正确处理基本素养与创新能力的关系，倡导自主、合作、探究式学习，倡导改革评价方式，体现课程改革的最新成果。语言表达通俗流畅，清新自然。

二、全。丛书根据各个学科的教学全过程，层层推进，步步深入，逐节、逐课、逐章、逐单元讲解和剖析教材的全部，而且撰写了相关知识链接，反映当代社会、科技发展的现状与特点，反映各学科的发展趋势，引导学生关注社会、经济、科技和生活中的现实问题。因此，丛书不但涵盖了

各学科教材的全部内容，而且为各学科教材内容作了适当的延伸，提供了丰实的课程资源。

三、实。丛书的编写既全面反映课标教材的教学要求、教学内容、教学模式和评价方式，又顾及当前中考的现实。因此，致力导学、讲解、剖析、练习、考查和评价融为一册，科学实用。导学精细、科学、全面、到位。对教材每个知识点、重点、难点、疑点、易错点，都进行精细透彻的讲解和剖析，并揭示方法和规律，从而结成知识网络，形成知识系统。围绕教材每个知识点、重点、难点、疑点、易错点和中考考点，都精编对应的典型题，题题揭示解答思路，题题点拨方法与规律，让学生理论联系实际，融会贯通。教材的每一节、每一课、每一章、每一个单元、每一册，都精心配编练习题或测试题，引导学生积极去“练”，认真去“测”，自觉去“评”，学而致用，举一反三，夯实基础，提升能力，提高学习成绩，促进学生健康发展。

由于编写时间仓促，加上水平有限，不妥之处在所难免，谨请批评赐教。

编写者

目 录

第二十六章　二次函数

本章学习提要

学习目标	1. 通过对实际问题的分析确定二次函数的表达式,体会二次函数的意义. 2. 会用描点法画出二次函数的图象,能从图象上认识二次函数的性质. 3. 利用图象或关系式判定抛物线开口方向、大小、对称轴、顶点坐标、最值以及与坐标轴的交点坐标. 4. 会根据已知条件求二次函数的关系式. 5. 掌握二次函数与一元二次方程之间的密切关系. 6. 能用二次函数的相关知识解决一些实际生活中的问题.
重点难点	重点: 1. 二次函数的图象、二次函数的性质. 2. 二次函数与一元二次方程的关系. 难点: 1. 从实际问题中列二次函数关系式及对二次函数概念的探索. 2. 理解二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 与 $y=ax^2$ 的图象关系,用图象探索其性质.
学法指导	1. 这一章有很多知识内容是在学过的一次函数、一元二次方程、平移、配方、等式等知识的基础上展开的,因此,需认真理解新旧知识之间的关系,紧密结合图形,运用数形结合的思想,不能死记硬背,应做到触类旁通、举一反三. 2. 建立数学模型. 在解决一些实际问题时,建立与之相关的数学模型. 例如,一些实际应用题是比较抽象、不易理解的,通过与二次函数相联系,画出图象,抽象的问题就变得形象而又具体了. 3. 待定系数法. 本章的一个重点内容是求二次函数的关系式,待定系数法是一种常见的、简便易行的方法. 这也是前面学过的解方程(组)内容的应用. 4. 图形位移法. 理解及运用二次函数的图象是本章的重点,也是难点,对于 $y=ax^2$ 的图象来说是比较简单,也是比较基础的. 在此基础上,用平移的方法得到 $y=ax^2+bx+c$ 的图象,使两个函数之间的联系变得清晰,也易于理解. 5. 方程法. 在求二次函数图象与坐标轴的交点坐标、顶点坐标及相关线段时,常用方程来解. 学习本章时注意方程的建立及应用.

26.1 二次函数

学习要点提示

学习目标	重点难点
1. 了解和掌握二次函数的的概念. 2. 体会二次函数的意义. 3. 结合实例，能用二次函数表示某些实际问题中的变量之间的关系. 4. 会用描点法画出 $y=ax^2(a\neq0)$ 的图象，能通过图象认识二次函数的性质，会确定二次函数 $y=ax^2(a\neq0)$ 的图象的顶点、开口方向和对称轴. 5. 会用配方法确定二次函数的图象的顶点、开口方向和对称轴. 6. 会由特殊二次函数分析和推导一般二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的图象的性质. 7. 会运用二次函数及性质解决简单的实际问题.	1. 重点：二次函数的定义以及二次函数 $y=ax^2(a\neq0)$ 的图象与性质. 2. 难点：函数 $y=ax^2+k$、$y=a(x-h)^2$ 与 $y=a(x-h)^2+k(a\neq0,h,k$ 为常数)的图象与性质.

导入新课

(一)已学知识与方法

我们学习了一元二次方程的一般形式 $ax^2+bx+c=0$ (a、b、c 是常数，$a\neq0$)，用描点法画函数图象的方法和轴对称图形，对称轴，对称的性质，图形的平移，配方法，一次函数与反比例函数的意义及自变量的取值范围.

(二)相关知识

和前面我们学过的正比例函数、一次函数和反比例函数一样，二次函数也是描述两个变量之间的相互关系，刻画现实世界的一个有效的模型. 我们将结合具体的实际问题，体会二次函数的意义，了解二次函数的有关概念，会用描点法画出二次函数的图象，进而通过图象认识二次函数的性质.

教材解读

知识点1 二次函数的定义

一般地,如果 $y=ax^2+bx+c$ (a,b,c 是常数,$a\neq0$),那么 y 叫做 x 的二次函数.其中 a,b,c 分别是函数表达式的二次项系数、一次项系数和常数项.如 $y=x^2-2x+3$,$y=2x^2+5x$,$y=-6x^2+8$ 等都是二次函数.

说明:(1) $y=ax^2+bx+c$ (a,b,c 是常数,$a\neq0$)叫二次函数的一般式,任何一个二次函数的解析式都可化成 $y=ax^2+bx+c$ (a、b、c 是常数,$a\neq0$)的形式.

(2)二次函数 $y=ax^2+bx+c$ ($a\neq0$)中,a 必须是不等于0的实数,b 和 c 可为任意实数.因为 $a=0$ 时,$y=ax^2+bx+c$ 就是 $y=bx+c$,若 $b\neq0$,则 $y=bx+c$ 是一次函数;若 $b=0$,则 $y=c$ 是一个常数函数.

(3)二次函数 $y=ax^2+bx+c$ ($a\neq0$)的结构特征是:等号右边是关于自变量 x 的二次多项式.

(4)二次函数 $y=ax^2+bx+c$ ($a\neq0$)与一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a\neq0$)有密切的联系,如果将变量 y 换成一个常数,那么这个二次函数就是一个一元二次方程.

例1 指出下列函数中,哪些是二次函数,哪些不是二次函数.

(1) $y=(x+2)^2-x^2$;(2) $y=\frac{1}{2}x(x-3)$;(3) $y=3x+5$;

(4) $y=-\frac{1}{3x^2}$;(5) $y=\sqrt{3x^2-2x+1}$;(6)(6) $y=2x-\frac{3}{4}x^2+7$.

分析:紧扣二次函数的定义去判断.(1)右边整理后为一次二项式;(2)右边整理后为二次二项式;(3)右边为一次二项式;(4) $-\frac{1}{3x^2}$ 是分式;(5) $y=\sqrt{3x^2-2x+1}$ 是无理式;(6)右边是二次三项式.

解:(2)(6)是二次函数;(1)(3)(4)(5)不是二次函数.

小结:掌握二次函数的定义是解决本题的关键,判断一个函数是否二次函数,首先看这个函数是否符合二次函数的形式特征,即函数表达式能否转化成 $y=ax^2+bx+c$,且 a、b、c 是常数,$a\neq0$.

知识点2 二次函数 $y=ax^2$ ($a\neq0$)的图象与性质

(1)二次函数 $y=ax^2$ ($a\neq0$)的图象是一条抛物线,一般地,二次函数的图象叫抛物线,$y=ax^2$,其对称轴是 y 轴,顶点在原点处,开口方向由 a 的符号决定.当 $a>0$ 时,开口向上,抛物线在 x 轴上方,并向上无限延伸,顶点是抛物线的最低点;当 $a<0$ 时,开口向下,抛物线在 x 轴的下方,并向下无限延伸,顶点是抛物线的最高点.

(2)a 决定抛物线 $y=ax^2(a\neq0)$ 的形状. 当 $|a|$ 相等时，则形状一样，例如 $y=\frac{1}{2}x^2$ 与 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的形状一样，开口方向相反. 即：将抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 沿 x 轴翻折或绕其顶点(0,0)旋转180°，得到抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2$. $|a|$ 决定抛物线开口大小，$|a|$ 越大，抛物线开口越小；$|a|$ 越小，抛物线的开口越大.

(3)二次函数图象的画法.

①列表：先取原点(0,0)，然后在原点两侧对称地各取两个点，由于关于 y 轴对称的两个点的横坐标互为相反数，纵坐标相等，所以先计算出 y 轴右侧两点的纵坐标，左侧对应写出即可.

②描点：先将 y 轴右侧的两个点描出来，然后按对称关系找到 y 轴左侧的两个对应点.

③连线：按从左到右或从右到左的顺序将这5个点(两对关于 y 轴对称的点和原点)用平滑的曲线连接起来.

(4)性质：关于二次函数 $y=ax^2(a\neq0)$ 的性质，主要从抛物线的开口方向、顶点、对称轴、函数值的增减性，以及函数的最值几个方面来研究.

例2 在同一直角坐标系中，画出函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 和 $y=-2x^2$ 的图象，并根据图象回答下列问题.

(1)说出这两个函数的图象的开口方向、对称轴和顶点坐标.

(2)抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$，当 x ______ 时，抛物线上的点都在 x 轴的上方；当 $x>0$ 时，抛物线自左向右逐渐______；它的顶点是图象的最______点.

(3)函数 $y=-2x^2$，对于一切 x 的值，总有函数 y ______ 0；当 $x<0$ 时，y 随着 x 的增大而______；当 x ______ 时，y 有最______值，是______.

分析：画函数的图象，用描点法取五点，因为抛物线是对称图形，以点 O 为中心，向两边对称取点，描出点后用平滑的曲线连结起来，注意曲线要出头，再对照着函数的图象，就能轻松解决上面的问题.

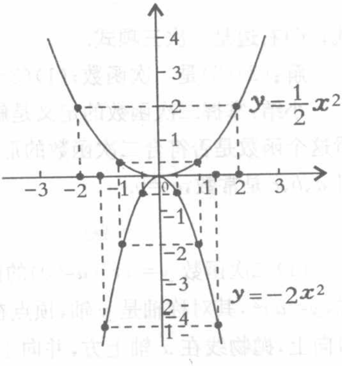

图 26-1-1

解：函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 和 $y=-2x^2$ 的图象如图

26-1-1 所示.

(1)抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的开口方向向上,对称轴是 y 轴,顶点坐标是(0,0);

抛物线 $y=-2x^2$ 的开口方向向下,对称轴是 y 轴,顶点坐标是(0,0).

(2)抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$,当 $x\neq 0$ 时,抛物线上的点都在 x 轴上方;当 $x>0$ 时,曲线自左向右逐渐上升;它的顶点是图象的最低点.

(3)函数 $y=-2x^2$,对于一切 x 的值,总有函数值 $y\leqslant 0$;当 $x<0$ 时,随 x 的增大而增大;当 $x=0$ 时,y 有最大值,是 0.

小结:画函数图象选点时,应以计算简单、描点方便为原则,$y=ax^2(a\neq 0)$中 a 的符号决定抛物线的开口方向:$a>0$ 时抛物线的开口方向向上,反之也成立;$a<0$ 时,抛物线的开口方向向下,反之也成立. 其中$|a|$越大,抛物线的开口越小;$|a|$越小,抛物线的开口越大.

知识点 3　二次函数 $y=ax^2+k$(a,k 是常数,$a\neq 0$)的图象与性质

二次函数 $y=ax^2+k(a\neq 0)$的图象是一条抛物线,它的对称轴是 y 轴,顶点坐标是$(0,k)$,是由抛物线 $y=ax^2$ 向上平移 k 个单位长度得到的.

当 $a>0$ 时,抛物线 $y=ax^2+k$ 的开口向上,在对称轴的左边,即 $x<0$ 时,曲线自左向右下降,函数 y 随 x 的增大而减小;在对称轴的右边,即 $x>0$ 时,曲线自左向右上升,函数 y 随 x 的增大而增大. 简记为“抛物线口向上,函数左减右增”. 顶点是抛物线的最低点,此时,函数 y 取得最小值,即当 $x=0$ 时,$y_{\min}=k$.

例 3　将抛物线 $y=3x^2$ 向下平移 1 个单位所得抛物线的解析式是(　　).

A. $y=3x^2+1$　　B. $y=3x^2-1$

C. $y=-3x^2-1$　　D. $y=-3x^2+1$

分析:将抛物线 $y=3x^2$ 向下平移后,开口的大小和方向都没有发生变化,只是顶点已从(0,0)的位置移动到(0,−1)的位置,其解析式为 $y=3x^2-1$.

解答:选 B.

小结:抛物线平移前后开口的大小和方向不变,即 a 值仍与原抛物线相同,上下平移后,顶点的横坐标不变,纵坐标改变. 向上移 t 个单位,则“加上 t”;向下平移 t 个单位,则“减去 t”,即“上加下减”.

例 4　在同一直角坐标系中,画出函数 $y=-x^2$ 和 $y=-x^2+1$ 的图象,并根据图象回答下列问题.

(1)抛物线 $y=-x^2+1$ 经过怎样的平移才能得到抛物线 $y=-x^2$?

(2)函数 $y=-x^2+1$,当 x ________时,y 随 x 的增大而减小;当 x________时,函数 y 有最大值,最大值 y 是________;其函数图象与 y 轴的的交点坐标是________,

与 x 轴的交点坐标是________.

(3) 试说出抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2-3$ 的开口方向、对称轴和顶点坐标.

分析:在同一坐标系内画出两条抛物线,可以形象说明两抛物线之间的关系.利用图象回答问题,从而总结形如 $y=ax^2+k(a\neq0)$ 的图象与性质.

解:函数 $y=-x^2$ 和 $y=-x^2+1$ 的图象如图 26-1-2 所示.

(1) 抛物线 $y=-x^2+1$ 向下平移 1 个单位长度就能得到抛物线 $y=-x^2$.

(2) 函数 $y=-x^2+1$,当 $x>0$ 时,y 随 x 的增大而减小;当 $x=0$ 时,函数 y 有最大值,最大值 y 是 1;其图象与 y 轴的交点坐标是(0,1),与 x 轴的交点坐标是(−1,0)、(1,0).

(3) 抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2-3$ 的开口向上,对称轴是 y 轴,顶点坐标是(0,−3).

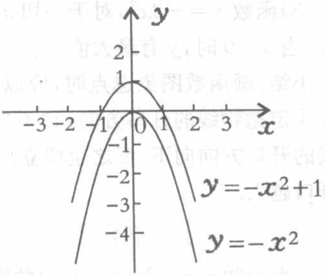

图 26-1-2

小结:本例题把函数 $y=-x^2+1$ 与函数 $y=-x^2$ 的图象放在同一直角坐标系中进行对比,易得出二次函数 $y=ax^2+k$ 与 $y=ax^2$ 的图象形状相同,只是位置上下平移的结论.

知识点 4 二次函数 $y=a(x-h)^2$(a,h 是常数,$a\neq0$)的图象与性质

二次函数 $y=a(x-h)^2(a\neq0)$ 的图象是一条抛物线,它的对称轴是平行于 y 轴或与 y 轴重合的直线 $x=h$,顶点坐标是 $(h,0)$,是由抛物线 $y=ax^2$ 向右平移 h 个单位长度得到的.

当 $a>0$ 时,抛物线 $y=a(x-h)^2$ 的开口向上,在对称轴的左边,即 $x<h$ 时,曲线自左向右下降,函数 y 随 x 的增大而减小;在对称轴的右边,即 $x>h$ 时,曲线自左向右上升,函数 y 随 x 的增大而增大.简记为"抛物线口向上,函数左减右增".顶点是抛物线的最低点,此时,函数 y 取得最小值,即当 $x=h$ 时,$y_{min}=0$.

当 $a<0$ 时,抛物线 $y=a(x-h)^2$ 的开口向下,在对称轴的左边,即 $x<h$ 时,曲线自左向右上升,函数 y 随 x 的增大而增大;在对称轴的右边,即 $x>h$ 时,曲线自左向右下降,函数 y 随 x 的增大而减小,简记为"抛物线口向下,函数左增右减".顶点是抛物线的最高点,此时,函数取得最大值,即当 $x=h$ 时,$y_{max}=0$.

例 5 抛物线 $y=ax^2$ 向右平移 3 个单位后经过点(−1,4),求 a 的值和平移后的抛物线的解析式.

分析:$y=ax^2$ 向右平移 3 个单位后的解析式可表示为 $y=a(x-3)^2$,把点(−1,4)

的坐标代入即可求得 a 的值.

解：设将抛物线 $y=ax^2$ 向右平移 3 个单位后的解析式为 $y=a(x-3)^2$，把 $x=-1,y=4$ 代入，得 $4=a(-1-3)^2$，$a=\frac{1}{4}$.

∴平移后抛物线的解析式为 $y=\frac{1}{4}(x-3)^2$.

小结：根据抛物线平移的规律，向右平移 3 个单位后，a 不变，括号内应"减去 3"；若向左平移 3 个单位，括号内应"加上 3"，即"左加右减".

知识点 5　二次函数 $y=a(x-h)^2+k$（a,h,k 是常数，$a\neq0$）的图象与性质

二次函数 $y=a(x-h)^2+k(a\neq0)$ 的图象是一条抛物线，它的对称轴是直线 $x=h$，顶点坐标为 (h,k)，是由抛物线 $y=ax^2(a\neq0)$ 向右平移 h 个单位长度，再向上平移 k 个单位长度得到的.

当 $a>0$ 时，抛物线 $y=a(x-h)^2+k$ 的开口向上；在对称轴的左边，即 $x<h$ 时，曲线自左向右下降，函数 y 随 x 的增大而减小；在对称轴的右边，即 $x>h$ 时，曲线自左向右上升，函数 y 随 x 的增大而增大. 简记为"抛物线口向上，函数左减右增". 顶点是抛物线的最低点，此时，函数 y 取得最小值，即当 $x=h$ 时，$y_{\min}=k$.

当 $a<0$ 时，抛物线 $y=a(x-h)^2+k$ 的开口向下；在对称轴的左边，即 $x<h$ 时，曲线自左向右上升，函数 y 随 x 的增大而增大；在对称轴的右边，即 $x>h$ 时，曲线自左向右下降，函数 y 随 x 的增大而减小. 简记为"抛物线口向下，函数左增右减". 顶点是抛物线的最高点，此时，函数 y 取得最大值，即当 $x=h$ 时，$y_{\max}=k$.

例 6　已知 $y=a(x-h)^2+k$ 是由抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 向上平移 2 个单位长度，再向右平移 1 个单位长度得到的抛物线.

(1) 求出 a、h、k 的值.

(2) 在同一直角坐标系中，画出 $y=a(x-h)^2+k$ 与 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的图象.

(3) 观察 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象：当 x ________时，y 随 x 的增大而增大；当 x ________时，函数 y 有最________值，最________值是 y ________.

(4) 观察 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象，你能说出对于一切 x 的值，函数 y 的取值范围吗？

分析：先画出函数图象，再求 a、h、k，求出函数表达式后根据性质就可完成上面的题目.

解：(1) ∵抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 向上平移 2 个单位长度，再向右平移 1 个单位长度得

到的抛物线是 $y=-\frac{1}{2}(x-1)^2+2$,

$\therefore a=-\frac{1}{2}, h=1, k=2$.

(2)函数 $y=-\frac{1}{2}(x-1)^2+2$ 与 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的图象如图 26-1-3 所示.

(3)观察 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象当 $x<1$ 时,y 随 x 的增大而增大;当 $x=1$ 时,函数 y 有最大值,最大值是 $y=2$.

(4)由图象知,对于一切 x 的值,总有函数值 $y\leqslant 2$.

小结:通过本题不难发现抛物线 $y=a(x-h)^2+k(a\neq 0)$ 与 $y=ax^2(a\neq 0)$ 形状相同,只是位置不同,即一条抛物线可通过另一条抛物线平移得到.

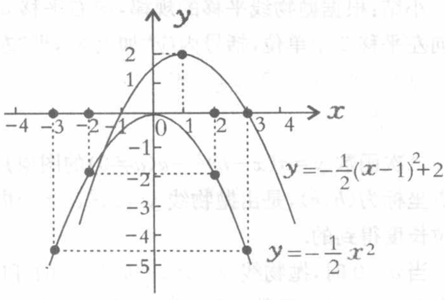

图 26-1-3

知识点 6 二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的图象与性质

二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 通过配方可以化成 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式,从而可知它的图象与抛物线 $y=ax^2$ 形状相同,可由 $y=ax^2$ 平移得到.

将一般形式 $y=ax^2+bx+c$ 化成顶点式 $y=a(x-h)^2+k$ 的方法:

$$y=ax^2+bx+c$$

$$=a(x^2+\frac{b}{a}x)+c=a[x^2+\frac{b}{a}x+(\frac{b}{2a})^2-(\frac{b}{2a})^2]+c$$

$$=a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$$

对照 $y=a(x-h)^2+k$,所以 $y=ax^2+bx+c$ 的图象是一条抛物线,它的对称轴是直线 $x=-\frac{b}{2a}$,顶点坐标为 $(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$.(对称轴和顶点坐标公式要牢记,可以直接运用)

当 $a>0$ 时,抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的开口向上;在对称轴的左边,即 $x<-\frac{b}{2a}$ 时,曲线自左向右下降,函数 y 随 x 的增大而减小;在对称轴的右边,即 $x>-\frac{b}{2a}$ 时,曲线自左向右上升,函数 y 随 x 的增大而增大. 简记为"抛物线口向上,函数左减右增". 顶

点是抛物线的最低点，此时，函数 y 取得最小值，即当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，$y_{\min}=\frac{4ac-b^2}{4a}$.

当 $a<0$ 时，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的开口方向向下；在对称轴的左边，即 $x<-\frac{b}{2a}$ 时，曲线自左向右上升，函数 y 随 x 的增大而增大；在对称轴的右边，即 $x>-\frac{b}{2a}$ 时，曲线自左向右下降，函数 y 随 x 的增大而减小. 简记为"抛物线口向下，函数左增右减". 顶点是抛物线的最高点，此时，函数 y 取得最大值，即当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，$y_{\max}=\frac{4ac-b^2}{4a}$.

例 7　画出函数 $y=\frac{1}{2}x^2-6x+21$ 的图象，并说明这个函数有哪些性质，它是由抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 怎样平移得到的？

分析：利用配方法或公式法求出抛物线的顶点坐标为(6,3)，对称轴为 $x=6$，然后在直线 $x=6$ 两侧对称取点，用描点法画出图象.

解：$\because y=\frac{1}{2}x^2-6x+21=\frac{1}{2}(x^2-12x)+21$

$=\frac{1}{2}(x^2-2\times 6x+6^2-6^2)+21=\frac{1}{2}(x-6)^2-18+21=\frac{1}{2}(x-6)^2+3$,

$\therefore$ 这个函数图象的开口向上，对称轴是直线 $x=6$，顶点坐标是(6,3).

根据图象的这些特点，利用函数的对称性列表如下：

x	4	5	6	7	8
y	5	3.5	3	3.5	5

描点、连线，画出图象如图 26-1-4 所示.

由图象可得这个函数的性质如下：

当 $x<6$ 时，函数 y 随 x 的增大而减小；当 $x>6$ 时，函数 y 随 x 的增大而增大；当 $x=6$ 时，函数 y 取得最小值，最小值 $y=3$.

抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2-6x+21$ 是抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 先向右平移 6 个单位长度，再向上平移 3 个单位长度（或先向上平移 3 个单位长度，再向右平移 6 个单位长度）得到的.

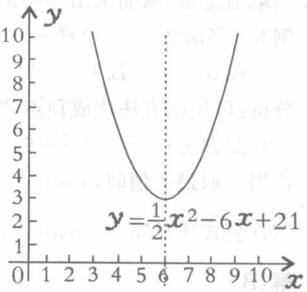

图 26-1-4

小结：本题给出了二次函数 $y=ax^2+bx+c$