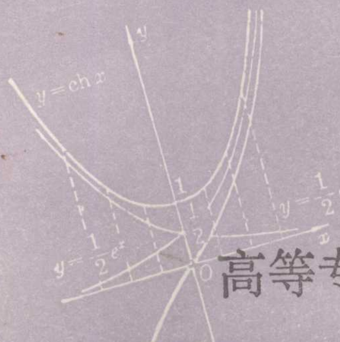


高等专科学校学习指导丛书

高 等 数 学

（上 册）

上海市高等专科学校《高等数学》编写组

上海科学技术出版社

高等专科学校学习指导丛书

高 等 数 学

（上 册）

上海市高等专科学校
《高等数学》编写组

上海科学技术出版社

高等专科学校学习指导丛书
高 等 数 学
（上 册）
上海市高等专科学校
《高等数学》编写组
上海科学技术出版社出版、发行
（上海瑞金二路 450 号）
新华书店上海发行所经销 商务印书馆上海印刷厂印刷
开本 787×1092 1/32 印张 11 字数 240,000
1994 年 6 月第1版 1994 年 6 月第 1 次印刷
印数 1—10,000
ISBN 7-5323-3529-1/O·178
定价：5.10 元

（沪）新登字 108 号

前 言

本书是与上海高等专科学校试用教材《高等数学》(上海科学技术出版社1992年第二版)配套的学习指导书.

高等数学是高等工程专科学校的一门主要课程. 初学者往往对这门课程中的基本概念和重要理论的理解不透彻或产生错误,对掌握解题的方法和技巧感到困难,由于教材本身受篇幅的限制,不能针对学生在学习中可能遇到的诸多问题一一详述. 因此,我们编写了这套与教材配套的学习指导书,希望能有助于初学者正确理解有关的概念和理论,更好地掌握解决问题的方法和技巧.

本书是按照原教材的体例逐节进行编写的,分上、中、下三册(原教材中册第八章数值计算初步及下册第二十一章线性代数与数理统计的计算机解法初步未编写学习指导书). 每节均包含下列五个部分:

一、基本内容　扼要地提出该节的基本内容,有的还指出重点、难点及其在本章和本书中的地位和作用.

二、学习要求　根据本课程的教学基本要求和该节内容,从理论、计算、方法、能力等方面提出具体的学习要求.

三、答疑辅导　根据我们的教学经验,收集了不少有关概念实质、定理意义、重要反例、分析方法等很多方面的问题,采取生问师答的方式编写. 为了将问题阐述清楚,少数内容上有些补充与提高、每节问题的数量不等.

四、补充例题　在教材已有例题的基础上补充了一些典型例题．在解题过程中尽量指出解题技巧，分析常见的错误，希望能做到举一反三的作用，部分例题还给出多种解法，以开拓学生思路．

五、练习题选解　选择该节习题中较典型的题及较难的题给出解答，但希望读者一定要尽可能独立完成各节的练习题，只有经过反复思考，实在无法解决时，才参看解答．

每章后均有一份“自我检测题”供读者自我检查学习成绩．每册书后附有“自我检测题解答”，供读者答完题后参照评定．

本书除主要供高等工程专科学校的学生使用外，也可供成人高校和其他高等院校的师生参考．

本书由黄淑芳、张起云任主编．上册由钱翼文、张起云编写．中册由侯长林、孙承德编写，下册由钱翼文、翁耀明编写．

曹助我同志为组织编写本书做了不少工作，对本书的内容提出许多宝贵的意见，我们表示衷心的感谢．

限于编者水平，书中不妥或错误之处在所难免，恳请读者批评指正．

编　者

1993年12月

目　　录

第一章　函数、极限与连续

第二章　导数与微分

第三章　中值定理与导数应用

第四章　不定积分

第五章　定积分

第六章　定积分的应用

第七章　常微分方程

第一章　函数、极限与连续

第一节　函　数

一、基 本 内 容

1．从三个实例抽象出函数的定义．函数概念是本节的重点，也是高等数学中最重要的基本概念之一．

2．介绍函数的三种常用表示法．并通过实例介绍分段函数．

3．函数的几种特性的定义及它们在图象上的特征．

4．列出中学数学里已详细研究过的六种基本初等函数．引入复合函数的概念．给出初等函数的定义．初等函数是高等数学的主要研究对象．

5．介绍工程技术中经常遇到的双曲函数．

6．通过例子说明如何建立简单问题中的函数关系．

二、学 习 要 求

1．深刻理解函数的概念，了解分段函数．

2．了解复合函数的概念，会分析复合函数的复合过程．

3．了解函数的几种特性并掌握它们在图形上的特征．

4．熟悉基本初等函数及其图形．

5．能熟练地列出简单问题中的函数关系．

三、答 疑 辅 导

1．确定一个函数须要哪几个要素?

答：一是自变量x的取值范围，另一是因变量y按怎样的对应规则f与x对应．当这两点确定后，函数也就确定了．因此我们称定义域和对应规则是函数定义的两个要素．

2．函数的表示法通常有哪几种?各有什么优缺点?

答：函数的表示法通常有：解析法(也称公式法)、图象法、列表法．它们的优缺点分别叙述如下：

(1) 解析法是把自变量与因变量之间的对应关系用数学式子表示出来．这个数学式子可以是一个式子，也可以在自变量不同的取值范围内有不同的式子(分段函数即是)．它的优点是：便于用分析的方法研究函数的性质；缺点是不直观，求与自变量对应的函数值有时要作复杂的计算．

(2) 图象法就是在平面直角坐标系中，用点(x, y)(其中$y=f(x)$, $x\in D$)的全体在该平面上构成的轨迹来表示自变量x与因变量y的对应关系．它的优点是直观；缺点是不能对它进行数学运算，一般不能利用它得到函数的准确值．

(3) 列表法就是把自变量与因变量的对应关系用表格的形式表示出来．它的优点是不需计算就能知道与自变量对应的函数值；缺点是对应关系一般无法在表格中完全表示出来，也不便于用分析法研究函数的性质．因此在今后的研究中较少采用列表法．比较多的是采用解析法，并结合图象法补它的不足．

3．求函数定义域要注意哪几点．

求函数定义域最基本的指导思想是使函数有意义(即使函数解析式本身有意义及函数具有实际意义的自变量的允许

值范围)，因此需要准确地判断使函数有意义的限制条件．具体注意以下8点.

答：(1) 有理分式函数其分母不能是零；

(2) 偶次根式的函数，根号下的值非负；

(3) 对数函数的真数值必须大于零；

(4) 反函数的定义域是原来函数的值域.

(5) 两个函数和、差、积的定义域是它们各自定义域的交，商的定义域还须除去使分母为零的点.

(6) 复合函数 $f[\varphi(x)]$ 的定义域是使 $\varphi(x)$ 的值域落在 $f(u)$ 定义域的所有 x 构成的集合.

(7) 分段函数的定义域是各个分段式子给出的 x 的变化范围的并集.

(8) 具有实际意义的函数的定义域由实际问题决定.

4．何谓初等函数？分段函数一定不是初等函数吗？

答：由基本初等函数经过有限次四则运算及有限次复合步骤所构成、并能用一个解析式表示的函数，称为初等函数．例如幂指函数 $y=x^x(x>0)$，它可以恒等变形为

$$y=x^x=e^{x\ln x}$$

它是由基本初等函数 $y=x$、$y=\ln x$ 经一次乘法运算及一次复合．即由 $y=e^u$, $u=x\ln x$ 复合而成，并且能用一个解析式表示，所以是初等函数.

分段函数并非都不是初等函数．例如，

$$y=|x|=\begin{cases}-x, & x<0;\\ x, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

形式上它是分成了两段，由两个解析式来表达．但实际上它也可用一个解析式表示，即

$$y=|x|=\sqrt{x^2}$$

就是由 $y=u^{\frac{1}{2}}$, $u=x^2$ 复合而成的函数，所以是初等函数。

四、补 充 例 题

例 1　已知 $f(x-2)=x^3+2x+3$，求 $f(x)$。

解 1　$f(x-2)=[(x-2)+2]^3+2[(x-2)+2]+3$

$$=(x-2)^3+6(x-2)^2+14(x-2)+15,$$

$$\therefore\quad f(x)=x^3+6x^2+14x+15.$$

解 2　令 $x-2=u$，即 $x=u+2$，

$f(u)=(u+2)^3+2(u+2)+3=u^3+6u^2+14u+15$,

$$\therefore\quad f(x)=x^3+6x^2+14x+15.$$

例 2　求函数 $y=\ln\left[\sqrt{x^2-1}+\arcsin\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]$的定义域。

解　$\because$　$y=\ln u$ 的定义域为 $u>0$。

$y_1=\sqrt{x^2-1}$ 的定义域为 $x\geqslant 1$ 或 $x\leqslant -1$,

$y_2=\arcsin\left(x-\frac{1}{2}\right)$的定义域为 $-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}$.

$\therefore$　$y_1+y_2=\sqrt{x^2-1}+\arcsin\left(x-\frac{1}{2}\right)$的定义域为　$1\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}$.

且$y_1+y_2>0$，所以函数$y=\ln\left[\sqrt{x^2-1}+\arcsin\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]$的定义域为　$1\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}$.

例 3　若 $f(x)=x^2$, $\varphi(x)=2^x$，求 $f[f(x)]$, $\varphi[\varphi(x)]$, $f[\varphi(x)]$, $\varphi[f(x)]$。

解　$f[f(x)]$是由 $y=f(u)$, $u=f(x)$复合而成。

$\because$ $u=f(x)=x^2$, $f(u)=u^2$,　$\therefore$ $f[f(x)]=(x^2)^2=x^4$.

同理，得 $\varphi[\varphi(x)]=2^{\varphi(x)}=2^{2^x}$；

$$f[\varphi(x)]=[\varphi(x)]^2=(2^x)^2=2^{2x}=4^x;$$

$$\varphi[f(x)]=2^{f(x)}=2^{x^2}.$$

例 4 若 $y=f(x)$ 的图象在 $[a, b]$ 上是凹的（图 1.1）．x_1、x_2 是 $[a, b]$ 上的任何两点，试从图象上比较 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$ 与 $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ 的大小．

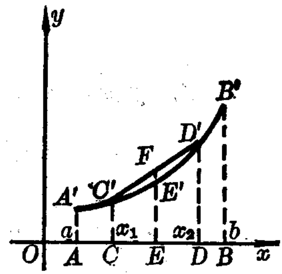


图 1.1

解 因为 $\frac{x_1+x_2}{2}$ 是点 x_1、x_2 的连线的中点，所以 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$ 即是图 1.1 中线段 EE' 的长度，而 $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ 即是梯形 $CDD'C'$ 的中线 EF 的长度．由图 1.1 可知 $EF>EE'$，

$$\therefore \quad \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$

例 5 已知函数 $y=f(x)$ 是用下述方法确定的：在 $0\leqslant x<1$ 范围内 $y=f(x)$ 的图象是半径为1，圆心为点 $(0, 1)$ 且过原点的一段圆弧；在 $x\geqslant 1$ 的范围内是过点 $(1, 1)$ 且与 x 轴倾角为 $\frac{\pi}{3}$ 的一条直线．又知 $y=f(x)$ 的图象对称于坐标原点，试列出 $f(x)$ 的解析式．

解 $\because$ $y=f(x)$ 的图象在 $[0, 1)$ 范围内是圆 $x^2+(y-1)^2=1$ 上一段圆弧，即 $y=f(x)=1-\sqrt{1-x^2}$；而在 $[1, +\infty)$ 内是过点 $(1, 1)$，斜率为 $k=\text{tg}\,\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$ 的一条直线，即 $y=f(x)=1+\sqrt{3}(x-1)$；又 $y=f(x)$ 为奇函数，所以当 $-1<x<0$ 时，$f(x)=-f(-x)=-[1-\sqrt{1-(-x)^2}]=\sqrt{1-x^2}$

-1; 当 $-\infty<x\leqslant-1$ 时,

$$f(x)=-f(-x)=-[1+\sqrt{3}(-x-1)]$$
$$=\sqrt{3}x+\sqrt{3}-1.$$

$$\therefore\quad f(x)=\begin{cases}\sqrt{3}x+\sqrt{3}-1, & -\infty<x\leqslant-1;\\ \sqrt{1-x^2}-1, & -1<x<0;\\ 1-\sqrt{1-x^2}, & 0\leqslant x<1;\\ \sqrt{3}x-\sqrt{3}+1, & 1\leqslant x<+\infty.\end{cases}$$

五、习题 1-1 选解

6. 下列各题所给的两个函数是否相同?为什么?

(2) $f(x)=x,\ g(x)=\sqrt{x^2}$.

解 不相同. 因为对应规律不同($g(x)=|x|$).

(6) $f(x)=|x-1|,\ g(x)=\begin{cases}x-1, & x>1;\\ 0, & x=1;\\ 1-x, & x<1.\end{cases}$

解 相同. 因为定义域与对应规律都相同.

7. 判断下列函数的奇偶性:

(2) $y=\dfrac{a^x+1}{a^x-1}\quad(a>0)$.

解 函数在点 $x=0$ 无定义, 但对 $x\neq0$ 仍有

$$y(-x)=\frac{a^{-x}+1}{a^{-x}-1}=\frac{1+a^x}{1-a^x}=-y(x),$$

所以函数 $y=\dfrac{a^x+1}{a^x-1}\ (a>0)$ 是奇函数.

(4) $y=\begin{cases}-x, & x<-1;\\ 1, & |x|\leqslant1;\\ x, & x>1.\end{cases}$

解 $\because\quad y(-x)=\begin{cases}-(-x), & -x<-1,\\ 1, & |-x|\leqslant 1;\\ (-x), & (-x)>1.\end{cases}$

即 $$y(-x)=\begin{cases}x, & x>1;\\ 1, & |x|\leqslant 1;\\ -x, & x<-1.\end{cases}$$

$$\therefore\quad y(-x)=y(x).$$

所以 $y=\begin{cases}-x, & x<-1;\\ 1, & |x|\leqslant 1;\\ x, & x>1.\end{cases}$ 是偶函数。

8. 判断下列函数的单调性.

(4) $y=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<\dfrac{\pi}{2};\\ 2-|x|, & |x|>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$

解 $y=\begin{cases}-\sin x, & -\dfrac{\pi}{2}<x<0;\\ \sin x, & 0\leqslant x<\dfrac{\pi}{2},\\ 2+x, & x<-\dfrac{\pi}{2};\\ 2-x, & x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$

所以 $y(x)$ 在 $\left(-\infty,-\dfrac{\pi}{2}\right)$ 为单调增加, $\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$ 单调减少, $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 单调增加, $\left(\dfrac{\pi}{2},+\infty\right)$ 单调减少.

9. 下列函数中哪些是周期函数? 如果是周期函数, 指出其周期.

(2) $y=\sin x^2$.

解 不是周期函数. 因为方程

$$\sin(x+T)^2-\sin x^2$$
$$=2\cos\frac{(x+T)^2+x^2}{2}\sin\frac{2xT+T^2}{2}=0$$

中, T 的解除 0 外, 其它都与 x 有关, 所以它不是周期函数.

13. 下列各函数可以看作是由哪些简单函数复合而成的?

(3) $y=\sin^2(1+2x)$.

解 它可看作由 $y=u^2$, $u=\sin v$, $v=1+2x$ 复合而成.

14. 分别就 $a=2$, $a=\frac{1}{2}$, $a=-2$ 讨论 $y=\lg(a-\sin x)$ 是不是由 $y=\lg u$, $u=a-\sin x$ 构成的复合函数? 如果是, 求其定义域.

解 当 $a=2$ 时, $y=\lg(2-\sin x)$, $\because 2-\sin x>0$. 对一切 $x\in(-\infty, +\infty)$ 均成立, 所以 $y=\lg(2-\sin x)$ 是由 $y=\lg u$, $u=2-\sin x$ 构成的复合函数, 定义域为 $(-\infty, +\infty)$;

当 $a=\frac{1}{2}$ 时, $y=\lg\left(\frac{1}{2}-\sin x\right)$. 此时 $\frac{1}{2}-\sin x>0$, 也即 $\sin x<\frac{1}{2}$, 故需 $2k\pi-\frac{7\pi}{6}<x<2k\pi+\frac{\pi}{6}$. 所以 $y=\lg\left(\frac{1}{2}-\sin x\right)$ 是由 $y=\lg u$, $u=\frac{1}{2}-\sin x$ 构成的复合函数, 定义域为 $\left(2k\pi-\frac{7}{6}\pi,\ 2k\pi+\frac{\pi}{6}\right)$($k$ 取一切整数);

当 $a=-2$ 时, $y=\lg(-2-\sin x)$ 对任何 x 都没有意义. 故不是复合函数.

15. 设 $f(x)=\begin{cases}x, & x<0;\\ x+1, & x\geqslant 0.\end{cases}$ 求 $f(x+1)$, $f(x-1)$.

解 $y=f(x+1)$ 即是由 $y=f(u)$, $u=x+1$ 构成的复合

函数。

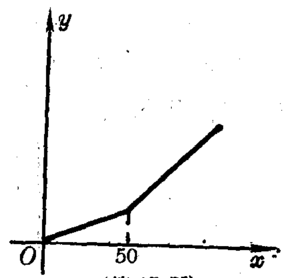
$$\because\quad f(u)=\begin{cases} u, & u<0; \\ u+1, & u\geqslant 0. \end{cases}$$

$$\therefore\quad f(x+1)=\begin{cases} x+1, & x+1<0; \\ (x+1)+1, & x+1\geqslant 0. \end{cases}$$

即 $$f(x+1)=\begin{cases} x+1, & x<-1; \\ x+2, & x\geqslant -1. \end{cases}$$

同理，得 $$f(x-1)=\begin{cases} x-1, & x<1 \\ x, & x\geqslant 1. \end{cases}$$

17. 火车站收取行李费的规定如下：当行李不超过 50 千克时，按基本运费计算，如从上海到某地每千克收 0.30 元，当超过 50 千克时，超重部分按每千克 0.45 元收费．试求上海到该地的行李费 y（元）与重量 x（千克）之间的函数关系式，并画出这函数的图形．



（第 17 题）

解 $$y=\begin{cases} 0.3x, & x\leqslant 50; \\ 0.45(x-50)+0.3\times 50, & x>50. \end{cases}$$

即 $$y=\begin{cases} 0.3x, & x\leqslant 50; \\ 0.45x-7.5, & x>50. \end{cases}$$

20. 某人从美国到加拿大去度假．他把美元兑换成加拿大元时，币面数值增加 12%，回美国后发现把加拿大元兑换成美元时，币面数值减少 12%，试把这两个函数表示出来，并说明这两个函数不互为反函数，即经过这样一来一回的兑换后，他亏损了一些钱．

解 设美元数为 x，加拿大元数为 y，则