有限群表示论

朱平天　张永康　著

南京大学出版社

有限群表示论

朱平天　张永康　著

~~南京大学出版社~~
1996·南京

(苏)新登字 011 号

内容简介

本书较全面地介绍了有限群表示论的原理和方法，并例举大量例题帮助读者更深入地掌握有关内容。

本书对象是大学代数研究生，物理、化学研究生以及从事群论及其应用的教学、科研人员。

有限群表示论
朱平天　张永康　著
*
南京大学出版社出版
（南京大学校内　邮政编码：210093）
江苏省新华书店发行
南京新九州印刷厂印刷　朝月楼特种印刷厂装订
*
开本：850×1168　1/32　　印张：8.875 字数：221 千
1996 年 10 月第 1 版　　1996 年 10 月第 1 次印刷
印数 1—500
ISBN　7-305-02798—7/O・200
定价：12.00 元

前　　言

有限群表示论是在 19 世纪末期由 G. Frobenius 创立的，W. Burnside、I. Schur 、E. oether 、R. Brauer 等著名数学家的工作对有限群表示论的发展作出了巨大的贡献。有限群表示论，特别是特征标理论是一个很重要的工具，对有限群的研究起着特殊的作用。著名的 Burnside 定理是表示论对有限群构造应用的典范。

有限群表示论也是处理具有一定对称性的物理、化学体系的一个有力工具，在量子力学、晶体结构等领域有许多实际应用，不仅能简化复杂的计算，对许多性质作出定性分析，还能预测物理、化学过程的发展趋势。

本书是为群论研究生学习表示论的需要而写的，希望能起一个承上启下的作用。通过学习，能掌握到有限群表示论和特征标理论最重要的技巧和方法，体会到表示论对有限群构造的应用，具备进一步学习模表示论与开展专题研究的能力，同时为物理、化学研究生提供一个数学手段。

本书是在作者为研究生讲授该课程的基础上修订而成的，但由于我们才疏学浅，错误之处敬请同行专家赐正。

作　　者

1995 年于南京

目　录

第一章　有限群构造基本原理

本章汇集了有限群构造初等理论中最主要的概念与性质，许多定理可以直接验证，有些定理的证明需要较多的知识与技巧，它们可以在任何一本群论专著中找到。

§1　子群·共轭类

1.1　**定义**　设 G 是一个非空集合，如果满足：

(i) G 内有一个二元运算(称为乘法)，即 $\forall\ a,b\in G$，确定唯一的 $c\in G$，记作 $c=ab$；

(ii) 结合律成立，即 $\forall\ a,b,c\in G$，有

$$a(bc)=(ab)c$$

(iii) 存在 $1_{左}\in G$，使 $\forall\ a\in G$，有 $1_{左}a=a$；

(iv) $\forall\ a\in G$，存在 $a_{左}^{-1}\in G$，使 $a_{左}^{-1}a=1_{左}$。

则称 G 是一个群。

与条件 (iii)、(iv) 相对应的，有

(iii)′ 存在 $1_{右}\in G$，使 $\forall\ a\in G$，有 $a\cdot 1_{右}=a$；

(iv)′ $\forall\ a\in G$，存在 $a_{右}^{-1}\in G$，使 $a\cdot a_{右}^{-1}=1_{右}$。

条件 (i)、(ii)、(iii)、(iv) 与 (i)、(ii)、(iii)′、(iv)′是等价的，可以用 (iii)′、(iv)′代替 (iii)、(iv) 定义一个群。而且 $1_{右}=1_{左}$，称为 G 的单位元，记作 1。$a_{右}^{-1}=a_{左}^{-1}$，称为 a 的逆元，记作 a^{-1}。

条件 (iii)、(iv) 还可以用下列一个条件代替：

(v) $\forall\ a,b\in G$，方程 $ax=b$ 与 $ya=b$ 在 G 内有解。

这就是说，满足 (i)、(ii)、(v) 的非空集合 G 是一个群。

在群 G 中还有：

(vi) 消去律成立，即 $\forall\ a,b,c \in G$，

$$ac = bc \quad \Rightarrow \quad a = b$$

$$ca = cb \quad \Rightarrow \quad a = b$$

当 G 是一个有限集合时，如果条件 (i)、(ii)、(vi) 满足，则 G 是一个群。

只含有限个元素的群 G 称为有限群，所含元素个数称为 G 的阶，记作 $|G|$。

如果群 G 的运算满足交换律，即 $\forall\ a,b \in G$，有

$$ab = ba$$

则称 G 是交换群或 Abel 群。

例 1 设 V 是域 F 上 n 维向量空间，$GL(V)$ 是 V 上全体可逆线性变换组成的集合，对 $GL(V)$ 中任意两个线性变换 σ,τ，规定乘法：

$$(\sigma\tau)(v) = \sigma(\tau(v)), \quad \forall\ \ v \in V$$

则 $GL(V)$ 作成一个群，称为域 F 上的一般线性群。

例 2 设 $GL(n,F)$ 是域 F 上全体 n 级可逆矩阵所组成的集合，则 $GL(n,F)$ 关于矩阵乘法作成一个群，称为域 F 上的 n 级可逆矩阵群。

1.2 **定义** 设 G 是群，$a \in G$，使

$$a^m = 1$$

成立的最小正整数 m 称为 a 的阶或 a 的周期，记作 $|a|$。如果这样的 m 不存在，则称 m 是无限阶的。

元素的阶具有下列性质：

(i) $|bab^{-1}| = |a|$；

(ii) $|ab| = |ba|$；

(iii) 如果 $|a| = m$，则 $a^n = 1 \quad \Leftrightarrow \quad m|n$；

(iv) 如果 $|a| = m, |b| = n, (m,n) = 1$，而且 $ab = ba$，则 $|ab| = mn$。

有限群 G 的每一个元的阶都是有限的。G 中所有元的阶的最小公倍数称为 G 的次数，记作 $\exp(G)$。

1.3 **定理** 设 H 是群 G 的一个非空子集，则下列各项等价：

(i) H 关于 G 的运算作成一个群；

(ii) $x, y \in H \quad \Rightarrow \quad xy \in H, x^{-1} \in H$；

(iii) $x, y \in H \quad \Rightarrow \quad xy^{-1} \in H$。

满足 (1.3) 中条件的子集 H 称为 G 的子群，记作 $H \leqslant G$。

任何一个群 G 至少有两个子群：单位元子群 $1 = \{1\}$ 与 G 自身，称为 G 的平凡子群。不等于 G 的子群 H 称为 G 的真子群，记作 $H < G$。

G 的两个子群的交是 G 的子群，但两个子群的并未必是 G 的子群。

设 S 是群 G 的一个非空子集，H 包含所有 S 中元的乘积以及它们的逆，则 H 是 G 的一个子群，称为由 S 生成的子群，记作 $H = \langle S \rangle$。若 S 是单元集 $\{a\}$，把 $\langle S \rangle$ 简记作 $\langle a \rangle$，称为由 a 生成的 G 的循环子群，$\langle a \rangle$ 中每个元都是 a 的幂。

设 $H < G$，而且由 $H \leqslant K \leqslant G$ 可推出 $K = H$ 或 $K = G$，则称 H 是 G 的极大子群。G 的所有极大子群的交称为 G 的 Frattini 子群，记作 $\Phi(G)$。

设 M、N 是群 G 的两个子集，规定 M 与 N 的乘积：

$$MN = \{ mn : m \in M, n \in N \}$$

若 M 是单元集 $\{m\}$，把 MN 简记作 mN。 规定 M 的逆：

$$M^{-1} = \{ m^{-1} : m \in M \}$$

1.4 **定理** 设 H、K 是群 G 的两个有限子群，则 HK 所含元数：

$$|HK| = \frac{|H|\,|K|}{|H \cap K|}$$

1.5 **定理** (Dedekind 模律) 设 $H \leqslant G$，M，N 是 G 的两个

子集，

(i) 如果 $M\subseteq H$，则 $(MN)\cap H=M(N\cap H)$；

(ii) 如果 $N\subseteq H$，则 $(MN)\cap H=(M\cap H)N$。

设 G 是群，X 是 G 的子集，$g\in G$，规定 g 对 X 的共轭作用：

$$X^g=gXg^{-1}=\{gxg^{-1}: x\in X\}$$

1.6 **定理** 设 G 是群，X,Y 是 G 的子集，$g,h\in G$. 则

(i) $(X\cap Y)^g=X^g\cap Y^g$；

(ii) $(X\cup Y)^g=X^g\cup Y^g$；

(iii) $(XY)^g=X^gY^g$；

(iv) $(X^{-1})^g=(X^g)^{-1}$；

(v) $(X^g)^h=(X)^{hg}$；

(vi) $X\subseteq Y\Rightarrow X^g\subseteq Y^g$；

(vii) $\langle X\rangle^g=\langle X^g\rangle$。

1.7 **定理** 设 $H\leqslant G$，$g\in G$，则 $H^g\leqslant G$。

H^g 称为 H 的共轭子群。

1.8 **定理** 设 $N\leqslant G$，则下列各项等价：

(i) $\forall\ g\in G, n\in N, n^g\in N$；

(ii) $\forall\ g\in G, N^g\subseteq N$；

(iii) $\forall\ g\in G, N^g=N$；

(iv) $\forall\ g\in G, gN=Ng$；

(V) $\forall\ x,y\in G, xy\in N\Rightarrow yx\in N$。

满足 (1.8) 中条件的 N 称为 G 的正规子群或不变子群、自共轭子群，记作 $N\lhd G$。

任何一个群 G 至少有两个正规子群：1 与 G，称为 G 的平凡正规子群。不等于 G 的正规子群 N 称为 G 的真正规子群。

只有平凡正规子群的群称为单群。例如，素数阶的循环群是单群。有限单群的分类问题已于 1981 年获得解决，有限单群共有 18 个

无限族与26个零散单群，有关情况读者可以参看〔69〕。

例 3　设G是群，令

$$Z(G)=\{g\in G: xg=gx, \forall\ x\in G\}$$

则$Z(G)$是G的正规子群，称为G的中心。

如果$Z(G)=1$，则称G是无中心群。

G是交换群$\Leftrightarrow Z(G)=G$。

1.9　**定义**　设G是群，X是G的非空子集，令

$$C_G(X)=\{g\in G: xg=gx, \forall\ x\in X\}$$

$$N_G(X)=\{g\in G: X^g=X\}$$

$C_G(X)$称为X在G内的中心化子，$N_G(X)$称为X在G内的正规化子。

如果X是单元集$\{x\}$，则$C_G(X)$与$N_G(X)$分别记作$C_G(x)$与$N_G(x)$。显然$C_G(x)=N_G(x)$，而且$C_G(G)=Z(G)$。

1.10　**定理**　设G是有限群，X是G的非空子集，则

(i) $C_G(X)\lhd N_G(X)\leqslant G$;

(ii) G内与X共轭的子集个数是$\dfrac{|G|}{|N_G(X)|}$。

共轭是一个等价关系，G的所有元素可以根据共轭关系分类，这种类称为共轭类。G的全体不相同的共轭类组成的集合记作$\mathrm{cl}(G)$，如果$\mathrm{cl}(G)=\{C_1,\cdots,C_r\}$，则

$$|C_1|+\cdots+|C_r|=|G| \tag{1.11}$$

这个等式称为G的类方程。

含有元素g的共轭类记作$\mathrm{cl}(g)$，由(1.10)，

$$|G|=|\mathrm{cl}(g)||C_G(g)| \tag{1.12}$$

1.13　**定理**　设$N\leqslant G$，则$N\lhd G \ \Leftrightarrow\ \forall\ n\in N, \mathrm{cl}(n)\subseteq N$。

由此可见，一个正规子群包含若干个共轭类。

§2 陪集·商群

设 $H \leqslant G, a \in G$，称 $aH(Ha)$ 是 H 的一个左(右)陪集。

2.1 **定理** 设 $H \leqslant G, a、b \in G$，则

(i) $aH = bH \Leftrightarrow a^{-1}b \in H$，

$Ha = Hb \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$；

(ii) $|aH| = |bH|$；

(iii) $aH \cap bH \neq \varnothing \Rightarrow aH = bH$。

G 可以表为 H 的互不相交的左陪集之并：

$$G = r_1H \cup r_2H \cup \cdots \cup r_mH$$

$\{r_1, r_2, \cdots, r_m\}$ 称为 H 在 G 内左陪集代表系，m 称为 H 在 G 内的指标，记作 $m = |G:H|$。

G 同样可以表为 H 的互不相交的右陪集之并，而且不同右陪集的个数也为 $|G:H|$。

2.2 **定理** (Lagrange) 设 G 是有限群，$H \leqslant G$，则

$$|G| = |H||G:H|$$

2.3 **定理** 设 $N \lhd G$，令

$$G/N = \{aN : a \in G\}$$

规定

$$aN \cdot bN = (ab)N$$

则 G/N 作成一个群。

G/N 称为 G 对 N 的商群，单位元是 N。

设 G 是群，$x, y \in G$，称

$$[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$$

是 x, y 的换位元。由 G 的全体换位元生成的群：

$$G' = [G, G] = \langle [x, y] : x, y \in G \rangle$$

称为 G 的换位子群或导出群。

2.4 **定理** 设 G 是群，则

(i) $G' \lhd G$，而且 G/G' 是交换群；

(ii) G/N 是交换群 $\Leftrightarrow$ $G' \leqslant N \lhd G$。

设 H 与 K 都是 G 的子群，$a \in G$，称 HaK 是 G 关于 H 与 K 的一个双陪集。

HaK 可以表为 K 的互不相交的左陪集之并，其个数记作 $|HaK : K|_L$； HaK 也可以表为 H 的互不相交的右陪集之并，其个数记作 $|HaK : H|_R$。

2.5 **定理** 设 H 与 K 都是 G 的子群，则

(i) $HaK \cap HbK \neq \Phi \Rightarrow HaK = HbK$；

(ii) $G = Ha_1K \cup Ha_2K \cup \cdots \cup Ha_tK$；

(iii) $|HaK : K|_L = |H : H \cap K^a|$，

$|HaK : H|_R = |K^a : H \cap K^a|$。

$\{a_1, a_2, \cdots, a_t\}$ 称为 G 关于 H 与 K 的双陪集代表系。

2.6 **定义** 设 G_1、G_2 是两个群，单位元分别是 1 与 $1'$，φ 是 G_1 到 G_2 的映射，如果 $\forall\, a, b \in G_1$，有

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$$

则称 φ 是 G_1 到 G_2 内的一个同态。称 G_1 的子集：

$$\mathrm{Ker}\varphi = \{a \in G_1 : \varphi(a) = 1'\}$$

是同态 φ 的核，称 G_2 的子集

$$\mathrm{Im}\varphi = \varphi(G_1) = \{\varphi(a) : a \in G_1\}$$

是同态 φ 的像。

设 φ 是群 G_1 到群 G_2 的同态，若 φ 是单射，即 $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{1\}$，则称 φ 是单同态；若 φ 是满射，即 $\mathrm{Im}\,\varphi = G_2$，则称 φ 是满同态，并称 G_1 与 G_2 同态，记作 $G_1 \sim G_2$；若 φ 是双射，则称 φ 是同构，并称 G_1 与 G_2 同构，记作 $G_1 \cong G_2$。

群 G 到 G 自身上的同构称为 G 的自同构。对于 $g \in G$，映射 σ_g：

$x \to gxg^{-1}$ 是 G 的自同构，称为由 g 诱导的内自同构。G 的非内自同构的自同构称为 G 的外自同构。

G 的全体自同构关于映射的合成：

$$(\sigma\tau)(x) = \sigma(\tau(x)), \ \forall\, x \in G$$

作成一个群，称为 G 的自同构群，记作 $\mathrm{Aut}(G)$。G 的全体内自同构关于映射的合成也作成一个群，称为 G 的内自同构群，记作 $\mathrm{Inn}(G)$。而且，$\mathrm{Inn}(G) \lhd \mathrm{Aut}(G)$。商群 $\mathrm{Aut}(G)/\mathrm{Inn}(G)$ 称为 G 的外自同构群 。

群 G 到它的子群 H 的同态称为 G 的一个自同态。如果 G 是加群，G 的全体自同态关于映射的加法：

$$(\sigma + \tau)(x) = \sigma(x) + \tau(x), \quad \forall\, x \in G$$

与映射的合成作成一个有单位元的环，称为 G 的自同态环，记作 $\mathrm{End}(G)$。

N 是 G 的正规子群，就是说 $\forall\, g \in G$ 有 $N^g \subseteq N$，即 N 对 G 的所有内自同构 σ_g 都不变($\sigma_g(N) \subseteq N$)。

如果子群 N 对 G 的所有自同构都不变，即 $\forall\, \sigma \in \mathrm{Aut}(G)$ 有 $\sigma(N) \subseteq N$，则称 N 是 G 的特征子群，记作 $N \lhd\lhd G$。例如，$Z(G) \lhd\lhd G$。

如果子群 N 对 G 的所有自同态 σ 都不变，即 $\sigma(N) \subseteq N$，则称 N 是 G 的全不变子群，记作 $N \lhd\lhd\lhd G$。例如，循环群 G 的每一个子群 H 都是全不变子群。

由定义显然得到：

2.7 **定理** $N \lhd\lhd\lhd G \Rightarrow N \lhd\lhd G \Rightarrow N \lhd G$。

这个定理表达了全不变子群，特征子群，正规子群三者之间的关系。但是逆命题都不成立。例如有理数域 $\mathbf{Q}$ 上的 2 级可逆矩阵群 $GL(2,\mathbf{Q})$ 的中心不是 $GL(2,\mathbf{Q})$ 的全不变子群。又如 Klein 四元群 $K_4 = \{1,(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$（见 §4）是交换群，它的每个子群都是正规子群，但是 $H_1 = \langle(12)(34)\rangle$，$H_2 = \langle(13)(24)\rangle$，$H_3 = \langle(14)(23)\rangle$ 都不是 K_4 的特征子群。

2.8 **定理**

(i) $H\lhd\lhd\lhd K, K\lhd\lhd\lhd G \quad\Rightarrow\quad H\lhd\lhd\lhd G$;

(ii) $H\lhd\lhd K, K\lhd\lhd G \quad\Rightarrow\quad H\lhd\lhd G$。

这个定理表明，全不变子群与特征子群满足传递律。但是正规子群却不满足传递律，即从 $H\lhd K, H\lhd G$，未必有 $H\lhd G$。例如二阶循环群$\langle(12)(34)\rangle$是Klein四元群 K_4 的正规子群，K_4 又是四次交代群 A_4（见 §4）的正规子群，但是$\langle(12)(34)\rangle$不是 A_4 的正规子群。

又如果 $H<K<G$，而且 $H\lhd\lhd G$，此时 H 未必是 K 的特征子群。例如

$$G=\langle a,b,c : a^3=b^3=c^3=1, ab=bac, ac=ca, bc=cb\rangle$$

是27阶非交换群，其中心 $Z(G)=\langle c\rangle$ 是 G 的特征子群，但不是 $K=\langle a,c\rangle$ 的特征子群。

群的同态、同构具有下列重要性质：

2.9 **定理** 设 G 是群，$N\lhd G$，则 G 到商群 G/N 上的映射 $\pi : x\rightarrow xN$ 是一个满同态。

π 称为自然同态。

2.10 **定理** 设 G_1 与 G_2 是两个群，φ 是 G_1 到 G_2 内的同态，则

(i) $\mathrm{Ker}\varphi\lhd G_1, \mathrm{Im}\varphi\leqslant G_2$;

(ii) $G/\mathrm{Ker}\varphi\cong\mathrm{Im}\varphi$。

2.11 **定理** 设 G_1 与 G_2 是两个群，φ 是 G_1 到 G_2 上的同态（$G_1\sim G_2$），$N_2\lhd G_2$，则

$$N_1=\{g_1\in G_1 : \varphi(g_1)\in N_2\}$$

是 G_1 的正规子群，而且

$$G_1/N_1\cong G_2/N_2$$

2.12 **定理** 设 G 是群，N 是 G 的正规子群，K 是 G 的子群，则 $K\cap N$ 是 K 的正规子群，而且

$$KN/N\cong K/K\cap N$$

2.13 **定理** 设 V 是域 F 上 n 维向量空间，则

$$GL(V) \cong GL(n,F)$$

证 取 V 的一个基 $\{e_1,\cdots,e_n\}$，设 $\sigma \in GL(V)$ 在这个基下的矩阵是 M_σ，则 $\varphi: \sigma \to M_\sigma$ 是 $GL(V)$ 到 $GL(n,F)$ 上的同构。

§3 直积·半直积

3.1 **定义** 设 H、K 是群 G 的两个子群，如果满足

(i) $H \lhd G, K \lhd G$;

(ii) $G = HK$;

(iii) $H \cap K = 1$。

则称 G 是 H 与 K 的内直积，记作 $G = H \times K$。

$|G| = |H||K|$。

内直积还有另一种定义方式。

3.2 **定义** 设 H、K 是群 G 的两个子群，如果满足

(iv) G 内每个元素 g 可以唯一地表为：

$$g = hk, \quad h \in H, k \in K$$

(v) H 内元与 K 内元可交换。

则称 G 是 H 与 K 的内直积。

这两个定义是等价的。首先假设 (i)、(ii)、(iii) 满足。由条件 (ii)，$\forall g \in G$ 可以表为

$$g = hk, \quad h \in H, \quad k \in K$$

若又有

$$g = h_1k_1, \quad h_1 \in H, \quad k_1 \in K$$

则 $h_1^{-1}h = k_1k^{-1} \in H \cap K = 1$，所以 $h_1 = h, k_1 = k$，从而 $g = hk$，$h \in H$、$k \in K$ 的表法唯一。

$\forall h \in H, k \in K, h^{-1}k^{-1}hk \in H \cap K = 1$，所以 $hk = kh$，(v) 成立。

反之，假设 (iv)、(v) 满足，由 (iv) 可知 (ii) 成立。又 $\forall g \in G$，

$x \in K, gxg^{-1} = h(kxk^{-1})h^{-1} = (kxk^{-1})hh^{-1} = kxk^{-1} \in K$，所以 $K \lhd G$。同理，$H \lhd G$。

再设 $y \in H \cap K$，则 $y = y \cdot 1 = 1 \cdot y$，由(iv)，$y = 1$，所以 $H \cap K = 1$。

如果 H、K 不是某一个群的子群，那么我们可以构作 H 与 K 的外直积。

3.3 **定理** 设 H、K 是两个群，令

$$H \times K = \{(h,k) : h \in H, k \in K\}$$

在 $H \times K$ 中规定乘法运算：

$$(h_1,k_1)(h_2,k_2) = (h_1h_2,k_1k_2), \quad h_1,h_2 \in H, k_1,k_2 \in K$$

则 $H \times K$ 作成一个群，称为 H 与 K 的外直积。

我们令

$$H_1 = \{(h,1) : h \in H\}, \quad K_1 = \{(1,k) : k \in K\}$$

则容易看到，$H \times K$ 是 H_1 与 K_1 的内直积，而且 $H_1 \cong H, K_1 \cong K$。于是 $H \times K$ 也可以看作是 H 与 K 的内直积。正因为内、外直积有此一致性，我们采用同一记号表示它们。

将直积的条件减弱得到半直积概念。

3.4 **定义** 设 N、H 是群 G 的两个子群，如果满足：

(i) $N \lhd G$；

(ii) $G = HN$；

(iii) $N \cap H = 1$。

则称 G 是 N 与 H 的内半直积，记作 $G = H \propto N$。

由条件 (ii) 与 (iii) 可知，G 内每个元素 g 可以唯一表为：

$$g = hn, \quad h \in H, n \in N$$

$\forall\, h \in H$，令 $\alpha(h)$ 是 N 到 N 的映射，使 $\forall\, n \in N$，

$$\alpha(h)(n) = n^h$$

则 $\alpha(h) \in \mathrm{Aut}(N)$，而且 α 是 H 到 $\mathrm{Aut}(N)$ 的同态，于是