



普通高等教育“十一五”国家级规划教材

大学数学教程/韩旭里 主编

概率论与数理统计

(第二版)

陈亚力 袁亚峥 刘诚 编



科学出版社

www.sciencep.com

普通高等教育“十一五”国家级规划教材
大学数学教程/韩旭里 主编

概率论与数理统计

(第二版)

陈亚力 裘亚峥 刘 诚 编

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材,是科学出版社 2004 版大学数学教程系列教材的第二版。

本书是大学数学教程系列教材的概率论与数理统计部分,内容包括随机事件及其概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征与极限定理、样本及其分布、参数估计、假设检验、回归分析与方差分析、正交试验设计、应用数学模型。本书体系新颖、结构严谨、内容翔实、叙述清晰、重点突出、难点分散、例题典型、习题丰富。重视对学生分析、推理、计算和应用数学能力的培养。

本书可作为高等学校理工科非数学类专业本科生的数学课教材或教学参考书,也可供科学研究与工程技术人员学习参考。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/陈亚力,裘亚峥,刘诚编.—2 版.—北京:科学出版社,2008

普通高等教育“十一五”国家级规划教材·大学数学教程/韩旭里主编
ISBN 978-7-03-021966-4

I. 概… II. ①陈…②裘…③刘… III. ①概率论-高等学校-教材
②数理统计-高等学校-教材 IV. O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 068689 号

责任编辑:李鹏奇 王 静 房 阳/责任校对:赵燕珍

责任印制:张克忠/封面设计:陈 敬

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

北京市文林印务有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2004 年 8 月第 一 版 开本: B5(720×1000)

2008 年 7 月第 二 版 印张: 18 1/4

2008 年 7 月第七次印刷 字数: 346 000

印数: 28 001—36 000

定价: 24.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈文林〉)

第二版前言

大学数学课程是大学高等教育中最基础和最重要的课程,各高等院校都十分重视大学数学基础课程的教学.为了适应科学技术进步的要求,培养高素质的人才,我们在各级教育主管部门的领导和支持下,进行了多年的大学数学教学改革实践.我们进行教学改革的重点工作之一是注重吸取国内外高等学校在基础数学教学改革方面的进展,不断总结教学实践的经验,努力编写一套高质量的数学基础课教材.本套教材是在对原大学数学教程系列教材使用多年的基础上,进一步修订,出版的第二版.

本系列教材,在数学观点和思想方法上,全书贯穿集合、向量及映射的概念,体现局部线性化、离散化、逼近、最优化等思想.在内容体系上,淡化单纯面向专业的观念,理顺课程内容之间的关系,加强对应该普遍具备的数学基础知识的阐述,注重学生对知识的理解与深化.在知识巩固和应用数学能力的培养上,除了精心选取例题和练习外,每册单独给出了与本册内容相关的应用数学模型一章,内容原则上只用到前面所学的知识,可以供在相关章节中选讲,以培养学生的应用意识和提高学习兴趣,提高学生融会贯通的分析问题和解决问题的能力.

第一版教材侧重于将微积分、线性代数、概率论与数理统计的数学基础课内容统一安排教学,侧重适合于统一开设为大学数学一门课程使用.这样,对大学数学的基本内容,便于学生学习、教师教学和教学管理上的统一安排,有利于使这些基本内容保持同等重要的地位.本次教材修订,在保持原有指导思想的前提下,力求做到既适合于统一开设一门课程使用,也适合于分别开设多门课程使用.因而,更好地实现了本系列教材的目标定位,即作为非数学类理工科大部分本科专业的数学基础课教材,内容经选择适用于对数学要求差别不是很大的其他各类有关专业数学课程的教学.此外,为了加强数学思维的训练,本次修订进一步精选了例题,补充了大量的习题.每本书修订的其他情况如下:

《微积分(上册)》是对原来的《一元函数微积分与无穷级数》的修改,增加了单变量函数的广义积分内容.作为大学数学教程的第一本,对内容力求简明直观地描述,着重训练、应用和运算.第1章至第4章由刘碧玉编写,第5章至第7章由李军英编写,第8章由韩旭里编写.

《微积分(下册)》是对原来的《多元函数微积分与常微分方程》的修改,去掉了单变量函数的广义积分内容,增加了空间解析几何内容,加强了曲线积分与曲面积分内容的介绍.增强了理性思维培养的要求.第1章、第4章和第5章由刘旺梅编

写,第2章和第3章由秦宣云编写,第6章由周英告编写,第7章由韩旭里编写。

《线性代数》是对原来的《线性代数与空间解析几何》的修订,将空间解析几何内容安排到了《微积分(下册)》,精心编写了行列式的线性映射定义以加强培养学生的抽象思维能力,通过分析线性方程组的结构,引进了 n 维向量,显得更为自然。第1章至第3章由刘伟俊编写,第4章至第6章由杨文胜编写,第7章由韩旭里编写。

《概率论与数理统计》的内容,对随机变量及其分布、参数估计与假设检验进行了较多的修正,增加了正交试验设计内容,适应了安排较多的课时进行教学。第1章至第3章由裘亚峥编写,第4章和第5章由刘诚编写,第6章至第9章由陈亚力编写,第10章由韩旭里编写。

这套教材既是一个统一的整体,可以统一开课使用,各部分之间又有相对独立性,可以独立讲授。讲完全部内容大约需要290学时。如果减少一些内容,安排240学时左右讲授是可以的。《微积分(上册)》可以考虑安排80~90学时,《微积分(下册)》可以考虑安排90~106学时,《线性代数》可以考虑安排32~40学时,《概率论与数理统计》可以考虑安排40~54学时,教师可以根据教学计划灵活安排。

课程教学体系和教学内容的改革不是一朝一夕就能完成的,需要不断完善、不断适应时代发展的需要。本套教材前后版本的使用、修订和出版,得到很多教师和教育主管部门领导的帮助和支持,得到科学出版社的热情支持,在此表示衷心感谢。同时,本教材编写中若有不妥之处,恳请专家、同行和读者不吝指正。

编 者

2008年5月

第一版前言

大学数学课程是高等教育中最基础和最重要的课程之一,各高等院校都十分重视大学数学基础课程的教学.为了适应科学技术进步的要求,培养高素质的人才,我们在各级教育主管部门的领导和支持下,进行了多年的大学数学教学改革实践.我们进行教学改革的特点是,根据大学数学基础课程的内在联系,突破原有课程的界限,将微积分、线性代数、空间解析几何、概率论、数理统计、应用数学模型的内容有机结合,加强相互渗透,加强数学思想方法的教学,加强应用数学能力的培养,统一开设大学数学课程.按照这种教学改革的思想,我们组织编写了一体化教学教材,并经过多年的教学实践,效果是令人满意的.现在,我们在原教材的基础上,广泛吸取国内外知名大学的教学经验,并进一步改进,出版了这套系列教材.

本系列教材的目标定位是作为非数学类理工科大部分本科专业的数学基础课的教材,内容经选择也适用于对数学要求较高的其他各类有关专业的数学课程的教学.本系列教材全部内容按大约 260 学时的教学计划编写.对于学时安排较少的专业,可根据要求选择使用.对全部教学内容,建议按三个学期整体安排.

本系列教材,在数学观点和思想方法上,全书贯穿集合、向量及映射的概念,体现局部线性化、离散化、逼近、最优化等思想.在内容体系上,进一步理顺了内容之间的关系,整体优化,强调分析、代数、几何的有机结合.对大学数学基础内容统一安排教学,既有利于学生对知识的理解与深化,又能使大学数学的基本内容在教学管理、教师选课和学生选课上,保持同等重要的地位.在知识巩固和应用数学能力的培养上,除了精心选取例题和练习外,每册单独给出了与本册内容相关的应用数学模型一章,内容原则上只用到前面所学的知识,可以供相关章节中选讲,以培养学生的应用意识和提高学习兴趣,提高学生分析问题和解决问题的能力.

本系列教材是“湖南省普通高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划”重点资助项目的研究成果的延续,得到了“湖南省高等教育 21 世纪课程教材”立项资助和“中南大学教育教改研究项目”的立项资助.在此,向对本系列教材的编写与出版给予帮助和支持的同志表示衷心感谢.

由于编者水平有限,若有不妥与错误之处,恳请专家、同行和读者不吝指正.

编 者

2004 年 3 月

目 录

第 1 章 随机事件及其概率	1
1.1 随机事件与样本空间	1
1.2 随机事件的概率	6
1.3 条件概率与乘法公式	14
1.4 全概率公式与贝叶斯公式	17
1.5 事件的独立性	21
习题 1	25
第 2 章 随机变量及其分布	29
2.1 随机变量	29
2.2 离散型随机变量的概率分布	30
2.3 随机变量的分布函数	34
2.4 连续型随机变量的概率密度	37
2.5 随机变量函数的分布	47
习题 2	52
第 3 章 多维随机变量及其分布	54
3.1 二维随机变量及其分布	54
3.2 边缘分布	59
3.3 条件分布	61
3.4 随机变量的独立性	65
3.5 两个随机变量函数的分布	68
习题 3	75
第 4 章 随机变量的数字特征与极限定理	78
4.1 数学期望	78
4.2 方差	86
4.3 几个重要随机变量的数学期望及方差	90
4.4 协方差与相关系数	93
4.5 矩、协方差矩阵	98
4.6 大数定理与中心极限定理	101
习题 4	106

第 5 章 样本及其分布	110
5.1 简单随机样本	110
5.2 抽样分布	113
习题 5	124
第 6 章 参数估计	126
6.1 参数的点估计	126
6.2 估计量的优良准则	134
6.3 参数的区间估计	139
6.4 0-1 分布参数的区间估计	145
6.5 单侧置信区间	147
习题 6	150
第 7 章 假设检验	154
7.1 假设检验的一般理论	154
7.2 正态总体均值与方差的假设检验	157
7.3 分布拟合检验	165
7.4 置信区间与假设检验之间的关系	168
习题 7	169
第 8 章 回归分析与方差分析	172
8.1 一元线性回归模型	172
8.2 多元线性回归模型	187
8.3 单因素方差分析	191
8.4 双因素方差分析	196
习题 8	202
第 9 章 正交试验设计	206
9.1 正交表	207
9.2 无交互作用的正交试验设计	208
9.3 有交互作用的正交试验设计	211
9.4 正交试验设计中一些特殊问题的处理	215
习题 9	220
第 10 章 应用数学模型	222
10.1 飞机进攻与导弹防护的最优策略	222
10.2 传染病的随机感染	224
10.3 飞机票的预订策略问题	226
10.4 报童的诀窍	228
10.5 随机储存策略	229

10.6 轧钢中的浪费.....	231
习题参考答案.....	235
附表 1 几种常用的概率分布	256
附表 2 泊松分布表	259
附表 3 标准正态分布表	261
附表 4 t 分布表	262
附表 5 χ^2 分布表.....	264
附表 6 F 分布表	267
附表 7 检验相关系数的临界值表	277
附表 8 常用的正交表	278

第1章 随机事件及其概率

在我们生活的宇宙空间里,存在着各种各样的现象,其中,有一类现象在一定条件下必然会出现.例如,向上抛一石子必然下落;在标准大气压下,100℃的纯水必然沸腾.这类现象称为必然现象.因为其结果是明确的,所以也称为**确定性现象**.还有一类现象在一定条件下可能出现,也可能不出现.例如,在相同条件下抛一枚均匀硬币,其结果可能是正面朝上,也可能是反面朝上,并且在每次抛掷之前无法肯定抛掷的结果是什么;用同一门大炮向同一目标射击,弹着点总是不尽相同.人们经过长期实践并深入研究后,发现这类现象在大量重复试验或观察下,其结果呈现出某种规律性.例如,均匀的硬币重复抛掷多次,正面朝上和反面朝上的次数大致相同.这种在个别试验中其结果具有不确定性,而在大量重复试验中其结果具有统计规律性的现象称为**随机现象**.概率论和数理统计就是研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科.

1.1 随机事件与样本空间

1.1.1 随机试验

对随机现象的研究是通过试验进行的.在这里,试验这个术语既可以是各种各样的科学实验,也可以是对某一事物的某个特征的观测.如果某一试验满足下列条件:

- (1) 在相同条件下,试验可以重复进行;
- (2) 试验可能的结果不止一个,但试验前可以明确知道所有可能的结果;
- (3) 每次试验的结果,事先不能准确预言;

则称这样的试验为随机试验,简称为试验,记作 E . 今后所涉及的试验均指随机试验.下面举几个随机试验的例子:

E_1 : 抛一枚硬币,观察正面 H 、反面 T 出现的情况;

E_2 : 抛两颗骰子,观察出现的点数之和;

E_3 : 记录某电话总机 5 分钟内接到的呼唤次数;

E_4 : 在一批灯泡中任意抽取一只,测试它的寿命.

上面几个随机试验的例子有共同的特点:试验结果虽然不能完全预言,但其全部可能结果是已知的.例如,抛一枚硬币只会有“正面出现”与“反面出现”这两种可能结果,电话总机 5 分钟内接到的呼唤次数必定是某个非负整数.

要注意的是:对每一随机试验,总是在一定的试验目的之下讨论试验结果的规律性.例如,从一批灯泡中任取一只进行通电试验,如果试验目的是检验产品是否合格,则试验结果为“合格品”或“不合格品”;如果试验目的是测定其寿命,则试验结果为非负实数.

1.1.2 样本空间、随机事件

随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的样本空间,记为 S . 样本空间的元素,即 E 的每个结果,称为样本点.

一般地,称试验 E 的样本空间 S 的子集,即样本点的集合为 E 的随机事件,简称事件,用字母 $A, B, C, \dots$ 表示. 在每次试验中,当且仅当这一子集中的一个样本点出现时,称这一事件发生. 由一个样本点组成的单点集称为基本事件.

在 E_1 中,可能的结果只有两个:“正面出现”和“反面出现”. 样本空间为 $S = \{H, T\}$. $\{H\}$ (表示“正面出现”)和 $\{T\}$ (表示“反面出现”)为 E_1 的随机事件,它们都为基本事件.

在 E_2 中,可能的结果有 11 个,分别为 $2, 3, \dots, 12$. 故 $S = \{2, 3, \dots, 12\}$, $A = \{5\}$ 和 $B = \{k | k \text{ 为正整数且 } k > 6\}$ 为 E_2 的随机事件, E_2 的基本事件为 $A_k = \{k\}$, $k = 2, 3, \dots, 12$.

在 E_3 中, $S = \{0, 1, 2, \dots\}$, $A = \{k | k \text{ 为正整数且 } 20 < k < 30\}$ 为随机事件.

在 E_4 中, $S = \{t | t \geq 0\}$, $A = \{t | 0 \leq t \leq 400\}$, $B = \{t | t > 1000\}$ 为随机事件.

在每次试验中,必然发生的事件称为必然事件. 显然,样本空间包含所有的样本点,它作为一个事件为必然事件,记作 S . 例如,“上抛一石子必然下落”就是必然事件. 空集 $\emptyset$ 不包含任何样本点,作为样本空间的子集,它在每次试验中必然不发生的,称为不可能事件. 显然必然事件与不可能事件都是确定性的现象,但为了研究的方便,规定它们为随机事件.

1.1.3 事件的关系与运算

每一随机试验都含有许多随机事件,由于它们共处于同一试验之中,因而是相互联系着的,有必要弄清它们之间的关系,并引进事件间的运算. 以便化复杂事件为简单事件,更好地解决相应的概率问题. 从前面可以看出事件是一个集合,因而事件间关系与事件的运算自然按集合论中集合之间的关系和集合运算来处理. 下面给出这些关系和运算在概率论中的提法,并根据“事件发生”的含义,给出它们在概率论中的定义.

设试验 E 的样本空间为 S , 而 $A, B, C, A_k, B_k (k = 1, 2, \dots)$ 是 S 的子集.

1. 事件的包含与相等

若 $A \subset B$, 则称事件 B 包含事件 A , 即事件 A 发生必导致事件 B 发生, 见图 1-1.

若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$, 即 $A=B$, 则称事件 A 与事件 B 相等.

2. 事件的和(或并)

“事件 A 与事件 B 至少有一个发生”这一事件称为事件 A 与事件 B 的和(或并), 记作 $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$. 显然, 当且仅当 A, B 中至少有一个发生时, 事件 $A \cup B$ 发生, 见图 1-2.

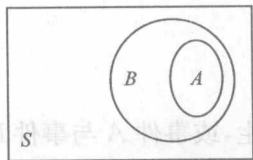


图 1-1

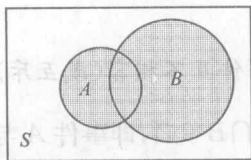


图 1-2

例如, 在 E_2 中, 若 A 表示“点数之和为奇数”, 则 $A = \{3, 5, 7, 9, 11\}$, B 表示“点数之和大于 8”, $B = \{9, 10, 11, 12\}$, 则 $A \cup B = \{3, 5, 7, 9, 10, 11, 12\}$.

类似地, 称 $\bigcup_{k=1}^n A_k$ 为 n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的和事件; 称 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \dots$ 的和事件.

3. 事件的积(或交)

“事件 A 与 B 同时发生”这一事件称为事件 A 与事件 B 的积(或交), 记作 $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$. 当且仅当 A, B 同时发生时, 事件 $A \cap B$ 发生. $A \cap B$ 也记作 AB , 见图 1-3, 即事件 AB 所包含的样本点为事件 A, B 所共有.

例如, 在 E_2 中, 若设 $A = \{3, 5, 7, 9\}$, $B = \{8, 9, 10\}$, 则 $AB = \{9\}$.

$\bigcap_{k=1}^n A_k$ 和 $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ 的情况由读者自己完成.

4. 事件的差

“事件 A 发生, 而事件 B 不发生”这一事件称为事件 A 与事件 B 的差, 记作 $A - B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$. 当且仅当 A 发生, B 不发生时, 事件 $A - B$ 发生, 见图 1-4.

例如, 在 E_2 中, 若 $A = \{3, 5, 7, 9\}$, $B = \{8, 9, 10\}$, 则 $A - B = \{3, 5, 7\}$.

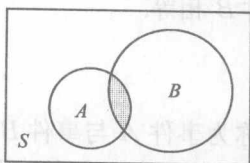


图 1-3

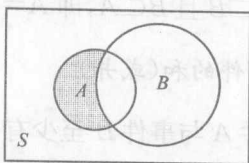


图 1-4

5. 事件互不相容(或互斥)

若 $A \cap B = \emptyset$, 即事件 A 与事件 B 不能同时发生, 或事件 A 与事件 B 没有共同的样本点, 则称事件 A 与事件 B 是互不相容的, 或互斥的, 见图 1-5.

例如, 在 E_2 中, 若 $A = \{3, 5, 7, 9, 11\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 12\}$, 则 $AB = \emptyset$, 因此 A 与 B 互斥.

在同一试验中, 基本事件是两两互不相容的.

6. 对立(或逆)事件

若 $A \cup B = S$ 且 $A \cap B = \emptyset$, 则称事件 A 与事件 B 互为对立事件(或逆事件). 在一次试验中, 若事件 A 与 B 是对立事件, 则其中必有一个发生, 且仅有一个发生. A 的对立事件记为 $\bar{A}$, 见图 1-6.

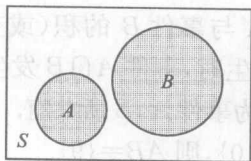


图 1-5

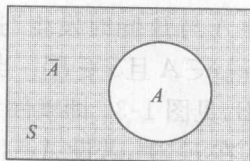


图 1-6

例如, 在 E_2 中, 若 $A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$, 则显然 $A \cup B = S$ 且 $A \cap B = \emptyset$, 故 A 与 B 是对立事件, $B = \bar{A}$.

事件运算符合集合运算规律. 显然

$$A \cup \bar{A} = S, \quad A \cap \bar{A} = \emptyset;$$

$$A \cup S = S, \quad A \cap S = A;$$

$$A \cup A = A, \quad A \cap A = A.$$

设 A, B, C 为事件, 则有

交换律: $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$.

结合律: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

分配律: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C);$

3 示表: $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$

吸收律: $A \cup (A \cap B) = A;$

会叙以 叙: $A \cap (A \cup B) = A.$

对偶公式(也称为德摩根律): $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}; \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$

更一般地,有

$$\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}; \quad \overline{\bigcap_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \overline{A_i};$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}; \quad \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}.$$

差的公式: $A - B = A \overline{B}.$

例 1.1 在某系学生中任选一名学生, 设 A 表示被选出的是男生, B 表示该生是三年级学生, C 表示该生是运动员.

- (1) 叙述事件 $A \cap B \cap \overline{C}$ 的意义;
- (2) 在什么条件下有恒等式 $A \cap B \cap C = C$?
- (3) 什么时候关系式 $C \subset B$ 成立?
- (4) 什么时候关系式 $\overline{A} = B$ 成立?

解 (1) $A \cap B \cap \overline{C}$ 表示该生是三年级男生, 但不是运动员.

(2) $A \cap B \cap C = C$ 等价于 $C \subset A \cap B$, 即全系的运动员都是三年级男生.

(3) 当运动员都是三年级学生时, $C \subset B$ 成立.

(4) 当全系女生都在三年级且三年级学生都是女生时, 关系式 $\overline{A} = B$ 成立.

例 1.2 设 A, B, C 为 3 个事件, 试用 A, B, C 表示下列各事件:

- (1) A_1 表示 3 个事件都发生;
- (2) A_2 表示 A 发生, 但 B 与 C 不发生;
- (3) A_3 表示 3 个事件中恰有一个发生;
- (4) A_4 表示 3 个事件中至少有两个发生;
- (5) A_5 表示 A, B, C 3 个事件中至多有一个发生.

解 (1) $A_1 = A \cap B \cap C;$

(2) $A_2 = A - B - C$ 或 $A_2 = A - (B \cup C)$, 利用差的公式,

$$A_2 = A \cap (\overline{B \cup C}) = A \cap \overline{B} \cap \overline{C};$$

(3) A, B, C 中恰有一个发生, 即 A 发生而 B, C 不发生, 或者 B 发生而 A, C 不发生, 或者 C 发生而 A, B 不发生, 所以

$$A_3 = (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C);$$

(4) $A_4 = (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C);$

$$(5) A_5 = (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}).$$

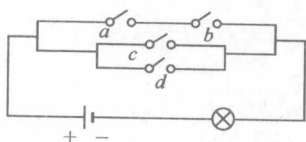


图 1-7

例 1.3 设 A, B, C, D 依次表示图 1-7 开关 a, b, c, d 闭合, E 表示灯亮, 试用 A, B, C, D 表示 E .

解 因为当开关 a, b 同时闭合, 或者当 c, d 两个开关至少有一个闭合时, 电路被接通, 灯就会亮, 所以

$$E = (A \cap B) \cup C \cup D.$$

习 题 1.1

- 写出下列随机试验的样本空间:
 - 同时掷两颗骰子, 记录两颗骰子点数之和;
 - 记录一台电视机的使用寿命;
 - 甲乙两人下棋一局, 记录棋赛的结果;
 - 在单位圆内任意取一点, 记录它的坐标.
- 设 A, B, C 为 3 事件, 试用事件的运算关系表示下列事件:
 - A, B, C 都不发生;
 - A 与 B 都发生, 但 C 不发生;
 - A, B, C 中至少有一个发生;
 - A, B, C 中不多于两个发生;
 - A, B, C 中 A, B 至少有一个发生, C 不发生.
- 设一批零件, 有正品也有次品, 从这批零件中任意抽取 7 件. 设 A 表示事件“抽到的次品数不多于 3”, B 表示事件“抽到的次品数为奇数”. 试问: 事件 $A \cup B, AB, A - B, \bar{B}$ 各表示什么意思?
- 盒中装有 10 只晶体管. 令 A_i 表示“10 只晶体管中恰有 i 只次品”, B 表示“10 只晶体管中不多于 3 只次品”, C 表示“10 只晶体管中次品不少于 4 只”. 问事件 $A_i (i=0, 1, 2, 3), B$ 和 C 之间哪些有包含关系? 哪些互不相容? 哪些互逆?
- 某灯泡厂取样检查出厂灯泡的寿命, 设 A 表示“灯泡寿命大于 1500h”, B 表示“灯泡寿命为 1000~2000h”, 请用集合形式写出下列事件: $\Omega, A, B, A \cup B, AB, A - B, B - A$.

1.2 随机事件的概率

一般来说, 总会发现有些随机事件发生的可能性大些, 有些随机事件发生的可能性小些. 在实际中常常希望知道某些事件在一次试验中发生的可能性究竟有多大. 例如, 为了确定水坝的高度, 就要知道河流在造水坝地段每年洪水达到某一高度这一事件发生的可能性的. 希望找到一个合适的数来表示事件在一次试验中发生的可能性的. 这就需要用一个数量指标来定量地刻画随机事件发生的

可能性的大小,这个数量指标叫做事件的概率.下面从几个不同的角度给出概率的定义和计算方法.

1.2.1 概率的统计定义

1. 事件的频率

定义 1.1 在相同条件下,进行 n 次试验,在这 n 次试验中,事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的频数. 比值 n_A/n 称为事件 A 发生的频率,并记成 $f_n(A)$.

由此定义易见频率具有下述基本性质:

- (1) $0 \leq f_n(A) \leq 1$;
- (2) $f_n(S) = 1$;
- (3) 若 $A_1, A_2, \dots, A_k$ 是两两互不相容的事件,则

$$f_n(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \dots + f_n(A_k).$$

由于事件 A 发生的频率是它发生的次数与试验次数之比,其大小表示 A 发生的频繁程度,频率愈大,事件 A 发生愈频繁,这意味着 A 在一次试验中发生的可能性愈大. 因而,自然会想:能不能用频率来表示 A 在一次试验中发生的可能性的大小.

2. 概率的统计定义

经验表明,当 n 较小时,频率 $f_n(A)$ 在 0 与 1 之间随机波动,其幅度较大. 此时用频率来表示事件发生的可能性大小显然是不合适的. 而当 n 逐渐增大时,频率 $f_n(A)$ 逐渐稳定于某个常数. 例如,在抛硬币的试验中,观察出现正面的次数,这种试验历史上曾有不少人做过,其结果如表 1-1 所示.

表 1-1

试验者	n	n_H	$f_n(H)$
德摩根	2048	1061	0.5181
蒲丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005

从表 1-1 可以看出:不管谁去抛硬币,当 n 逐渐增大时,频率 $f_n(H)$ 逐渐稳定于常数 0.5. 对于每一个随机事件 A 都有这样一个客观存在的常数与之对应. 这种“频率稳定性”即前面所说的统计规律性. 用这个频率稳定值来表示事件发生的可能性大小是合适的.

定义 1.2 在相同条件下进行大量重复试验,当试验次数充分大时,事件 A 的

频率总在某个数值 p 附近摆动, 则称 p 为事件 A 的概率, 记为 $P(A)$, 即

$$P(A) = p.$$

在第4章中将会证明, 当 n 很大时, 用统计概率来度量事件发生的可能性的太大是可行的.

1.2.2 概率的公理化定义

在实际中, 不可能对每一个事件都做大量的试验, 从中得到频率的稳定值. 然而, 频率的这一规律是定义事件概率的客观基础.

定义 1.3 设 E 是随机试验, S 是它的样本空间. 对于 E 的每一事件 A , 存在一实数, 记作 $P(A)$, 如果它满足条件

- (1) 非负性: 对任意事件 A , $0 \leq P(A) \leq 1$;
- (2) 规范性: $P(S) = 1$;
- (3) 可列可加性: 对两两互不相容的事件 $A_k (k=1, 2, \dots)$, 有

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k), \quad (1.1)$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

由定义 1.3 可以推得概率的一些重要性质.

性质 1.1 设 $\bar{A}$ 是 A 的对立事件, 则

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}).$$

证 因 $A \cup \bar{A} = S$, $A\bar{A} = \emptyset$, 由概率的可加性, 得

$$P(S) = P(A) + P(\bar{A}).$$

又由 $P(S) = 1$, 得 $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.

性质 1.2 $P(\emptyset) = 0$.

证 由 $\bar{\emptyset} = S$, 得 $P(\emptyset) = 1 - P(\bar{\emptyset}) = 1 - P(S) = 0$.

性质 1.3 设 A, B 是两个事件, 若 $B \supset A$, 则有

$$P(B) \geq P(A), \quad (1.2)$$

$$P(B - A) = P(B) - P(A). \quad (1.3)$$

证 由 $B \supset A$, $B = A \cup (B - A)$ (图 1-1) 且 $A(B - A) = \emptyset$, 再由概率的可加性, 得

$$P(B) = P(A) + P(B - A).$$

又由概率的非负性

$$P(B - A) \geq 0$$

知 $P(B) \geq P(A)$.