

复变函数入门

胡师度 曾繁芳

近代数学知识丛书 JINDAISHUXUEZHISHICONGSHU

四川教育出版社

近代数学知识丛书

51.8

ASD

复变函数入门

胡师度 曾繁芳



四川教育出版社

一九八八年·成都

责任编辑：韩承训

近代数学知识丛书

复变函数入门

四川教育出版社出版
四川省新华书店发行

(成都盐道街三号)
四川新华印刷厂印刷

开本787×960毫米 1/32 印张7.625 插页2 字数160千
1988年1月第一版 1988年1月第一次印刷
印数：1—1,980 册

ISBN 7-5408-0047-x/G·48

定价：1.59 元

写在前面

从小学跨入中学，特别是步入高中以后，你将碰到许多完全陌生的东西，你将会发现数学天地是那样广阔，那样令人神往而又眼花缭乱，你可能会感到新奇，也可能会因无从下手而产生惶惑……其实，万事入门难，入门前或许不知所云，入了门便“不过如此”了。

这套知识小丛书将帮助你度过“入门难”这一关。它用生动而浅显（有时还很有趣）的语言，准确而明晰的阐述，将近代数学中一些基本的概念、理论和运算一步一步展开，象一级级台阶，将你引入门去，使你并不感到突然和十分吃力。许多地方还从生活现象入手，你读起来象是在聊家常，毫无枯燥之感。所选的例题和练习也将帮助你加深理解。当然，所谓入门，不过是给你一把小小的钥匙而已，一旦“入”得“门”去，那广阔的天地便由你自由驰骋，因而也就不再是这套书的任务了。

这套丛书所收书目大多为中学教学所涉及；少数关系不甚密者，可辅你开拓视野，有兴趣者也不妨一读。

《复变函数入门》由曾繁芳、胡师度二同志编写。全书取材精审，繁简得体，循序渐进，深入浅出。当然，由于编者水平所限，书中缺点错误亦在所难免，敬希读者提出宝贵意见。

编者

1986年12月

目 录

一	复数	1
1.1	复数及其几何表示	1
1.2	复数的向量表示及加法的几何意义	3
1.3	复数的模及幅角	5
1.4	复数的三角形式	7
1.5	复数的 n 次方根	13
1.6	平面上的点集	16
二	解析函数	26
2.1	复变函数	26
2.2	复变函数的导数 柯西—黎曼条件	31
2.3	解析函数的概念	38
2.4	多项式 指数函数 对数函数 正余弦函数	39
2.5	解析函数的实虚部	46
三	复积分	53
3.1	复积分的定义及其基本性质	53
3.2	原函数	62

3.3	柯西积分定理	67
3.4	围线及围线组的柯西积分定理	72
3.5	孤立奇点及其残数 残数定理	77
3.6	柯西积分公式	81
3.7	柯西积分的高阶导数	87
3.8	对数函数及一般幂函数的单值 解析分支	96
四	泰勒级数及劳伦级数	105
4.1	幂级数及其解析性	105
4.2	解析函数的幂级数表示	112
4.3	解析函数的零点	122
4.4	劳伦级数	127
4.5	孤立奇点处劳伦展式的特征	138
4.6	残数的计算方法	145
五	残数的应用	157
5.1	三种类型的定积分计算	157
5.2	其它类型的积分举例	169
5.3	幅角原理及鲁歇定理	180
5.4	鲁歇定理的应用	190
六	保形映射	196
6.1	导数的几何意义	196
6.2	保形映射的定义	200
6.3	测地投影与无穷远点	201
6.4	分式线性映射的保形性及保圆 性	206
6.5	两种典型的分式线性映射	212

6·6	给定三对对应点确定分式线性 映射.....	219
6·7	指数函数及幂函数所确定的映 射.....	225

一 复 数

远在中世纪，人们在研究二次方程的解时，就已经发现了形如 $a + b\sqrt{-1}$ 的“数”（ a, b 为实数）。在相当长的一段时间里，数学家们对它持有怀疑，因而称之为“虚数”。1799年，高斯在其博士论文中给出了这种“虚数”的几何表示，从而驱散了人们对这种数的神秘感。现在，数学工作者或其它科技工作者都会毫无怀疑地使用这种数，并称它为复数。

1.1 复数及其几何表示

复数的形式是 $a + ib$ （其中 a, b 是实数）， i 满足方程 $i^2 + 1 = 0$ ，称为虚单位。如用 a 记复数 $a + ib$ ，则称 a 为 a 的实部，记为 $\operatorname{Re} a$ ，称 b 为 a 的虚部，记为 $\operatorname{Im} a$ 。

复数的代数四则运算法则是大家所熟知的，此处不再赘述。

形如 $a + i0$ 的复数本质上就是实数 a ， $0 + ib$ ($b \neq 0$) 称为纯虚数，简记为 ib 。

复数 $a = a + ib$ 的共轭复数为 $a - ib$, 记为 $\overline{a}$. 显然, $(\overline{\overline{a}}) = a$. 故共轭复数是相互的, 并且有

$$a = \operatorname{Re} a = \frac{a + \overline{a}}{2}, \quad b = \operatorname{Im} a = \frac{a - \overline{a}}{2i} \quad (1.1)$$

设 a, β 为两个复数, 可以直接验证

$$\left. \begin{aligned} \overline{a \pm \beta} &= \overline{a} \pm \overline{\beta}, \quad \overline{a \cdot \beta} = \overline{a} \cdot \overline{\beta}, \\ \overline{\left(\frac{a}{\beta}\right)} &= \frac{\overline{a}}{\overline{\beta}} \quad (\beta \neq 0). \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

在平面上取定直角坐标系, 让平面上的点 $P(a, b)$ 与复数对应, 这种对应是一一对应的, 点 (a, b) 是复数的几何表示, 而 $a + ib$ 可称为点 (a, b) 的复数标记. 由于横轴上的点表示实数, 纵轴上的点表示纯虚数, 因而两者分别叫做**实轴**和**虚轴**. 表示全体复数的平面叫做**复平面**, 或简称平面. 复数及其几何表示, 或点与其复数标记, 我们可以不必加以区分. 论及到平面上某点集也就意味着那些点的复数标记所成的数集, 反之亦然.

例 1 将直线 $l = \{(x, y) \mid ax + by + c = 0, a, b, c \text{ 是实常数}\}$ 表成复数形式.

解: 记 $x + iy = z$, 则 $x = \frac{z + \overline{z}}{2}, y = \frac{z - \overline{z}}{2i}$,

$$ax + by + c = a \frac{z + \overline{z}}{2} + b \frac{z - \overline{z}}{2i} + c$$

$$= \frac{a-ib}{2} z + \frac{a+ib}{2} \overline{z} + c.$$

命 $\frac{a+ib}{2} = a$, 则 $\frac{a-ib}{2} = \overline{a}$, 于是直线 l 的复数形式为

$$l = \{z \mid \overline{a}z + a\overline{z} + c = 0 \mid c \text{ 为实数} \}. \quad (1.3)$$

再由 (1.1) 式知 $\overline{a}z + a\overline{z} = 2 \operatorname{Re}(\overline{a}z)$, 这样 (1.3) 又可写成

$$l = \{z \mid \operatorname{Re}(\overline{a}z) = k, k = -\frac{c}{2} \text{ 为实数} \}. \quad (1.4)$$

作为练习, 可以验证

$$k = \{z \mid \overline{z}z + \overline{a}z + a\overline{z} = 0\}$$

是过原点的圆周 (这里 $a = a + ib$ 是常数) .

1.2 复数的向量表示及加法的几何意义

将点 $a = a + ib$ 表于复平面上, 从原点 o 引向 a 并终于 a 点的向量也可以用来表示复数 a .

复数的加法与向量的加法一样, 可按三角形法进行. 如给定 $a = a + ib$, $\beta = c + id$, 从 a 点起引一向量, 其长度及方向与 β 相等, 则其终点就是点 $a + \beta$ (图1-1). 当然也可以从 β 点引一向量, 长度及方向与 a 相等, 其终点也是 $a + \beta$. 这就说明点 $a + \beta$ 是

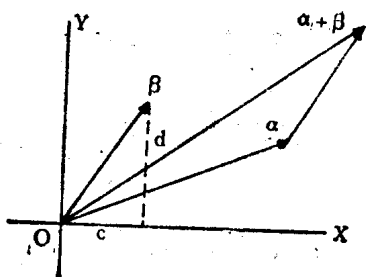


图1-1

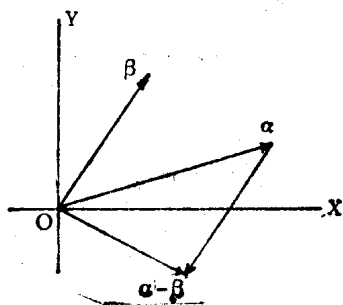


图1-2

由点 a 按 β 的方向及长度移动得出（或 β 点按 a 的方向及长度移动得出）。

对于 $a - \beta$ ，可以由 $a + (-\beta)$ 得出，见图1-2。

例2 坐标平移的复数记法。

如将坐标原点移动至 $a = a + ib$ （图1-3），一点 P 的原坐标为 $z = x + iy$ ，该点对新坐标系的坐标为 $z' = x' + iy'$ 。由图1-3得

$$z = z' + a.$$

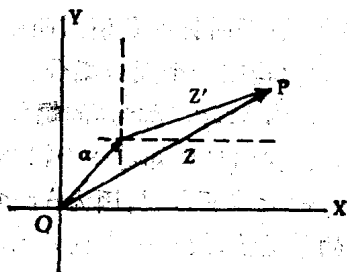


图1-3

这就是坐标平移公式。若分开实虚部就是

$$\begin{cases} x = x' + a, \\ y = y' + b. \end{cases}$$

1.3 复数的模及幅角

复数 $a = a + ib$ 的模定义为 $\sqrt{a^2 + b^2}$ ，记为 $|a|$ ，它就是向量 a 的长度，也是点 a 到原点 O 的距离。由此定义得不等式

$$|a| \leq |a|, \quad |b| \leq |a|. \quad (1.5)$$

又由图1-1及图1-2以及三角形边长的不等式得

$$|a + \beta| \leq |a| + |\beta|, \quad |a - \beta| \geq ||a| - |\beta||. \quad (1.6)$$

我们又可以直接验证

$$|a|^2 = a \cdot \overline{a}, \quad |\overline{a}| = |a|. \quad (1.7)$$

注意：若 a 不是实数，则 $|a|^2 \neq a^2$ 。

设 $a = a + ib \neq 0$ ，我们将正实轴绕原点旋转到与

向量 a 重合, 所旋转角度的代数值 (当旋转逆时针进行时, 取正值; 顺时针取负值), 叫做 a 的一个幅角值. 全体幅角值构成一个无穷集合 (因为可以一面再地旋转), 记为 $\text{Arg}a$, 称为 a 的**幅角** ($a=0$, 幅角不作规定). 我们只要知道一个幅角值, 例如 θ , 则 $\text{Arg}a = \{\theta + 2k\pi \mid k \in I\}$ *. 因为 $\text{Arg}a$ 中任何两个值的差是 2π 的整数倍, 故有一个且只有一个 $\theta \in \text{Arg}a$ 合条件 $-\pi < \theta \leq \pi$, 称它为复数 a 的**幅角主值**, 记为 $\arg a$, 见图1-4.

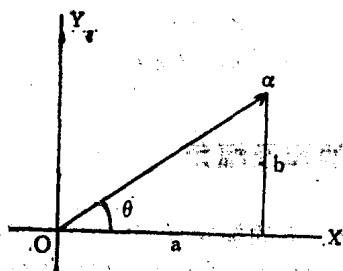


图1-4

由模及幅角的定义知

$$\begin{aligned} a &= |a| \cos \theta \\ b &= |a| \sin \theta \end{aligned} \quad \theta \in \text{Arg}a. \quad (1.8)$$

对 θ 求出此方程的全体解即得 $\text{Arg}a$, 如 $a=0$, $b \neq 0$, 解(1.8)得

* I 代表全体整数所成的集, 以后不再说明.

$$\operatorname{Arg}(ib) = \begin{cases} \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in I \right\} & b > 0, \\ \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in I \right\} & b < 0. \end{cases}$$

如 $a \neq 0$, 则 $\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \theta$, 由此可在 $\theta = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{b}{a}$ 或

$\theta = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{b}{a} + \pi$ 中选出一个来使 (1.8) 成立, 然后就可写出 $\operatorname{Arg} a$.

例 3 求 $\operatorname{Arg} \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$.

解, 由 $\operatorname{tg} \theta = -\sqrt{3}$, 解得 $\theta = \operatorname{arc} \operatorname{tg} (-\sqrt{3})$
 $= -\frac{\pi}{3}$ 或 $\theta = \frac{2\pi}{3}$, 舍去 $\theta = -\frac{\pi}{3}$ (为什么?), 即得

$$\begin{aligned} \operatorname{Arg} \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ = \left\{ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in I \right\}. \end{aligned}$$

作为练习, 请读者求 $\operatorname{Arg} \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$.

1.4 复数的三角形形式

由 (1.8) 式, 复数 $a = a + ib \neq 0$ 可以写成

$$a = |a| (\cos \theta + i \sin \theta), \theta \in \operatorname{Arg} a, (1.9)$$

称为复数 a 的三角形形式. 如 $|a| = 1$, 我们称此 a 为么

么模复数，例如， $1, i, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 都是么模复数。

么模复数的三角形式为

$$\cos\theta + i\sin\theta \quad (\theta \text{ 为实数}) .$$

为了以后的方便，将上式记为 $e^{i\theta}$ ，即

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta. \quad (1.10)$$

例如： $e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i;$

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1;$$

$$e^{i2k\pi} = \cos 2k\pi + i\sin 2k\pi = 1 (k \in I). \text{ 么模复数 } e^{i\theta}$$

分布在单位圆周上，且 $\text{Arg}(e^{i\theta}) = \{\theta + 2k\pi | k \in I\}$.

注意，么模复数的积与商仍为么模复数，并且

$$\begin{aligned} e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} &= e^{i(\theta_1 + \theta_2)}, \\ \frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} &= e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \end{aligned} \quad (1.11)$$

事实上

$$\begin{aligned} e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} &= (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= (\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2) \\ &\quad + i(\cos\theta_1 \sin\theta_2 + \sin\theta_1 \cos\theta_2) \\ &= \cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2) \\ &= e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \end{aligned}$$

$$\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = \frac{\cos\theta_1 + i\sin\theta_1}{\cos\theta_2 + i\sin\theta_2}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\cos\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \sin\theta_2}{\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2} \\
 &\quad + i \frac{\sin\theta_1 \cos\theta_2 - \cos\theta_1 \sin\theta_2}{\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2} \\
 &= \cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2). \\
 &= e^{i(\theta_1 - \theta_2)}.
 \end{aligned}$$

可见 $e^{i\theta}$ 的乘除可按指数定律进行。

例 4 设将一坐标系旋转 θ 角得新坐标系，点的原坐标为 z ，对新坐标系的坐标为 $z' = |z'|e^{i\theta'}$ 。

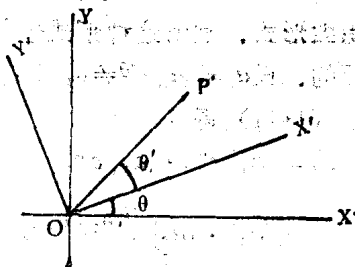


图1-5

由图1-5可见 $|z| = |z'|$ ， $\theta + \theta' \in \text{Arg}z$ ，因此

$$\begin{aligned}
 z &= |z| e^{i(\theta + \theta')} = |z'| e^{i\theta'} \cdot e^{i\theta} \\
 &= z' e^{i\theta},
 \end{aligned}$$

这就是坐标旋转的复数记法。分开实虚部得

$$\begin{cases} x = x' \cos\theta - y' \sin\theta, \\ y = x' \sin\theta + y' \cos\theta. \end{cases}$$

由(1.11)还可得

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}, \quad n \in I.$$