复变函数入门

胡师度　曾繁芳

近代数学知识丛书 JINDAISHUXUEZHISHICONGSH

四川教育出版社

近代数学知识丛书

复变函数入门

胡师度　曾繁芳

四川教育出版社

一九八八年·成都

责任编辑：韩承训

近代数学知识丛书 复变函数入门

四川教育出版社出版 （成都盐道街三号）
四川省新华书店发行 四川新华印刷厂印刷

开本787×960毫米 1/32 印张7.625 插页2 字数160千
1988年1月第一版 1988年1月第一次印刷
印数：1—1,980 册

ISBN 7-5408-0047-x/G·48 定价：1.59 元

写在前面

从小学跨入中学，特别是步入高中以后，你将碰到许多完全陌生的东西，你将会发现数学天地是那样广阔，那样令人神往而又眼花缭乱，你可能会感到新奇，也可能会因无从下手而产生惶惑……其实，万事入门难，入门前或许不知所云，入了门便“不过如此”了。

这套知识小丛书将帮助你度过“入门难”这一关。它用生动而浅显（有时还很有趣）的语言，准确而明晰的阐述，将近代数学中一些基本的概念、理论和运算一步一步展开，象一级级台阶，将你引入门去，使你并不感到突然和十分吃力。许多地方还从生活现象入手，你读起来象是在聊家常，毫无枯燥之感。所选的例题和练习也将帮助你加深理解。当然，所谓入门，不过是给你一把小小的钥匙而已，一旦“入”得“门”去，那广阔的天地便由你自由驰骋，因而也就不再是这套书的任务了。

这套丛书所收书目大多为中学教学所涉及；少数关系不甚密者，可辅你开拓视野，有兴趣者也不妨一读。

《复变函数入门》由曾繁芳、胡师度二同志编写。全书取材精审，繁简得体，循序渐进，深入浅出。当然，由于编者水平所限，书中缺点错误亦在所难免，敬希读者提出宝贵意见。

编　者

1986年12月

目 录

一 复 数

远在中世纪，人们在研究二次方程的解时，就已经发现了形如 $a+b\sqrt{-1}$ 的“数”（a、b 为实数）。在相当长的一段时间里，数学家们对它持有怀疑，因而称之为“虚数”。1799年，高斯在其博士论文中给出了这种“虚数”的几何表示，从而驱散了人们对这种数的神秘感。现在，数学工作者或其它科技工作者都会毫无怀疑地使用这种数，并称它为复数。

1·1 复数及其几何表示

复数的形式是 $a+ib$（其中 a、b 是实数），i 满足方程 $i^2+1=0$，称为**虚单位**。如用 α 记复数 $a+ib$，则称 a 为 α 的**实部**，记为 $\mathrm{Re}\ \alpha$；称 b 为 α 的**虚部**，记为 $\mathrm{Im}\ \alpha$。

复数的代数四则运算法则是大家所熟知的，此处不再赘述。

形如 $a+i0$ 的复数本质上就是实数 a；$0+ib$（$b\neq0$）称为**纯虚数**，简记为 ib。

复数$\alpha=a+ib$的**共轭复数**为$a-ib$，记为$\overline{\alpha}$。显然，$(\overline{\overline{\alpha}})=\alpha$。故共轭复数是相互的，并且有

$$a=\mathrm{Re}\alpha=\frac{\alpha+\overline{\alpha}}{2}; \quad b=\mathrm{Im}\alpha=\frac{\alpha-\overline{\alpha}}{2i} \tag{1·1}$$

设α、β为两个复数，可以直接验证

$$\left.\begin{aligned}&\overline{\alpha\pm\beta}=\overline{\alpha}\pm\overline{\beta},\quad \overline{\alpha\cdot\beta}=\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta},\\&\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}=\frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}\quad(\beta\neq0).\end{aligned}\right\}\tag{1·2}$$

在平面上取定直角坐标系，让平面上的点$P(a, b)$与复数对应，这种对应是一对一的，点(a,b)是复数的**几何表示**，而$a+ib$可称为点(a,b)的**复数标记**。由于横轴上的点表示实数，纵轴上的点表示纯虚数，因而两者分别叫做**实轴**和**虚轴**。表示全体复数的平面叫做**复平面**，或简称平面。复数及其几何表示，或点与其复数标记，我们可以不必加以区分。论及到平面上某点集也就意味着那些点的复数标记所成的数集，反之亦然。

例 1 将直线$l=\{(x, y)\mid ax+by+c=0$，a、b、c是实常数$\}$表成复数形式。

解：记$x+iy=z$，则$x=\dfrac{z+\overline{z}}{2}, y=\dfrac{z-\overline{z}}{2i}$，

$$ax+by+c=a\frac{z+\overline{z}}{2}+b\frac{z-\overline{z}}{2i}+c$$

$$= \frac{a-ib}{2} z + \frac{a+ib}{2} \overline{z} + c.$$

命 $\frac{a+ib}{2} = \alpha$，则 $\frac{a-ib}{2} = \overline{\alpha}$，于是直线 l 的复数形式为

$$l = \{ z \mid \overline{\alpha} z + \alpha \overline{z} + c = 0 \quad c\text{为实数} \}. \tag{1·3}$$

再由（1·1）式知 $\overline{\alpha} z + \alpha \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}\,(\overline{\alpha} z)$，这样（1·3）又可写成

$$l = \{ z \mid \mathrm{Re}(\overline{\alpha} z) = k,\ k = -\frac{c}{2}\text{为实数} \}. \tag{1·4}$$

作为练习，可以验证

$$k = \{ z \mid z\overline{z} + \overline{\alpha} z + \alpha \overline{z} = 0 \}$$

是过原点的圆周（这里 $\alpha = a + ib$ 是常数）.

1·2 复数的向量表示及加法的几何意义

将点 $\alpha = a + ib$ 表于复平面上，从原点 o 引向 α 并终于 α 点的向量也可以用来表示复数 α。

复数的加法与向量的加法一样，可按三角形法进行。如给定 $\alpha = a + ib$，$\beta = c + id$，从 α 点起引一向量，其长度及方向与 β 相等，则其终点就是点 $\alpha + \beta$（图1-1）. 当然也可以从 β 点引一向量，长度及方向与 α 相等，其终点也是 $\alpha + \beta$。这就说明点 $\alpha + \beta$ 是

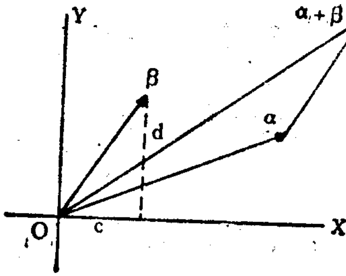

图1－1

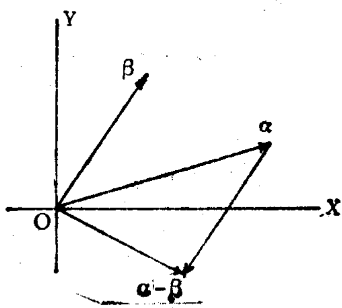

图1－2

由点α按β的方向及长度移动得出（或β点按α的方向及长度移动得出）.

对于$\alpha-\beta$，可以由$\alpha+(-\beta)$得出，见图1-2.

例 2 坐标平移的复数记法.

如将坐标原点移动至$\alpha=a+ib$（图1-3），一点P的原坐标为$z=x+iy$，该点对新坐标系的坐标为$z'=x'+iy'$. 由图1-3得

$$z=z'+\alpha.$$

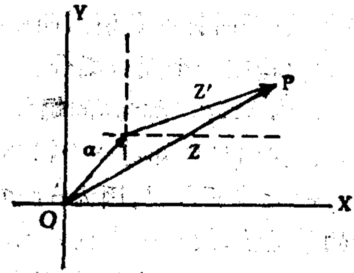

图1-3

这就是坐标平移公式。若分开实虚部就是

$$\begin{cases} x = x' + a, \\ y = y' + b. \end{cases}$$

1·3 复数的模及幅角

复数$\alpha = a + ib$的模定义为$\sqrt{a^2 + b^2}$，记为$|\alpha|$，它就是向量α的长度，也是点α到原点O的距离。由此定义得不等式

$$|a| \leqslant |\alpha|, \quad |b| \leqslant |\alpha|. \tag{1·5}$$

又由图1-1及图1-2以及三角形边长的不等式得

$$|\alpha + \beta| \leqslant |\alpha| + |\beta|, \quad |\alpha - \beta| \geqslant \big||\alpha| - |\beta|\big|. \tag{1·6}$$

我们又可以直接验证

$$|\alpha|^2 = \alpha \cdot \overline{\alpha}, \quad |\overline{\alpha}| = |\alpha|. \tag{1·7}$$

注意：若α不是实数，则$|\alpha|^2 \neq \alpha^2$。

设$\alpha = a + ib \neq 0$，我们将正实轴绕原点旋转到与

向量α重合，所旋转角度的代数值（当旋转逆时针进行时，取正值；顺时针取负值），叫做α的一个幅角值。全体幅角值构成一个无穷集合（因为可以一而再地旋转），记为$\mathrm{Arg}\alpha$，称为α的**幅角**（$\alpha=0$，幅角不作规定）。我们只要知道一个幅角值，例如θ，则$\mathrm{Arg}\alpha=\{\theta+2k\pi \mid k\in I\}$ *。因为$\mathrm{Arg}\alpha$中任何两个值的差是2π的整数倍，故有一个且只有一个$\theta\in\mathrm{Arg}\alpha$合条件$-\pi<\theta\leqslant\pi$，称它为复数$\alpha$的**幅角主值**，记为$\arg\alpha$，见图1-4。

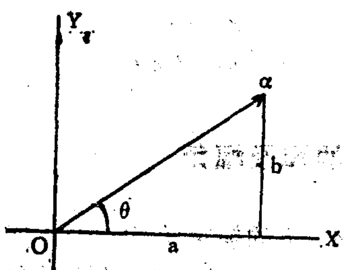

图1-4

由模及幅角的定义知

$$\begin{cases} a=|\alpha|\cos\theta \\ b=|\alpha|\sin\theta \end{cases} \quad \theta\in\mathrm{Arg}\alpha. \qquad (1\cdot8)$$

对θ求出此方程的全体解即得$\mathrm{Arg}\alpha$。如$a=0$，$b\neq0$，解（1·8）得

---

* I代表全体整数所成的集，以后不再说明。

$$\operatorname{Arg}(ib)=\begin{cases}\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi \mid k\in I\right\} & b>0,\\ \left\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi \mid k\in I\right\} & b<0.\end{cases}$$

如$a\neq 0$，则$\frac{b}{a}=\operatorname{tg}\theta$，由此可在$\theta=\operatorname{arc}\ \operatorname{tg}\frac{b}{a}$或

$\theta=\operatorname{arc}\ \operatorname{tg}\frac{b}{a}+\pi$中选出一个来使（1·8）成立，然后就可写出$\operatorname{Arg}\alpha$。

例 3　求$\operatorname{Arg}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$．

解：由$\operatorname{tg}\theta=-\sqrt{3}$，解得$\theta=\operatorname{arc}\ \operatorname{tg}(-\sqrt{3})$ $=-\frac{\pi}{3}$或$\theta=\frac{2\pi}{3}$，舍去$\theta=-\frac{\pi}{3}$（为什么？），即得

$$\operatorname{Arg}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\left\{\frac{2\pi}{3}+2k\pi \mid k\in I\right\}.$$

作为练习，请读者求$\operatorname{Arg}\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$．

1·4　复数的三角形式

由（1·8）式，复数$\alpha=a+ib\neq 0$可以写成

$$\alpha=|\alpha|(\cos\theta+i\sin\theta),\ \theta\in\operatorname{Arg}\alpha,\quad(1\cdot 9)$$

称为复数α的**三角形式**．如$|\alpha|=1$，我们称此α为么

模复数，例如，1、i、$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 都是么模复数。

么模复数的三角形式为

$$\cos\theta+i\sin\theta \qquad (\theta\text{为实数}).$$

为了以后的方便，将上式记为$e^{i\theta}$，即

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta. \tag{1·10}$$

例如：$e^{i\frac{\pi}{2}}=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i$；

$$e^{i\pi}=\cos\pi+i\sin\pi=-1;$$

$e^{i2k\pi}=\cos 2k\pi+i\sin 2k\pi=1(k\in I)$。么模复数$e^{i\theta}$分布在单位圆周上，且$\mathrm{Arg}(e^{i\theta})=\{\theta+2k\pi|\,k\in I\}$．

注意，么模复数的积与商仍为么模复数，并且

$$e^{i\theta_1}\cdot e^{i\theta_2}=e^{i(\theta_1+\theta_2)},$$

$$\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}=e^{i(\theta_1-\theta_2)} \tag{1·11}$$

事实上

$$\begin{aligned}e^{i\theta_1}\cdot e^{i\theta_2}&=(\cos\theta_1+i\sin\theta_2)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\\&=(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)\\&\quad+i(\cos\theta_1\sin\theta_2+\sin\theta_1\cos\theta_2)\\&=\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\\&=e^{i(\theta_1+\theta_2)}\end{aligned}$$

$$\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}=\frac{\cos\theta_1+i\sin\theta_1}{\cos\theta_2+i\sin\theta_2}$$

$$=\frac{\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2}{\cos^2\theta_2+\sin^2\theta_2}$$

$$+i\frac{\sin\theta_1\cos\theta_2-\cos\theta_1\sin\theta_2}{\cos^2\theta_2+\sin^2\theta_2}$$

$$=\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2).$$

$$=e^{i(\theta_1-\theta_2)}.$$

可见$e^{i\theta}$的乘除可按指数定律进行。

例 4 设将一坐标系旋转θ角得新坐标系，点的原坐标为z，对新坐标系的坐标为$z'=|z'|e^{i\theta'}$。

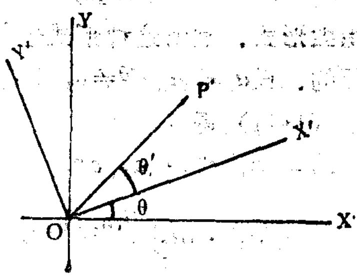

图1－5

由图1-5可见$|z|=|z'|$，$\theta+\theta'\in\text{Arg}z$，因此

$$z=|z|e^{i(\theta+\theta')}=|z'|e^{i\theta'}\cdot e^{i\theta}$$
$$=z'e^{i\theta},$$

这就是坐标旋转的复数记法。分开实虚部得

$$\begin{cases}x=x'\cos\theta-y'\sin\theta,\\y=x'\sin\theta+y'\cos\theta.\end{cases}$$

由（1·11）还可得

$$(e^{i\theta})^n=e^{in\theta},\quad n\in I.$$