

MBA

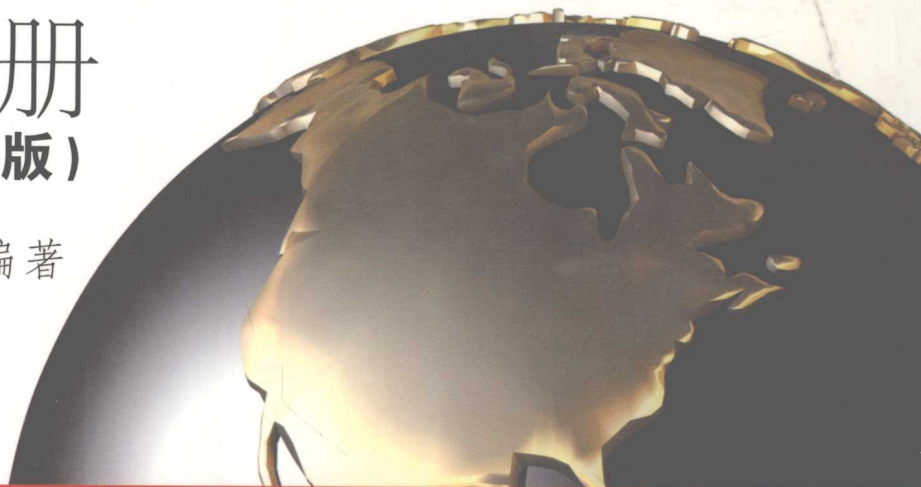
2005

联考300分奇迹

数学分册

(第5版)

尤承业 范培华 编著
庄大蔚 郑家俊



北大、清华、复旦三校联手

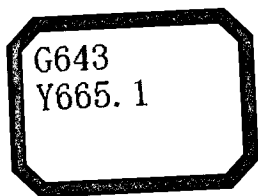
教授领衔、名师加盟，编写阵容强大

全面紧扣最新大纲，优化组合南北优势

整体推出2005年MBA联考最佳解决方案

复旦大学出版社

MBA 联考 300 分奇迹



(第 5 版)

数学分册

尤承业 范培华 编著
庄大蔚 郑家俊

复旦大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

MBA 联考 300 分奇迹. 数学分册/尤承业等编著. —5 版.
—上海:复旦大学出版社, 2004. 4
ISBN 7-309-03899-1

I. M… II. 尤… III. 高等数学-研究生-入学考试-
自学参考资料 IV. G643

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 008231 号

MBA 联考 300 分奇迹. 数学分册(第 5 版)

尤承业 范培华 庄大蔚 郑家俊 编著

出版发行 复旦大学出版社

上海市国权路 579 号 邮编 200433

86-21-65118853(发行部) 86-21-65109143(邮购)

fupnet@fudanpress.com <http://www.fudanpress.com>

责任编辑 李 华

装帧设计 孙 曙

总 编 辑 高若海

出 品 人 贺圣遂

印 刷 浙江省临安市曙光印务有限公司

开 本 787×1092 1/16

印 张 24.75

字 数 571 千

版 次 2004 年 4 月第五版 2004 年 4 月第一次印刷

印 数 1—6 990

书 号 ISBN 7-309-03899-1/O·317

定 价 39.00 元

如有印装质量问题, 请向复旦大学出版社发行部调换。

版权所有 侵权必究

丛书序言

本套丛书是为参加 2005 年 MBA 联考的考生而精心编制的自学辅导教程,是在全面总结前四版的基础上,根据最新大纲要求全新改版而成。

为给实践经验丰富或具有管理潜质的优秀人才创造更多的机会,2003 年全国 MBA 指导委员会决定对以往的联考方案进行了必要的改革,即用综合能力考试代替数学、语文和逻辑的单科考试,进一步加强面试在录取中比重,从运行的结果来看,这次改革取得了一定的成效。但由于 MBA 联考毕竟还是一种选拔性考试,就我国的实情来看,这种改革只能是渐进式的。尽管从 MBA 培养模式的特点来讲,入学录取应当采取更加主观和灵活的方式,更多地考察考生的管理背景、业绩和资质,但在中国现阶段情况下,为了保证公平、公正、公开的原则得以贯彻,教育部规定 MBA 考生取得复试资格的分数是根据当年联考的成绩和全国计划招生的总人数划定的,因此,MBA 入学考试的笔试成绩仍然会在相当长的一段时间内对考生的录取起到重要的作用,特别是对于工作多年的大龄考生来说,甚至是非常关键的,这正是复旦大学出版社每年编写出版这样一套复习丛书的一个大的背景。

五年来,为出好书、出精品,复旦大学出版社在组织编写《MBA 联考 300 分奇迹》丛书的过程中,始终坚持了以下原则:

一、清华、北大、复旦三校联手,优化结合南北优势

由于 MBA 考生均已工作多年,其中很多是在职复习,很难抽出足够时间来进行专门的备考。因此,复旦大学出版社在 1999 年开始精心组织了一批有经验的教师编写了这样一套针对性强、自学性好的复习丛书。经过市场的严格检验,出版五年来,《MBA 联考 300 分奇迹》丛书承蒙考生厚爱,一直畅销不衰,现已成为 MBA 联考辅导书的一流品牌。本套丛书之所以能成为 MBA 考生的首选教材,是因为丛书多年来坚持以品质为本,保持了结合南北名校优势的鲜明特色。清华、北大、复旦的管理学院是公认的我国最好的商学院,三校的 MBA 入学考试也居全国的最前列。参加本套丛书辅导教材编写的作者大多经过清华、北大等名校 MBA 联考辅导班的多年教学历练,各位专家们凭着以考生为中心的负责态度认真编写教材,并最后在复旦大学出版社精心的审校修改下出版,因此,这套丛书确实做到了南北优势的充分结合。

二、教授领衔、名师加盟,编写阵容黄金组合

一本好的考试辅导教材,总是要具备三个要素:一是看它是否着力去凸显为考生备考服务的宗旨;二是该书是否具有前瞻性,能否针对今后的考试;三是该书是否严格遵循最新大纲,难度与考试试卷相符或略微偏高。本套丛书的作者就是按这样的要求来编写的,

主要目的是通过讲解基本知识、答题技巧、学习方法和提供集中精练,使书中的一切能够为考生所掌握。参加这套辅导教材编写的作者既有学术造诣颇深的专家教授,也有丰富实战经验的辅导名师。他们大多连续参加北大、清华等名校的考前辅导工作,对考试大纲有深刻的理解和把握,具有相当丰富的教学经验,他们希望通过编写这套丛书能将自己的经验与更多的考生分享,使考生们受益。

三、紧扣最新大纲,推出 MBA 联考整体解决方案

丛书坚持做到了每年紧跟最新大纲,并及时根据大纲变化进行改版,在此基础上,从体例编排上经过了仔细的考究。各科作者没有依循其他参考书那种按照考试内容顺序从头排到尾的方式,而是大胆出新,将每个考试科目都分为“对策篇”、“精讲篇”、“精练篇”三大部分。在“对策篇”中,介绍了夺得联考高分的实用复习备考策略,以及对今后考试的预测;在“精讲篇”中,主要是对基本知识和基本技能的讲解,并随处可见对以往考题的剖析;在“精练篇”提出了精练的概念,作者们并不鼓励不切实际的“题海战术”,而是在统计分析以往的考题的基础上结合未来命题的趋势,精心编排设计了针对性强、与命题发展方向相吻合的模拟试题,供考生进行实战演练,以此作为考生检验自己复习成果并熟悉考试过程的有效工具。本套丛书的习题设计上突出了“适度偏难”,不只是为了让考生准备更充分,也是为了弥补目前各类复习指导教材与考试题目难度差距较大的不足。

由于丛书是本着“服务考生,精讲精练;全真模拟,适度偏难”这样一个指导思想来编写的,加上编者们的这近七年来 MBA 联考命题趋势和教学中总结出来的复习经验毫无保留地浓缩在书中,因此,丛书决不只是限于作为各院校考前辅导班的辅导资料,而同样适合作为各类应考人员的自学教材。通过对本套丛书的阅读与演练,编者们的衷心希望能对考生有较大的帮助,并祝愿各位考生在努力准备的基础上,有良好的发挥,顺利地考取名校 MBA。

由于 MBA 联考涉及的科目多,范围广,加上历年大纲变化频繁,尽管我们编者尽力做到万无一失,但疏漏之处总是难免,因此热诚欢迎专家、考生及各位读者对本套丛书批评并提出宝贵意见,以供我们再版时参考,使本套丛书的编写质量得到不断的改进和提高。

EMAIL:qjmba@yahoo.com.cn

《MBA 联考 300 分奇迹》丛书编写专家小组

2004 年 2 月于复旦大学

目 录

对 策 篇

一、有的放矢——把握考试大纲	(1)
二、2005 年 MBA 联考数学复习备考策略	(3)
三、赢在最后——临场应试技巧	(4)

精 讲 篇

第一章 初等数学	(6)
§ 1 充分性判断题解题技巧	(6)
§ 2 初等数学基本概念	(15)
§ 3 整式运算与二项式定理	(37)
§ 4 方程与不等式	(52)
§ 5 数列	(75)
第二章 微积分	(97)
§ 1 函数	(97)
§ 2 极限与连续	(106)
§ 3 导数与微分	(122)
§ 4 微分学的应用	(138)
§ 5 不定积分	(151)
§ 6 定积分	(163)
§ 7 无穷积分	(178)
§ 8 多元函数微分学	(182)
第三章 线性代数	(210)
§ 1 线性代数中最基本的概念	(210)
§ 2 行列式	(215)
§ 3 矩阵	(223)
§ 4 向量组的线性关系	(245)
§ 5 线性方程组	(258)
§ 6 n 阶矩阵的特征向量和特征值	(275)

§ 7 小结	(283)
第四章 概率论	(288)
§ 1 随机试验、随机事件及事件的运算	(288)
§ 2 随机事件的概率	(292)
§ 3 加法公式	(296)
§ 4 条件概率与乘法公式,全概公式与贝叶斯公式	(301)
§ 5 事件的独立关系,独立试验序列	(311)
§ 6 初等概率论小结	(318)
§ 7 随机变量及其分布	(322)
§ 8 随机变量的数字特征	(344)

精 练 篇

全真模拟试题(一)	(357)
全真模拟试题(二)	(361)
全真模拟试题(三)	(365)
全真模拟试题(一)解答	(369)
全真模拟试题(二)解答	(376)
全真模拟试题(三)解答	(383)

对 策 篇

根据历年 MBA 联考的经验来看,考生公认数学对联考的成功起着至关重要的作用.因此,作为考生,不管原有的数学基础如何好,都要对数学科目的复习引起足够的重视.下面就数学的备考谈谈详细的复习技巧.

一、有的放矢——把握考试大纲

考试大纲是全国 MBA 指导委员会为考生划定的指定考试范围,也就是考生的复习范围,考生从备考一开始,就要全面了解大纲,全面复习大纲所要求的内容,这是应试备考的基石.虽然 2005 年考试大纲尚未正式颁布,但由于 MBA 数学内容的范围相对稳定,考生的第一轮复习可参考本年度的大纲,系统地了解数学所覆盖的基本概念、理论和范围,从而有的放矢地进行有效的复习备考.下面列出 2004 年 MBA 联考数学考试大纲的内容:

·考试性质

工商管理硕士生入学考试是全国统一的选拔性考试,其目的是为了科学、公平、准确、规范地测试考生的逻辑思维能力、汉语和英语的阅读、表达及运用能力、数学基础知识和基本运算能力、管理学基础知识以及分析和解决实际管理问题的能力.考试科目包括综合能力(数学、语文与逻辑)、英语、管理,在教育部授权的工商管理硕士生培养院校范围内进行联考.本考试大纲的制定力求反映工商管理硕士专业学位的特点,注重测评考生的综合能力和基本素质,以利于有实践经验的中青年优秀管理人员入学,为国家经济建设选拔和培养高素质管理人才.

·考试要求

要求考生掌握学习 MBA 课程必备的数学基础知识,并能综合运用所学知识分析和解决经济、管理的有关问题.要求考生具有较强的快速阅读、理解现代汉语文字材料,准确把握其主要观点与论述结构的能力.要求考生具有较强的逻辑推理能力、综合归纳能力、分析论证能力和写作能力.

·考试内容与题型

综合能力考试由条件充分性判断、问题求解,逻辑推理和写作四部分组成.旨在综合

测试考生的数学基础知识及运用能力、逻辑推理能力、综合归纳能力、分析论证能力和写作能力.

(一) 条件充分性判断题

条件充分性判断题的测试的形式为单项选择,要求考生在给定的 5 个选择项中,选择一个作为答案.

(二) 问题求解题

问题求解题的测试形式为单项选择,要求考生在给定的 5 个选择项中,选择 1 个作为答案.

在条件充分性判断和问题求解这两部分试题中,可能涉及的数学知识要点如下:

1. 初等数学

绝对值,比和比例,算术平均值和几何平均值,一元一次方程和一元二次方程,一元一次不等式和一元二次不等式,二项式定理,等差数列和等比数列.

2. 微积分

(1) 一元函数微分学

导数的概念,变化率与切线斜率,曲线的切线方程,函数的可导性与连续性的关系,基本初等函数的导数公式(不含三角函数和反三角函数),导数的四则运算,复合函数、反函数和隐函数的导数,二阶导数的概念及计算,微分的概念和运算法则.

函数的单调性及其判定,极值概念及其判定,函数图像的凹凸性及其判定,拐点及其判定,函数的最大值和最小值及其应用.

(2) 一元函数积分学

定积分的概念和基本性质,变上限定积分,牛顿——莱布尼兹公式,定积分的换元积分法和分部积分法,用定积分计算平面图形的面积.

无穷区间广义积分的概念和计算.

(3) 多元函数的微分学

多元函数的偏导数的概念及计算,多元复合函数的偏导数,隐函数的偏导数,二阶偏导数,全微分的概念和计算,求二元函数的极值(包括必要条件和充分条件),条件极值的拉格朗日乘数法(不讨论充分条件).

3. 线性代数

矩阵的概念、矩阵的加法、数乘和乘法的计算及性质,矩阵的转置及性质,逆矩阵的概念、性质及计算.

向量的概念,向量组的线性相关性和线性无关性的概念及其判断,向量组的最大线性

无关组和秩的概念及求法,矩阵的秩的概念及求法.

齐次线性方程组的基础解系及求解,非齐次线性方程组解的结构及求解.

矩阵的特征值和特征向量的概念和计算.

4. 概率论

随机事件,事件的关系和运算,概率及其性质,条件概率及独立性,全概率公式与贝叶斯公式.

随机变量的概念,离散型随机变量的概率函数,连续型随机变量的概率密度,随机变量的分布函数,随机变量的数学期望、方差和标准差,数学期望、方差的性质,0-1分布,二项分布,泊松分布,均匀分布,指数分布,正态分布.

二、2005 年 MBA 联考数学复习备考策略

鉴于数学科目的特殊性,考生在复习备考过程中应注意以下几点:

1. 自从 MBA 实行联考以来,数学大纲就一直在变,但不管怎么变,它还是存在着一个变化的趋势,那就是 MBA 联考不同于普通的研究生入学考试,它不要求考生有全面系统的数学理论知识,而是选择考生将来学习 MBA 课程所必需的数学知识和能力加以考察,其根本目的是确保考生入学后在学习需要运用一定数学工具的经济管理课程时,有足够的数学基础和能力.因此,MBA 联考数学主要考察的是基础知识和基本运算能力,其主要考察目的是要求考生掌握学习 MBA 课程必备的数学基础知识,并能综合运用所学知识分析和解决经济、管理的有关问题.

2. 考生在平时复习备考过程中,要把主要精力放在“双基”训练上,MBA 联考不同于普通研究生考试,复习过程中不应求难、求偏、求怪,而应注重基本概念和基本知识的掌握,基本训练要反复进行,在此基础上,培养灵活运用数学工具解决实际问题的能力.

3. 由于 MBA 入学考试考察的重点是在对知识的综合运用以及解决实际问题的能力,因此,在近年联考中,具体表现在题目很活,解题技巧和感觉只有在反复练习中才会真正掌握并巩固.可见,要取得好的复习效果,在辅导班上光听老师讲课是不够的,一定要花必要的时间来进行解题训练,在透彻了解概念的基础上多做参考书上的习题.

4. MBA 数学要拿高分,绝没有什么“速成”的捷径,高分的秘诀就是精练,即反复做一些典型的题,做到“熟能生巧”,形成题感.也就是说,复习时没有其他捷径可走,就是要进行有效的解题训练:首先,在解题训练过程中,每做完一次题,就要与答案对照,做错的重做,直到做对为止,实在做不出的也要请教别人,直到会做;其次,不仅做题,还要想题,并归纳总结这种题型的解题思路,看看自己哪些地方掌握得好哪些地方掌握得不好,掌握得

不好的地方随时弥补;最后,要有意识通过强化训练来提高自己的解题速度,以便形成条件反射,遇到类似题型很快形成思路,争取时间。

5. 加强考前强化训练,通过实战模拟来加强应试能力。做模拟试题时要按照考试的要求,合理分配答卷时间,只有平时养成良好的习惯,考试的时候才能做到心中有数,不至于张皇失措。许多考生往往看得多,练得少。有些考生在考后抱怨题太多,做不完或做错,其原因就是平时缺少练笔的机会以及考前没有进行强化训练。所以建议考生在限定时间里系统做几套模拟试题,然后对照答案自己分析总结。

三、赢在最后——临场应试技巧

从历年经验看数学是考试中最紧张的一科,由于时间所限,对考生的解题速度要求很高,考生切不可等闲视之。

1. 保持良好的考试心态。首先要以一颗平常心走入考场,临场考试,要不背包袱,轻装上阵。对大部分考生来说,由于从学校毕业后参加工作多年,而没有再参加过大的考试,因此一般来说,再次面对 MBA 联考这样大的考试心里或多或少还是有一定的压力的,这也是正常的。建议可用心理自我暗示的办法减轻自己的心理压力,比如在开考前可以做做深呼吸,并暗示自己要充满信心,头脑清醒,思维活跃,从而给自己以良好的心里暗示和放松。不要寄希望于超常发挥,只要以平常心进入考场,能正常发挥就是对自己的最好交代,要相信自己的实力,只要平时有付出,考试中就会得到回报。

2. 调整到最佳的解题状态。我们认为平和加上适度的紧张是最佳的解题状态,一方面不要太紧张,以致于影响考场的发挥;另一方面要适度的紧张是必要的,有利于解题的高效率。

3. 由于考试时间比较紧,做题时要力求一遍做对,不要寄希望于有回头复查的机会。这要在平时训练时就注意,养成只做一遍的习惯,不要过多地反复推敲,不要把一个题目的选择答案改来改去。

4. 由于选择题的解答有很多方法,一定要多回想平时训练时所用的解题技巧,有的考生一到考场就紧张,一紧张就忘了这些解题技巧,而用常规的方法去硬算,这样既浪费时间又不容易选出答案。其实选择题的解题捷径就是以最快的速度找出答案,而不管你用什么方法都可以,如图示法、赋值法、推演法、举反例排除法、逆推法等都是非常有效的方法,在考场上你可以尽可能地使用。

5. 遇到了难题怎么办?千万不要影响情绪,因为你难别人也难,一时做不出来,也不要浪费时间太多,建议对这道题先放过去,但要作个标记,等做完后面的再回头收拾。

6. 临场考试还应注意以下细节:要掌握考试的整个时间分配;要注意审题,仔细阅读题目要求,不要错答误答;要留充分的时间往答题卡上填答案;不管前面考得如何,都不要影响后面的科目,坚持就是胜利,一定要坚持到最后.

第一章 初 等 数 学

§ 1 充分性判断题解题技巧

【充分条件基本概念】

1. 定义 对两个命题 A 和 B 而言,若由命题 A 成立,肯定可以推出命题 B 也成立(即 $A \Rightarrow B$ 为真命题),则称命题 A 是命题 B 成立的充分条件.

2. 条件与结论 两个数学命题中,通常会有“条件”与“结论”之分,若由“条件命题”的成立,肯定可以推出“结论命题”也成立,则称“条件”充分.若由“条件命题”不一定能推出(或不能推出)“结论命题”成立,则称“条件”不充分.

例如:不等式 $x^2 - 5x - 6 < 0$ 能成立.

(1) $1 < x < 3$

(2) $x > 7$

(3) $x = 5$

(4) $x < 6$

(5) $-1 < x < 6$

此例中,题干“ $x^2 - 5x - 6 < 0$ 能成立”,这个命题是“结论”,下面分别给出了5个命题都是不同的“条件”.现在我们可以把它们按充分与否分为两类:条件(1)、(3)、(5)充分.条件(2)、(4)不充分.

3. 知识点评述 1. 充分条件的判断:从给定的条件出发去分析,在此条件下,结论是否一定成立,若是,则条件充分,若否,则条件不充分.我们在做充分性判断的试题时,不可从“结论”入手去求解!那样只能得出“条件”对“结论”的“必要性”,而与充分性判断相背离.如:在上例中,由结论命题: $x^2 - 5x - 6 < 0$ 能成立,可解得 $-1 < x < 6$.这只证明条件(5)是必要的.事实上,条件(5)是结论 $x^2 - 5x - 6 < 0$ 能成立的充分必要条件,才“歪打正着”被你找到了一个充分条件.

【充分性判断的标准化试题】

本书中,所有充分性判断题的A、B、C、D、E五个选项所规定的含义,均以下列呈述为准,即:

(A) 条件(1)充分,但条件(2)不充分;

(B) 条件(2)充分,但条件(1)不充分;

(C) 条件(1)和(2)单独都不充分,但条件(1)和(2)联合起来充分;

(D) 条件(1)充分,条件(2)也充分;

(E) 条件(1)和(2)单独都不充分,条件(1)和(2)联合起来也不充分.

上述5个选项,把条件(1)和(2)以及两条件联立起来(同时都满足即 $\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases}$)的充分性的所有情况都包括了,但其中“联合”不是数学名词,没有准确的定义,改为“联立”与原题意比较贴切.比如:不等式 $x(6x+5) < 4$ 成立.

$$(1) x > -1$$

$$(2) x < \frac{1}{3}$$

分析 由题干 $x(6x+5) < 4$

解上述不等式,得 $-\frac{4}{3} < x < \frac{1}{2}$

显然(1)、(2)单独都不满足

联立(1)和(2)得出 $-1 < x < \frac{1}{3}$,从而原不等式成立.因此,答案是C.

常用的求解方法有以下几种:

解法一 直接法(即由A推导B.)

若由A可推导出B,则A是B的充分条件;若由A推导出与B矛盾的结论,则A不是B的充分条件.解法一是解“条件充分性判断”型题的最基本的解法,应熟练掌握.

例1 要保持某种货币的币值不变.

(1) 贬值10%后又升值10%;

(2) 贬值20%后又升值25%.

分析 设该种货币原币值为a元($a \neq 0$).

由条件(1)经过一次贬值又一次升值后的币值为:

$$a(1-10\%) \cdot (1+10\%) = a \cdot 0.9 \cdot 1.1 = 0.99a.$$

显然与题干结论矛盾.

所以条件(1)不充分.

由条件(2)经过一次贬值又一次升值后的币值为:

$$a(1-20\%) \cdot (1+25\%) = a \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{4} = a.$$

即 题干中的结论成立,所以条件(2)充分,故应选择B.

例2 等差数列 $\{a_n\}$ 中可以确定

$$S_{100} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{100} = 250$$

$$(1) a_2 + a_3 + a_{98} + a_{99} = 10$$

$$(2) a_2 + a_5 + a_{97} + a_{98} = 10$$

解 据等差数列性质有

$$\text{由条件(1)} \quad a_1 + a_{100} = a_2 + a_{99} = a_3 + a_{98} = 2M$$

$$\therefore S_{100} = M \times 100 = \frac{10}{4} \times 100 = 250. \text{条件(1)充分.}$$

由条件(2) $a_2 + a_{98} = 2a_{50}$, $a_5 + a_{97} = 2a_{51}$

$$\therefore a_{50} + a_{51} = \frac{10}{2} = 5$$

又 $a_1 + a_{100} = a_{50} + a_{51} = 5$

$$\therefore S_{100} = \frac{(a_1 + a_{100})}{2} \times 100 = \frac{5}{2} \times 100 = 250$$

所以条件(2)也充分. 故应选择 D.

解法二 定性分析法(由题意分析, 得出正确的选择.)

当所给题目比较简单明了, 又无定量的结论时, 可以分析当条件成立时, 有无结论成立的可能性, 从而得出正确选择, 而无需推导和演算.

例 1 对于一项工程, 丙的工作效率比甲的工作效率高.

(1) 甲、乙两人合作, 需 10 天完成该项工程;

(2) 乙、丙两人合作, 需 7 天完成该项工程;

解 条件(1)中无甲与丙间的关系, 条件(2)中亦无甲与丙间的关系, 故条件(1)和(2)显然单独均不充分.

将两条件联合起来分析: 在完成相同工作量的前提下, 甲与乙合作所需时间比乙与丙合作所需时间多, 故甲的工作效率当然比丙的工作效率低, 题干结论成立, 所以条件(1)和(2)联合起来充分.

故应选择 C.

例 2 在一个宴会上, 每个客人都免费获得一份冰淇淋或一份水果沙拉, 但不能同时获得二者, 可以确定有多少客人能获得水果沙拉.

(1) 在该宴会上, 60% 的客人都获得了冰淇淋;

(2) 在该宴会上, 免费提供的冰淇淋和水果沙拉共 120 份.

解 由于条件(1)中不知客人总数, 所以无法确定获得水果沙拉的客人的人数. 而由于条件(2)中只给出客人总数, 所以仍无法确定获得水果沙拉的客人的人数, 故条件(1)和(2)单独显然均不充分.

由条件(2)知客人总数, 由条件(1)可知获得水果沙拉的客人占总客人数的百分比, 必可确定获水果沙拉的客人的人数, 所以条件(1)和(2)联合起来充分.

故应选择 C.

解法三 逆推法(由条件中变元的特殊值或条件的特殊情况入手, 推导出与题干矛盾的结论, 从而得出条件不充分的选择.)

注意 此种方法绝对不能用在条件具有充分性的肯定性的判断上.

例 1 要使不等式 $|1-x| + |1+x| > a$ 的解集为 R .

(1) $a > 3$

(2) $2 \leq a < 3$.

解 由条件(1) $a > 3$, 取 $a = 4$, 原式即 $|1-x| + |1+x| > 4$,

此不等式化为: $\begin{cases} x \geq 1, \\ 2x > 4, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} -1 \leq x < 1, \\ 2x > 4, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x < -1, \\ -2x > 4, \end{cases}$

所以 $x > 2$ 或 $x \in \emptyset$ 或 $x < -2$.

所以不等式的解为 $x < -2$ 或 $x > 2$, 与解集为 R 矛盾.

所以条件(1) 不充分.

由条件(2), $2 \leq a < 3$, 取 $a = 2$, 不等式化为 $|1 - x| + |1 + x| > 2$,

此不等式化为: $\begin{cases} x \geq 1, \\ 2x > 2, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} -1 \leq x < 1, \\ 2x > 2, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x < -1, \\ -2x > 2, \end{cases}$

所以 $x > 1$ 或 $x \in \emptyset$ 或 $x < -1$.

所以不等式的解为 $x < -1$ 或 $x > 1$ 与解集为 R 矛盾.

所以条件(2) 也不充分.

条件(1) 和(2) 联合, 得 $\begin{cases} a > 3, \\ 2 \leq a < 3, \end{cases}$

所以 $a \in \emptyset$, 显然条件(1) 和(2) 联合起来也不充分.

故应选择 E.

例 2 三个球中, 最大球的体积是另外两个球体积之和的 3 倍.

(1) 三个球的半径之比为 1:2:3;

(2) 大球半径是另两球半径之和.

解 由条件(1) 设三球半径分别为 $r, 2r, 3r$.

所以大球体积

$$V_{\text{大}} = \frac{4}{3}\pi(3r)^3 = 36\pi r^3.$$

两小球体积和

$$V_1 + V_2 = \frac{4}{3}\pi r^3 + \frac{4}{3}\pi(2r)^3 = \frac{36}{3}\pi r^3.$$

显然 $V_{\text{大}} = 3(V_1 + V_2)$ 成立.

所以条件(1) 充分.

由条件(2) 设两小球的半径分别为 $r_1 = 1, r_2 = 3$, 大球半径 $r = 4$. 所以

$$V_{\text{大}} = \frac{4}{3}\pi \cdot 4^3 = \frac{256}{3}\pi,$$

$$V_1 + V_2 = \frac{4}{3}\pi \cdot 1^3 + \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = \frac{112}{3}\pi.$$

显然 $V_{\text{大}} \neq 3(V_1 + V_2)$.

所以条件(2) 不充分.

故应选择 A.

注意 条件(1) 的充分性, 是用解法一判断的, 只有当条件不充分时, 才可用解法三, 如对条件(2) 不充分的判断.

解法四 一般分析法(寻找题干结论的充分必要条件.)

即: 要判断 A 是否是 B 的充分条件, 可找出 B 的充要条件 C , 再判断 A 是否是 C 的充分条件.

例 1 要使 $\left(x + \frac{a}{x^2}\right)^6$ 的展开式中的常数项为 60.

$$(1) a = 1; \quad (2) a = 2.$$

解 设 $\left(x + \frac{a}{x^2}\right)^6$ 展开式的常数项为 T_{r+1} , 因为

$$T_{r+1} = C_6^r x^{6-r} \left(\frac{a}{x^2}\right)^r = C_6^r a^r x^{6-3r}.$$

所以 $6 - 3r = 0, r = 2$.

因为 $C_6^2 a^2 = 60$,

所以 $15a^2 = 60, a = \pm 2$.

所以题干中结论的充要条件是 $a = \pm 2$.

所以条件(1) $a = 1$ 不充分; 条件(2) $a = 2$ 充分.

故应选择 B.

此题用解法一需要将 $a = 1$ 和 $a = 2$ 代入, 推算两次, 而用此种方法只推算一次得出 $a = \pm 2$ 即可.

例 2 要使关于 x 的一元方程 $x^4 - 2x^2 + k = 0$ 有四个相异的实根.

$$(1) 0 < k < \frac{1}{2}; \quad (2) 1 < k < 2.$$

解 方程 $x^4 - 2x^2 + k = 0$ 有四个相异的实根, 设 $t = x^2, t \geq 0$, 则方程 $t^2 - 2t + k = 0$ 应有两个不等正实根 $t_1 > 0, t_2 > 0$, 所以

$$t_1 + t_2 = 2 > 0, \quad \begin{cases} \Delta > 0, \\ t_1 t_2 > 0, \end{cases}$$

$$\text{即} \quad \begin{cases} 4 - 4k > 0, \\ k > 0, \end{cases}$$

$$\text{所以} \quad \begin{cases} k < 1, \\ k > 0, \end{cases} \quad 0 < k < 1.$$

所以题干中结论的充要条件是 $0 < k < 1$,

所以条件(1) 充分,

条件(2) 不充分.

故应选择 A.

一道条件充分性判断试题有时可以用多种方法求解, 如上面的例 2 也可求解如下:

又解 设 $t = x^2, t > 0$, 所以原方程化为:

$$t^2 - 2t + k = 0. \quad (*)$$

原方程有四个相异实根, 即(*) 有两个不等正实根. 因为

$$\Delta = 4 - 4k = 4(1 - k).$$

由条件(1) $k < \frac{1}{2}$, 所以 $\Delta > 0$, 又因为两根之和为 2, 两根之积为 k , 由条件(1) $k > 0$, 所以这两根一定是不等正实根. 题干结论成立, 所以条件(1) 充分.

由条件(2) $1 < k < 2$, 取 $k = \frac{3}{2}$, 则(*) 化为

$$t^2 - 2t + \frac{3}{2} = 0,$$