XIANXINGDAISHU XUEXI ZHIDAOSHU

线性代数学习指导书

主　编　林桂莲　范英梅
副主编　曾凡辉　席洁珍　陈　海

$$|A| = \begin{vmatrix} x & xy & 0 & 0 \\ 1 & x+y & xy & 0 \\ 0 & 1 & x+y & xy \\ 0 & 0 & 1 & x+y \end{vmatrix}$$

广西科学技术出版社

线性代数学习指导书

主　编 林桂莲 范英梅
副主编 曾凡辉 席洁珍 陈　海

XIANXINGDAISHU
XUEXI
ZHIDAOSHU

广西科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数学习指导书/林桂莲,范英梅主编.—南宁:广西科学技术出版社,2008.2

ISBN 978-7-80666-821-4

Ⅰ.线… Ⅱ.①林…②范… Ⅲ.线性代数—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第019847号

线性代数学习指导书

主　编　林桂莲　范英梅

副主编　曾凡辉　席洁珍　陈　海

*

广西科学技术出版社出版

(南宁市东葛路66号　邮政编码530022)

广西新华书店发行

广西地质印刷厂印刷

(南宁市建政东路88号　邮政编码530023)

*

开本787mm×1092mm　1/16　印张11.25　字数253 000

2008年2月第1版　2008年2月第1次印刷

印数:1—7 000册

ISBN 978-7-80666-821-4/G·428　定价:22.80元

序

数学的空前广泛应用是20世纪数学的一个很重要的发展趋势。作为代数学中主要处理线性关系问题的一个分支,线性代数的理论与方法在自然科学和工程技术的诸多领域,在经济定量分析以及在统计分析中,有着广泛的应用。

在我国的高等教育中,线性代数是继高等数学之后的一门公共基础课,它不仅对于理工科,而且对于农、林、经、管等类专业也是一门重要的数学基础课程。这门课程不仅是学习后续课程的基础,也是在各个学科领域进行理论研究和实践工作的必要基础,同时也是训练学生逻辑思维和培养严谨学风的重要环节,其地位和重要性不言而喻。要学好这门课程,除了依靠教师做好课堂讲授的环节之外,更重要的是需要学生通过自己的思考来消化所学的内容,通过实践来掌握分析问题、解决问题的方法和技巧。因此除了课本外,适当地阅读一些课外辅助读物是必要的。

这本书的作者们都是从事线性代数教学工作多年,具有丰富的教学经验的骨干教师。他们编写的这本书是他们教学经验的总结。书的每一章开头,都提出了学习本章的基本要求,接着对本章的教学内容做出简明扼要、提纲挈领式的总结,然后结合各种典型的题型及其解题方法进行具体的详尽的分析。为开阔视野,这本书还精选部分历年考研真题,进行评析,这对基本概念的融会贯通,多知识点相关连时的处理等得到提升,拓宽解题的思路。习题是数学著作的重要组成部分,学习数学如果不做习题,就等于入宝山而空返。书中按填空、选择、判断、计算、证明等不同类型精选了大量的练习题供读者练习。这样的编排方式能够方便读者在学习时明确要求,梳理知识,辨析疑难,掌握技巧,开展训练。所以我认为这本书是高等学校各学科大学生学习线性代数课程的一本好的辅助性读物,相信认真阅读本书的同学们通过学习和训练一定能够获得巨大的收益,对参加硕士研究生入学考试的精英们会有很大的帮助。

2008年1月

前 言

《线性代数》是高等学校理科、工科、农、林、经、管类各专业中的一门重要基础课。要学好线性代数,除了认真阅读教材、重视课堂学习、勤思考、多总结之外,还需要做一定量的习题。通过独立思考和反复练习,加深对基本概念、基本理论的理解和对基本方法的掌握。但由于线性代数概念较多,有一定的抽象性,且有一套独特的理论体系和处理问题的规律与方法,初学者往往感到概念和理论不易理解,抓不住重点,听懂课似乎较容易,但做题感到困难。针对学习线性代数中的这些问题和困难,我们编写这本学习指导书。

本书根据线性代数教学大纲的要求,以强化基本知识和基本理论理解,加强解题方法指导和解题训练、突出应用能力培养为指导思想,针对初学者对线性代数的一些基本概念和基本理论理解不够透彻,对解题方法难以掌握等问题,重点对课程的主要概念和定理、重点和难点进行诠释、归纳总结,较全面归纳本课程所涉及的题型,并逐一进行分析和给出了解题方法及技巧的指导。按照常见题型,从大量文献资料和历年考研真题中精选出部分有代表性的习题作为练习题,供读者学习和训练之用。

本书共六章,林桂莲编写第四章、第五章、第六章,范英梅编写第二章、第三章,曾凡辉编写第一章,席洁珍、陈海参加各章习题编写工作。林桂莲负责全书的修改和统稿工作。在本书编写过程中,我们得到了广西大学数学与信息科学学院的领导,高等数学系、工程数学系老师的大力支持和帮助。此外,还得到了广西大学教改项目的大力支持。在此,谨向有关领导和老师表示衷心的感谢!

限于编者的水平,本书难免有疏漏、缺点,恳请专家、同行和广大读者批评指正,以便今后进一步改进、完善。

编 者

2008 年 1 月

目 录

第一章　行列式

一、基本要求

1. 理解 n 阶行列式的定义,掌握行列式的性质.
2. 熟练掌握二阶、三阶行列式的计算.
3. 会应用行列式的性质和行列式按行(列)展开定理计算简单的 n 阶行列式.
4. 了解克莱姆(Cramer)法则的条件、结论.

重点与难点:n 阶行列式的概念　n 阶行列式的计算

二、内容提要

1. 行列式的定义

"递归"定义法(常用)

一阶行列式　$D_1 = |a_{11}| = a_{11}$

二阶行列式　$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

三阶行列式　$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

n 阶行列式　$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \quad (i = 1,2,\cdots,n)$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \quad (j = 1,2,\cdots,n)$$

其中 $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的代数余子式,M_{ij} 为元素 a_{ij} 的余子式.

“递归”定义法实质为降阶，无论 D_n 为多少阶，由递归的规律总可以求出 D_n 的值，注意 D_n 的总项数及总的运算量.

“逆序”定义法

(1) n 级排列　由 n 个自然数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序组 $(i_1 i_2\cdots i_n)$ 称为一个 n 级排列；

(2) 逆序　在一个排列中，若大数排在小数前面，则称这两个数构成一个逆序（或反序）；

(3) 逆序数　一个排列中所有逆序的总数，称为此排列的逆序数，记为 $\tau(i_1 i_2\cdots i_n)$. 若逆序数为奇（偶）数，则称此排列为奇（偶）排列.

如 $\tau(12345)=0$ ……………………………………… 数由小到大排列，称为顺序排列

$\tau(53214)=0+1+2+3+1=3+2+1+1+0=7$ ……………………………… 奇排列

$\tau(53124)=0+1+2+2+1=2+2+1+1=6$ ……………………………… 偶排列

(4) 对换　在排列中对调两个数的位置，称为一次对换.

结论 1　对换改变排列的奇偶性，且任一排列可经若干次对换化为顺序排列.

结论 2　n 个自然数 $1,2,\cdots,n$ 可以构成 $n!$ 个不同的 n 级排列，所有 n 级排列中奇、偶排列的个数各占 $\frac{1}{2}n!$ 个.

(5) n 阶行列式的逆序定义

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1 j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

注：① D_n 为一个数值，其值为 $n!$ 项的代数和；

② 每一项由 D_n 中不同行不同列的 n 个元素的乘积组成；

③ 各项的符号由组成该项的 n 个元素的列下标的 n 级排列 $j_1 j_2\cdots j_n$ 的奇偶性确定.

2. 行列式的性质

性质 1　将 D_n 转置后，其值不变，即 $D_n=D_n^{\mathrm{T}}$.

性质 2　交换 D_n 的两行（列），D_n 的值改变符号.

性质 3　若 D_n 的某行（列）全为零，则 $D_n=0$.

性质 4　若 D_n 中有两行（列）对应元素相同，则 $D_n=0$.

性质 5　若 D_n 中有两行（列）对应元素成比例，则 $D_n=0$.

性质 6　行列式某行（列）的公因子可以提到行列式符号外面.

[即一个数乘 D_n 等于用此数乘以 D_n 的某行（列）]

性质 7　若 D_n 某行（列）的元素都可表示为两数之和，则 D_n 等于相应的两个行列式之和. 这两个行列式相应的行（列）的元素分别为两个数之一，其余行（列）的元素与原行列式相同.

性质8　将 D_n 某行(列)元素的 k 倍加到另一行(列),则 D_n 的值不变.

3. 特殊行列式的值及重要公式

(1) 对角形及上(下)三角形行列式等于其主对角线上元素的乘积,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

对角形　　　上三角形　　　下三角形

(2) 次对角形及次上(下)三角形行列式等于其次对角线上元素的乘积并加符号,即

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

次对角形　　　次上三角形　　　次下三角形

(3) $$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} D_n & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$$

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = \begin{cases} D_n & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$$

(4) 分块三角形行列式化为低阶行列式的乘积,即

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|;$$

$\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$,其中 m,n 分别为行列式 $|\boldsymbol{A}|$,行列式 $|\boldsymbol{B}|$ 的阶数.

(5) 范得蒙行列式 $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j - a_i).$$

三、典型例题分析

（一）行列式的计算

行列式的计算方法多种多样，要求熟记行列式性质、常用计算公式，然后根据行列式的特点及元素的规律性，采用适当的方法计算. 这里列举几种常用的计算方法及解题技巧.

1. 定义法

解题思路 如果 D_n 中含有较多的零元素，由于行列式中的项有一个元素为零时，该项的值为零，由定义只要求出非零项即可. 定义法亦常用于理论推算及性质的证明.

例 1 求 $D_n=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}$.

分析：此行列式的特点为零元素很多，可用定义求解.

解法一：（递归法）

$$D_n=1\cdot(-1)^{1+n-1}\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^n(-1)^{1+n-2}\cdot 2\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 3 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}$$

$$=\cdots=(-1)^n(-1)^{n-1}\cdots(-1)^3\cdot 2\cdot 3\cdots(n-2)\begin{vmatrix} n-1 & 0 \\ 0 & n \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{(n+3)(n-2)}{2}}n!$$

解法二：（逆序法）因为 D_n 中仅有 n 个元素不为 0，即仅有一项不为零，所以此项行标按自然顺序排列，得

$$D_n=(-1)^{\tau(n-1,n-2,\cdots,1,n)}1\cdot 2\cdots(n-1)\cdot n=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}n!$$

解法三：（按第 n 行展开，或用分块法更易）

$$D_n=n\cdot(-1)^{n+n}\begin{vmatrix}0&\cdots&2\\\cdots&\cdots&\cdots\\n-1&\cdots&0\end{vmatrix}=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}n!$$

例2　求 $D_n=\begin{vmatrix}x&y&0&\cdots&0&0\\0&x&y&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&x&y\\y&0&0&\cdots&0&x\end{vmatrix}$.

解法一：由定义知，D_n 中的非零项只有 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 和 $a_{12}a_{23}\cdots a_{n-1,n}a_{n1}$ 两项，

所以 $D_n=(-1)^{\tau(12\cdots n)}x\cdots x+(-1)^{\tau(23\cdots n1)}y\cdots y=x^n+(-1)^{n-1}y^n$.

解法二：按第一列展开

$$D_n=x\begin{vmatrix}x&y&0&\cdots&0&0\\0&x&y&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&x&y\\0&0&0&\cdots&0&x\end{vmatrix}+(-1)^{n+1}y\begin{vmatrix}y&0&0&\cdots&0&0\\x&y&0&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&0&0\\0&0&0&\cdots&y&0\\0&0&0&\cdots&x&y\end{vmatrix}$$

$=x^n+(-1)^{n+1}y^n$.

例3　设 $D_4=\begin{vmatrix}1&1&2&3\\1&2-x^2&2&3\\2&3&1&5\\2&3&1&9-x^2\end{vmatrix}$.

（1）求方程 $D_4=0$ 的根；（2）求 D_4 的表达式.

分析：此类题型一般解法为化简此行列式方程，使之转化为代数方程，进而求出方程的根. 但这种方法较繁琐，观察第二行与第四行，考虑用性质求解.

解：（1）因为当 $2-x^2=1$，即 $x=\pm1$ 时，D_4 中的第一、第二行对应元素相等，从而 $D_4=0$，这表明 D_4 有因子 $(x-1)(x+1)$.

又当 $9-x^2=5$，即 $x=\pm2$ 时，D_4 中的第三、第四行对应元素相等，从而 $D_4=0$，这表明 D_4 有因子 $(x-2)(x+2)$.

根据行列式的定义知，D_4 为一元4次多项式，因此方程 $D_4=0$ 的根为 $x=\pm1,x=\pm2$.

（2）**解法一**：令 $f(x)=D_4$，因为 $f(\pm1)=f(\pm2)=0$，

所以 D_4 的表达式 $f(x)$ 含有因式 $(x\pm1)$，$(x\pm2)$ 且 $f(x)$ 为4次多项式，

故 $f(x)=k(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$，其中 k 为待定系数.

又因为含 x^4 的项为 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ 及 $a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}$，

而$(-1)^{\tau(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=1\cdot(2-x^2)\cdot1\cdot(9-x^2)=x^4-11x^2+18$,

$(-1)^{\tau(3214)}a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}=(-1)^3\cdot2\cdot(2-x^2)\cdot2\cdot(9-x^2)=-4(2-x^2)(9-x^2)$,

故x^4的系数为：$k=1+(-4)=-3$，故$f(x)=-3(x^2-1)(x^2-4)$.

解法二：由$f(x)=k(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$取$x=0$,则右边$=4k$,左边为

$$D_4=\begin{vmatrix}1&1&2&3\\1&2&2&3\\2&3&1&5\\2&3&1&9\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-2r_1]{r_4-r_3,\ r_2-r_1}\begin{vmatrix}1&1&2&3\\0&1&0&0\\0&1&-3&-1\\0&0&0&4\end{vmatrix}=-12$$

即有$-12=4k$,$\Rightarrow k=-3$,故$f(x)=-3(x^2-1)(x^2-4)$.

注：上题在确定待定系数k时,由于$f(x)$对任意x都成立,因此取x为除±1和±2以外的其他数时,都可以用解法二确定待定系数k.

2. 三角形法

解题思路 利用行列式的性质,将行列式化为三角形行列式,从而立即得到结果.

3. 降阶法

解题思路 利用行列式的性质和按某行(列)展开定理计算行列式,一般总是用性质把某行(列)的元素化为尽可能多的零,然后再按此行(列)展开,将高阶行列式降为低阶行列式,简化计算过程.

例4 求$D_4=\begin{vmatrix}2&-5&1&2\\-3&7&-1&4\\5&-9&2&7\\4&-6&1&2\end{vmatrix}$.

解：$$D_4\xlongequal{c_1\leftrightarrow c_3}-\begin{vmatrix}1&-5&2&2\\-1&7&-3&4\\2&-9&5&7\\1&-6&4&2\end{vmatrix}\xlongequal[r_4-r_1]{r_2+r_1,\ r_3-2r_1}-\begin{vmatrix}1&-5&2&2\\0&2&-1&6\\0&1&1&3\\0&-1&2&0\end{vmatrix}\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{vmatrix}1&-5&2&2\\0&1&1&3\\0&2&-1&6\\0&-1&2&0\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4+r_2]{r_3-2r_2}\begin{vmatrix}1&-5&2&2\\0&1&1&3\\0&0&-3&0\\0&0&3&3\end{vmatrix}=-9.$$

注：在求解过程中,最好能用性质化$a_{11}=1$,且尽量不用分式运算.

例5 求$D_n=\begin{vmatrix}a&b&\cdots&b\\b&a&\cdots&b\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\b&b&b&a\end{vmatrix}$.

分析：该行列式的特点为每行(列)元素之和相等，可考虑将各列(行)元素加到第一列(行).

$$\text{解：} D_n \xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{c_1+c_i} \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a+(n-1)b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = [a+(n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ 1 & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,n]{r_i-r_1} [a+(n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix} = [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

例 6　(96103)*设 $D_4 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$，则 $D_4 =$ (　　).

(A) $a_1a_2a_3a_4 - b_1b_2b_3b_4$　　　(B) $a_1a_2a_3a_4 + b_1b_2b_3b_4$

(C) $(a_1a_2 - b_1b_2)(a_3a_4 - b_3b_4)$　　　(D) $(a_2a_3 - b_2b_3)(a_1a_4 - b_1b_4)$

分析：该行列式的特点为零元素较多，可使用降阶法或用定义计算. 由于是单选题，还可用特殊值排除法.

$$\text{解法一：} \because D_4 \xlongequal{\text{按第一行展开}} a_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & 0 \\ b_3 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & b_3 & a_3 \\ b_4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第三行展开}} a_1a_4(a_2a_3 - b_2b_3) - b_1b_4(a_2a_3 - b_2b_3)$$

$$= (a_2a_3 - b_2b_3)(a_1a_4 - b_1b_4),$$

故应填(D).

解法二：(特殊值排除法)　令 $b_4 = 0$，得 $D_4 = a_1a_4(a_2a_3 - b_2b_3)$，经比较，选项(A)、(B)、(C)都不对，故应填(D).

---

* 本书中题前括号内有5位数字为考研真题，如(96103)前2位数表年份，第3位数表类别，第5、第6位数表该题分值，(96103)即表1996年数学一的考题，满分为3分，而(973/406)则表1997年数学三、数学四的考题，满分为6分。

例 7 计算 $D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$ $(a_1a_2\cdots a_n\neq 0)$.

分析：对于形式为 $|\nwarrow|$，$|\nearrow|$，$|\swarrow|$，$|\searrow|$ 的行列式，称为箭形（或爪形）行列式，可以直接用行列式的性质化为三角形或次三角形行列式来计算.

$$\text{解：}D_{n+1}\xlongequal[i=1,2,\cdots,n]{c_1-\frac{1}{a_i}c_{i+1}}\begin{vmatrix} a_0-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & a_1 & & & \\ & & a_2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_n \end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}a_i\left(a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right).$$

例 8 求 $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 3 & 2 & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 & 2 \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

分析：该行列式的特点为相邻行（列）元素之差为 1，可考虑先化简，得出较多的零元素.

$$\text{解：}D_n\xlongequal[i=n,n-1,\cdots,2]{c_i-c_{i-1}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \\ n & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_i+r_1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ n+1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第}n\text{行展开}}(-1)^{n+1}(n+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 \end{vmatrix}=(-1)^{n+1}2^{n-2}(n+1).$$

4. 递推法

解题思路　从原始行列式出发，找到高阶行列式和一个或几个同型的低阶行列式之间的关系式，即递推关系，再根据此关系递推得出结果.

5. 数学归纳法

解题思路　对于包含整数 n 的式子，首先验证 n 取第一个值（$n=1$ 或 $n=2$）时公式成立，然后假定 $n=k$ 时公式成立，最后验证当 $n=k+1$ 时公式也成立.

例 9　证明：$D_n=\begin{vmatrix} a+b & ab & & & & \\ 1 & a+b & ab & & & \\ & 1 & a+b & ab & & \\ & & 1 & \cdots & \cdots & \\ & & & \cdots & \cdots & ab \\ & & & & 1 & a+b \end{vmatrix}=\begin{cases} \dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b} & a\neq b \\ (n+1)a^n & a=b \end{cases}.$

分析：该行列式的特点为带状形式 $|\backslash\backslash\backslash|$，$|///|$ 的行列式，称为三对角行列式，可以直接展开得两项递推关系式，故可考虑用递推法或数学归纳法证明.

证法一：（递推法）　$D_n\xlongequal{\text{按第一行展开}}(a+b)D_{n-1}-abD_{n-2}$

上式未知量含有三项太繁，设法转为二项，得出递推公式

$$D_n-aD_{n-1}=b(D_{n-1}-aD_{n-2})$$

所以 $D_n-aD_{n-1}=b(D_{n-1}-aD_{n-2})=\cdots=b^{n-2}(D_2-aD_1)$

而 $D_2-aD_1=\begin{vmatrix} a+b & ab \\ 1 & a+b \end{vmatrix}-a(a+b)=(a+b)^2-a^2-2ab=b^2$

所以　$D_n-aD_{n-1}=b^n$ ……………………………………………………………… (1)

对换 a 与 b 得　$D_n-bD_{n-1}=a^n$ ………………………………………………………… (2)

(1)和(2)联立，

当 $a\neq b$ 时，$D_n=\dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}=a^n+a^{n-1}b+\cdots+ab^{n-1}+b^n.$

当 $a=b$ 时，由(1)得，

$$D_n=b^n+bD_{n-1}=b^n+b[b^{n-1}+bD_{n-2}]=2b^n+b^2D_{n-2}$$

$$= \cdots = (n-2)b^n + b^{n-2}D_2 = (n-2)b^n + b^{n-2}[(a+b)^2 - ab]$$
$$= (n-2)b^n + b^{n-2} \times 3b^2 = (n+1)b^n = (n+1)a^n.$$

证法二：（数学归纳法） 显然，对 $n=1$ 结论正确.

又由于 $D_2 = \begin{vmatrix} a+b & ab \\ 1 & a+b \end{vmatrix} = (a+b)^2 - ab = \begin{cases} 3a^2 & a=b \\ \dfrac{a^3-b^3}{a-b} & a \neq b \end{cases}$，故对 $n=2$ 结论正确.

假设当 $n<k$ 时结论正确，则当 $n=k$ 时，把 D_k 按其第 k 列展开，有

$$D_k = (-1)^{2k-1}abD_{k-2} + (-1)^{2k}(a+b)D_{k-1} = (a+b)D_{k-1} - abD_{k-2}$$

当 $a=b$ 时，$D_k = 2a \cdot ka^{k-1} - a^2(k-1)a^{k-2} = (k+1)a^k$；

当 $a \neq b$ 时，$D_k = (a+b)\dfrac{a^k-b^k}{a-b} - ab\dfrac{a^{k-1}-b^{k-1}}{a-b}(a+b) = \dfrac{a^{k+1}-b^{k+1}}{a-b}$.

所以对任意正整数 n，结论正确.

6. 加边升阶法

解题思路 将原行列式增加一行一列，而保持原行列式的值不变或与原行列式的某种巧妙关系，且便于后面的计算.

例 10 求 $D_n = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$ $(b_1b_2\cdots b_n \neq 0)$.

分析：该行列式的特点为除对角线之外，各行元素为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，可考虑升为 $n+1$ 阶.

解：
$$D_n \xlongequal{\text{升阶}} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1+b_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_i - r_1} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{c_1 + \frac{c_i}{b_{i-1}}} \begin{vmatrix} 1+\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{a_i}{b_i} & a_1 & a_2 & & a_n \\ 0 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_n \end{vmatrix} = b_1b_2\cdots b_n\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{b_i}\right).$$