

1982年全国第一届
计算流体力学会议
论文选集

QUANGUODIYIJIE
JISUANLIUTILIXUEHUIYI
LUNWENXUANJI

中国力学学会
中国空气动力学研究会

1983. 3.

全国第一届计算流体力学会议论文选集

目 录

论振荡型对流.....	M. Mak 李崇银 (1)
有限单元法解三元自由表面孔口水流.....	丁道扬 (9)
跨音叶栅气动弹性稳定性的数值分析.....	林保真 唐智明 周盛 (19)
边界层分离数值解.....	卞荫贵 徐大鹏 (27)
超声速、高超声速粘性气体分离流动的显、隐式差分解法.....	
.....	张涵信 陆林生 余泽楚 马占奎 (35)
闸下自由出流的数值计算.....	陈耀松 彭岳林 (48)
一个边界差分格式及其在定常轴对称喷管流动计算中的应用.....	黄兰洁 (54)
用拟线性化算法和共轭算法解磁流体动力润滑问题.....	磁流体组 (62)
二元定常跨音速流有限差分计算中的初场问题.....	陈铁民 (67)
用隐-显法解超音速紊流流过凹角的分离流动.....	蒋大椿 (75)
机翼跨音速无粘绕流数值计算.....	姚福如 (83)
进气道跨音速轴对称流的计算.....	
.....	罗时钧、邢宗文、纪名、赵觉良、沈德刚、董松、韩爱清 (92)
大气中的旋转适应过程.....	袁望光、张道周、李荣凤 (98)
关于跨音速叶栅物面边界条件的数值试验..	张耀、沈孟育 (104)
用守恒型差分方法计算底部分离流场.....	董常铨 (110)
三维层流分离流动 Navier-Stokes 方程的数值解法.....	
.....	陆林生、马占奎、余泽楚、张涵信 (120)
N-S 方程数值计算：绕圆球的粘流运动.....	杜棟荣、陈国楠 (130)
涡量流函数二维空穴环流计算.....	任安禄、苏中地、黄荣国 (137)
跳点有限体积法及其在跨音速流场计算中的应用.....	刘松龄、吴超云 (143)
三维薄翼非对称绕流的跨音速积分方程及其有限元解法.....	束昉、杨岷生 (148)
同轴射流初始段湍流混合过程的数值分析.....	章光华、伍超 (157)
回转体垂直出水的一种非线性计算方法.....	王同庆 (167)
轴对称不可压层流粘性管流的数值计算.....	郭应均 (177)

带隔板的高速旋转圆筒内流场的数值研究.....	傅瑞峰、鹿大汉、时爱民 (185)
径流式叶轮机 S_2 流面半反命题、A型杂交命题变分原理族及对混流式的推广及其应用	蔡荣泉 (194)
ISOMS——计算粘性流场的一种隐式差分格式.....	杨明亮、邬华谟 (201)
超声速二维湍流分离流动的数值解法.....	余泽楚 陆林生 马占奎 张涵信 (208)
无限翼展后掠机翼的三元湍流边界层计算.....	朱自强、陈宴清、甘建成 (214)
入射激波与飞行器头部激波干扰流场的计算方法.....	李松波、张广文 (224)
计算叶轮机跨音流动的流线曲率法.....	王平治 (230)
用于二维不定常气体力学问题的一个拉格朗日差分格式及网格的重新划分	李文绚、王家浚、钱为义 (237)
渠道温差重流有限层带数值模拟.....	章本照 (246)

Selected Proceedings of the 1-st China National Computational Fluid Mechanics Conference

CONTENTS

On the Overstability Convection	Mankin Mak, Li Changyin	(1)
The Finite Element Method to Solve the Three-Dimensional Free Surface Flows through an Outlet.....	Ding Daoyang	(9)
Numerical Analysis of Aeroelastic Stability of Transonic Cascade.....	Lin Bao zhen, Tang Zhiming, Zhou Sheng	(19)
Numerical Solution of Boundary Layer Separated Flows	Pien Yingui, Xu Dapeng	(27)
A Mixed Explicit-Implicit Numerical Method of Navier-Stokes Equation for Supersonic and Hypersonic Separated Flows	Zhang Hanxin, Lu Linsheng, Yu Zechu, Ma Zhankui	(35)
Numerical Calculation for Determining the Free Streamline of the Outflow under a Sluice Gate.....	Chen Yaosong, Peng Yuelin	(48)
A Boundary Difference Scheme and its Application in the Calculation of Steady-State Axisymmetric Nozzle Flow	Huang Lanjie	(54)
The Solution of MHD Lubrication Problems with the Quasi-Linear Method and the Adjoint Method	MHD group	(62)
Some Questions Concerning the Initial Fields in Finite-Difference Computation of Two-Dimensional Steady Transonic Flows.....	Chen Tiejin	(67)
Solving the Supersonic Turbulent Separated Flow over a Compression Ramp with an Implicit-Explicit Method	Jiang Dachun	(75)
Numerical Calculation of Inviscid Transonic Flow over Wings	Yao Furu	(83)
Mixed Finite Difference Computation of Axisymmetric Transonic Inlet-Flowfield.....	Luo Shijun etc.	(92)
The Rotational Adaptation Process in the Atmosphere	Yuan Chongguang etc.	(98)
Numerical Tests on Body Boundary Conditions in Transonic Flow through Plane Cascades	Zhang Yaoke Shen Mengyu	(104)
Calculation of the 2-D Base Separated Flows with the Conservative Finite Difference Method	Dong Changquan	(110)
Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations for Three-Dimensional Laminar Separated Flows	Lu Linsheng etc.	(120)
Numerical Calculation of Navier-Stokes Equations, The Viscous Fluid Flow past a Sphere	Du Dirong Chen Guonan	(130)
Calculation of 2-Dimensional Recirculation Flow in a Cavity with Vorticity-Stream Function	Ren Anlu etc.	(137)
The Hopscotch Finite Volume Method and its Application to the Computation of Transonic Flow	Liu Songling Wu Chaoyun	(143)
The Transonic Integral Equations of Non-Symmetrical Flow about Three-Dimensional Thin Wings and Their Solutions of Finite Element Method.....	Shu Fang Yang Zuosheng	(148)
A Numerical Analysis of Turbulent Mixing in the Initial Section of Coaxial Jets	Zhang Guanghua Wu chao	(157)

A Non-Linear Method of Calculation of Vertical Water-Exit of Body of Revolution	Wang Tongqing	(167)
The Numerical Calculation of Axisymmetric Incompressible Laminar-Viscosity Flow in Ducts	Guo Yingjun	(177)
A Numerical Approach to the Study of the Flow Field in a Rotating Cylinder with Baffles	Fu Ruifeng, Lu Dahan, Shi Aimin	(185)
Families of Variation Principle for the Semi-Inverse Problem and the A-Type Hybrid Problem on the S_1 -Stream Sheet in Radial Turbomachines and the Extensions and Applications of the Semi-Inverse Problem to the Mixed-Type Turbomachines	Cai Rongquang	(194)
ISOMS-A Implicit Difference Scheme for Solving Complete Compressible Navier-Stokes Equations	Yang Mingliang, Wu Huamo	(201)
Numerical Solution for 2-D Turbulent Separated Flow at Supersonic Speed	Yu Zechu, Lu Linsen, Ma Zhankui, Zhang Hanxin	(208)
Calculation of Three-Dimensional Turbulent Boundary Layer on an Infinite Swept Wing	Zhu Zichang, Chen Yangqing, Kan Chiencheng	(214)
On the Numerical Solution of Head-on Vehicle Shock-Planar Incident Shock Interaction Flow	Li Songbo, Zhang Guangwen	(224)
A Method of Streamline Curvature for Calculating Transonic Velocities in Turbomachinery	Wang Pingqia	(230)
An Explicit Lagrangian Scheme for Solving Plane and Axisymmetric Aerodynamic Problems, and the Mesh Rezoning	Li Wenxuan, Wang Jiajun, Qian Weiye	(237)
Finite Layer Numerical Simulation for Thermal Density Flow in Channel	Zhang Benzhaoh	(246)

论振荡型对流

M. Mak

(美国伊利诺斯大学大气科学系)

李崇银

(中国科学院大气物理研究所)

振荡型对流亦称过稳定性对流(overstability convection), 它是一个底部加热的旋转流体薄层中的一种振荡型不稳定。本文用欧拉分析和拉格朗日分析相结合的方法, 从理论上研究了这种振荡型对流现象。结果表明, 无论在两个自由边界面还是在一个自由边界面和一个刚性边界面的情况下, 如果旋转速度适当大, 而粘性消耗相当小, 则可以出现振荡型对流。这种振荡型对流是热扩散本身的双重作用与强的旋转及小的粘性消耗共同作用的结果。热扩散一方面减小流体质点的浮力, 而另一方面它还可以交替地过冷却和过加热流体质点, 在 Prandtl 数比较小的情况下, 动能消耗很小, 从而在流体质点每次行程的终端都可产生一个过剩的加速度, 引起一种能导致不稳定的正反馈过程。

文中也讨论了刚性边界面附近粘性对这种振荡型对流的影响。刚性边界面不仅对振荡型对流有轻微的抑制作用, 而且对其结构有明显的影响。

过稳定性对流的概念可以解释在实验模拟中发现的、加热青藏高原模型上空周期性出现的对流涡旋。

一、模式和基本方程

取一个常用的热对流模式, 假定流体厚度为 d , 旋转速度为 Ω , 流体底部温度比顶部高 $\Delta\theta$ 。同时为了方便, 我们定义无因次变量如下

$$\left. \begin{aligned} (x, y, z) &= \frac{1}{d}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \\ t &= \frac{\nu}{d^2} \tilde{t} \\ (u, v, w) &= \frac{d}{\nu}(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}) \\ \theta &= \frac{\tilde{\theta}}{\Delta\theta} \\ p &= \frac{d^2}{\nu^2} \frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}_{00}} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

这里有“~”号者为有因次变量, $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})$ 是对应于笛卡尔坐标 $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ 的速度分量, $\tilde{p}$ 是气压, ν 是流体运动学粘性系数。在没有扰动的情况下, 温度仅是高度的线性函数, 而密度随温度线性变化, 即有

$$\tilde{\theta} = \tilde{\theta}_{00} - \frac{\Delta\theta}{d} \tilde{z} + \tilde{\theta}', \quad (2)$$

$$\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_{00}(1 - \varepsilon \tilde{\theta}') \quad (3)$$

其中 $\tilde{\theta}_{00}$ 和 $\tilde{\rho}_{00}$ 分别为参考温度和密度, ε 是膨胀系数。

研究比较薄的一层流体中的小扰动, 可以采用 Boussinesq 近似, 无因次形式的线性化方程组则可写成

$$u_t = -p_x + T^{1/2} v + \nabla^2 u \quad (4)$$

$$v_t = -p_y - T^{1/2} u + \nabla^2 v \quad (5)$$

$$w_t = -p_z + \frac{R}{P} \theta + \nabla^2 w \quad (6)$$

$$u_x + v_y + w_z = 0 \quad (7)$$

$$\theta_t = w + \frac{1}{P} \nabla^2 \theta \quad (8)$$

这里 $P = \frac{\nu}{\kappa}$ 是 Prandtl 数, $R = \frac{g \varepsilon \Delta\theta d^3}{\kappa \nu}$ 是 Rayleigh 数, $T = \frac{4\Omega^2 d^4}{\nu^2}$ 是

Taylor 数, 而 κ 是温度系数, ∇^2 是三维拉普拉斯算子。方程(4)–(6)是三个动量方程, (7)是连续方程, (8)是热力学方程。方程式中的脚标表示对该量的偏微商。由(4)–

(8) 我们可以得到涡度 $\left(\xi = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$ 方程

$$\xi_t = T^{1/2} w_x + \nabla^2 \xi \quad (9)$$

水平散度方程

$$\nabla^2 w_t = \frac{R}{P} \nabla_{(2)}^2 \theta - T^{1/2} \xi_t + \nabla^4 w \quad (10)$$

以及关于 w 的单一方程

$$\left[\left(\nabla^2 - P \frac{\partial}{\partial t} \right) \left\{ \nabla^2 \left(\nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 + T \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\} - R \nabla_{(2)}^2 \left(\nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t} \right) \right] w = 0 \quad (11)$$

其中 $\nabla_{(2)}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 为二维拉普拉斯算子。

考虑一个无界水平区域, 我们可以取基本波动解如下:

$$(w, \xi, \theta) = Re\{ (W(z), \eta(z), \theta(z)) e^{i(kx + ly + \gamma t)} \} \quad (12)$$

这样, 我们可以得到一个控制 W 的 8 阶方程

$$\left[\left(\frac{d^2}{dz^2} - a^2 - P\gamma \right) \left\{ T \frac{d^2}{dz^2} + \left(\frac{d^2}{dz^2} - a^2 \right) \left(\frac{d^2}{dz^2} - a^2 - \gamma \right)^2 \right\} + \right.$$

$$+ R a^2 \left(\frac{d^2}{dz^2} - a^2 - \gamma \right) W = 0 \quad (13)$$

这里 $a^2 = k^2 + l^2$ ，垂直范围是 $0 \leq z \leq 1$ 。

我们还需要确定在 $z=0, 1$ 处的边界条件，下面将分别针对两种情况进行讨论。

二、两个自由边界面情况的讨论

所谓自由边界面，即在这个面上切向应力为零，它要求 $u_z = v_z = 0$ ，这也就意味着 $\zeta_z = w_{,zz} = 0$ ；另外，在边界面上还应有运动学和热力学边界条件，即 $w = \theta = 0$ 。考虑到方程(8)和(10)，所有边界条件便可以单独用 W 来表示，即有

$$W = \frac{d^2 W}{dz^2} = \frac{d^4 W}{dz^4} = \frac{d^6 W}{dz^6} = 0, \quad \text{在 } z = 0, 1 \text{ 处} \quad (14)$$

这样，方程(13)和边界条件(14)唯一地给出了一个特征值——特征函数问题，其解可以简单写成：

$$W(z) = W_0 \sin[(2n-1)\pi z], \quad (n=1, 2, \dots) \quad (15)$$

我们可以只研究最低模，即取 $n=1$ 。将(15)代入(13)式，可以得到关于 γ 的特征方程

$$\gamma^3 + A_1 \gamma^2 + A_2 \gamma + A_3 = 0 \quad (16)$$

其中

$$A_1 = -\frac{(1+2P)}{P} (\pi^2 + a^2)$$

$$A_2 = \frac{1}{P} \left[(2+P) (\pi^2 + a^2)^2 + \frac{TP\pi^2}{\pi^2 + a^2} - \frac{R a^2}{\pi^2 + a^2} \right]$$

$$A_3 = \frac{1}{P} [(\pi^2 + a^2)^3 + T\pi^2 - R a^2]$$

由于特征值 $\gamma = \sigma + if$ 是复数，求解(16)我们即可得到增长率(或阻尼率) σ 和频率 f 同参数 R 、 T 、 P 和 a 的关系。

图1是在给定 $P(=0.025)$ 和 $a(=5.0)$ 情况下增长率 σ 随参数 R 和 T 的变化情况，其中阴影区表示振荡型不稳定的参数范围。很显然，(1) 只有当 R 足够大时，才可能出现不稳定，对于一个超过临界值的给定 R 值，只要 T 不是太大，不稳定的常定对流将总会发生。(2) 对于一定 R 值范围和一定的 T 值范围，将可以产生振荡型不稳定。(3) 不稳定增长率主要地依赖于由 R 所表示的加热强度，而转动则是一个稳定因素。计算还表明，当转动很

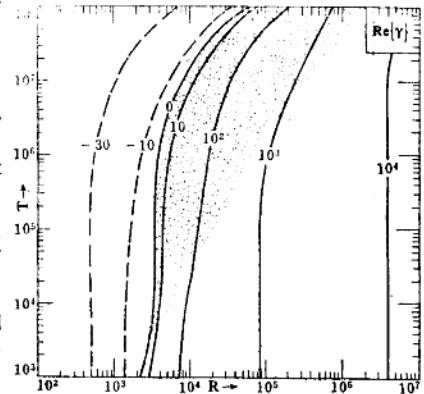


图1 两个自由边界面情况下，增长率 σ 随 R 和 T 的变化

慢时($T \rightarrow 0$)不仅没有振荡型不稳定波,而且也不出现振荡性稳定波。因此可以说振荡本质上具有惯性特征。由频率变化还可以看到(图略),这种振荡性不稳定波的振动周期基本上为转动周期的两倍到几倍。

为了找到不稳定振荡产生的更明确的物理本质,我们从拉格朗日观点对其进行了分析。对流泡的形状可以是矩形(包括环形),也可以呈六边形,我们考虑一种出现机会较多的矩形振荡性对流。其垂直速度的特征函数解可写成

$$w(x, y, z, t) = W_0 \cos kx \cos ly \sin \pi z \cos ft e^{\sigma t} \quad (17)$$

这个表达式是两个不稳定模($\gamma = \sigma \pm if$)的和。原点($x=0, y=0$)是对流泡的中心。根据 w 的表达式(17)我们可以求出 u 、 v 和 θ 的相应表达式。这些流体质点运动的欧拉表达式可以用来计算任何一个流体质点的轨迹,因 $\frac{dx}{dt} = u$, $\frac{dy}{dt} = v$, $\frac{dz}{dt} = w$ 。从一个

任意给定的初始位置求解 $x(t)$, $y(t)$ 和 $z(t)$,而在每一个时刻,流体质点的温度可以依据其位置计算出来。

图2a, b, c分别给出了有不同初始高度位置的三个流体质点的运动轨迹。三个流体质点有相同的初始水平位置,即 $x(0)=0.1$, $y(0)=0.0$,但有不同的初始高度位置,分别为低层 $z(0)=0.1$,中层 $z(0)=0.5$ 和高层 $z(0)=0.9$ 。图中描绘了流体质点轨迹的水平投影,在各次振荡中流体质点的极端高度也用数字标注在轨迹曲线旁边。因此不难看到流体质点在不停的旋转过程中还相伴有上升和下沉

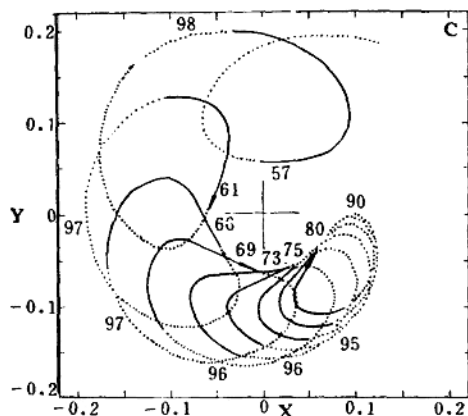
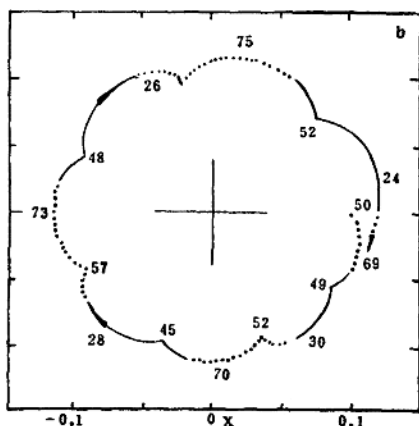
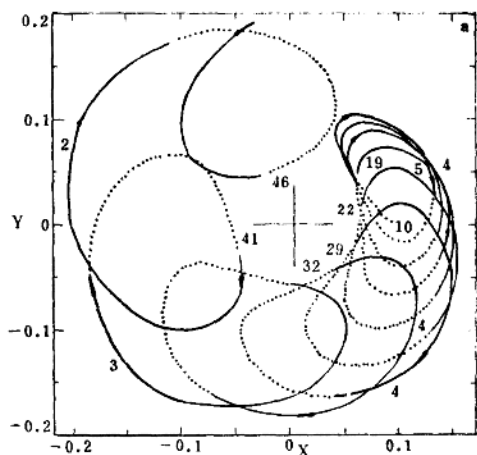


图2 两个自由边界面情况下,振荡型不稳定模中流体质点的水平投影轨迹。流体质点的初始高度分别为
(a) $z(0)=0.1$, (b) $z(0)=0.5$, (c) $z(0)=0.9$ ($T=10^6$, $R=5 \times 10^3$, $P=0.025$, $a=5.0$)

运动。图中实线轨迹表示负的温度偏差，而虚线轨迹表示正的温度偏差。很明显，垂直运动同温度有极好的相关，当其相对暖时流体质点上升，而当其相对冷时，流体质点下沉。为了更清楚起见，在图3中给出了在 $z(0)=0.1$ 的流体质点的垂直位置和温度随时间的详细变化。可以看到流体质点通过每一次回旋而不断地向更高层穿透，特别有意义的是流体质点的温度变化紧密地同其垂直位置联系着，在一次向下的行程之后流体质点的负浮力比前一次行程的正浮力更大，这使它能下沉到比前一次更低的位置。通过热交换，流体质点在向下的行程中将从周围环境得到更多的热量，

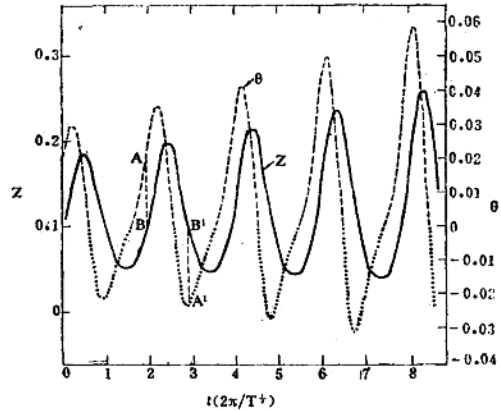


图3 图2a所示流体质点的垂直位置和温度的时间变化

从而在下一个回旋中可把自己推到更高的高度。因此可以说振荡型对流是热扩散本身的双重作用及强的旋转速度和小粘性消耗共同作用的结果。热扩散，一方面减小流体质点的浮力，而另一方面，它还可以交替地过冷却和过加热流体质点，但这种过程极大地依赖于足够大的旋转速度和足够小的粘性消耗。在科氏力作用下，快速转动将使流体质点作更长轨迹的运动，加上有较大温度系数存在，一个暖的流体质点在其路途中会被迅速冷却，一个冷的流体质点会被迅速变暖。如果 Prandtl 数比较小，动能消耗也就相当小，流体质点和周围环境间的这种巨大热交换可以交替地导致流体质点的过渡冷却和加热，从而在每次行程的终端都会产生一个过剩的加速度。显然，这是一种能导致不稳定的正反馈过程。

三、一个自由边界面和一个刚性边界面的情况

刚性边界面的动力学边界条件是切向风速必须为零。由于不稳定性振荡只有当 Taylor 数较大时才出现，因此流体水平粘性一定比科氏力小得多。假定在刚性面附近有一个厚度约为 $T^{-1/4}$ 量级的边界层，由于 Prandtl 数比较小，则在这个边界层中温度扰动也相当小，因此我们可以认为它基本上是个动力边界层而不是热力边界层。因为我们感兴趣的不稳定模的时间尺度要比转动周期大，用 Ekman 层来近似表示这个边界层可能是合理的。

在 Ekman 边界层，粘性力、科氏力和气压梯度力处于一种准平衡状态。在无因次变量下，Ekman 层的解可写成

$$\left. \begin{aligned} u_B &= u_I(1 - e^{-qz}) - v_I e^{-qz} \sin qz \\ v_B &= v_I(1 - e^{-qz}) + u_I e^{-qz} \sin qz \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

这里脚标 B 和 I 分别表示边界层量和流体内部量。由于 Ekman 层的抽吸作用，在

Ekman 层顶有垂直速度

$$w_{\infty} = -\frac{1}{2q} \xi_{\infty} \quad (19)$$

略去(4)和(5)式中 $\nabla^2 u$ 和 $\nabla^2 v$ 项, 我们可以得到热力学、涡度和散度方程如下

$$\left(\nabla^2 - P \frac{\partial}{\partial t} \right) \theta = -Pw \quad (20)$$

$$\xi_t = T^{1/2} w_x \quad (21)$$

$$\nabla^2 \left(\nabla_{(2)}^2 - \frac{\partial}{\partial t} \right) w - T^{1/2} \xi_x = -\frac{R}{P} \nabla_{(2)}^2 \theta \quad (22)$$

由此可以推出对于 w 的单一方程

$$\left[\left(\nabla^2 - P \frac{\partial}{\partial t} \right) \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \left(\nabla_{(2)}^2 - \frac{\partial}{\partial t} \right) - T \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\} - R \nabla_{(2)}^2 \frac{\partial}{\partial t} \right] w = 0 \quad (23)$$

方程(20)、(21)、(22)和(23)对应着(8)、(9)、(10)和(11), 因此亦可取形如(12)的波动解, 由(23)则可得

$$\left(C_1 \frac{d^4}{dz^4} - C_2 \frac{d^2}{dz^2} + C_3 \right) W = 0 \quad (24)$$

其中

$$C_1 = \gamma(a^2 + \gamma) + T$$

$$C_2 = a^2 \gamma(a^2 + \gamma) + (a^2 + P\gamma)[\gamma(a^2 + \gamma) + T]$$

$$C_3 = a^2 \gamma(a^2 + \gamma)(a^2 + P\gamma) - R a^2 \gamma$$

四个边界条件为

$$\frac{dW}{dz} - \frac{\sqrt{2}\gamma}{T^{1/4}} W = 0 \quad \text{在 } z=0 \quad (25)$$

$$\frac{d^2 W}{dz^2} - \frac{a^2 \gamma(a^2 + \gamma)}{\gamma(a^2 + \gamma) + T} W = 0 \quad \text{在 } z=0 \quad (26)$$

$$W = 0 \quad \text{在 } z=1 \quad (27)$$

$$\frac{d^2 W}{dz^2} = 0 \quad \text{在 } z=1 \quad (28)$$

这样, 可以对(24)进行求解, 计算结果表明, 特征值 γ 同两个自由边界面的情况基本一致, 只是 σ 值略小于两个自由边界面的相应值, 说明刚性边界面对过稳定性对流有一种轻微的抑制作用。

由(24)我们还可以求得特征函数 W , 进而可以求得过稳定性对流泡的欧拉结构特征。图4给出了对流泡中心($x=y=0$)处垂直速度随 z 和 t 变化的情形, 图中点线表示最大垂直速度所在高度随时间的变化。可以看到, 在每次交替时, 最大垂直速度的高度位置都下降到 Ekman 层顶, 而且边界层顶垂直速度的变化落后于内层约 $1/4$ 振荡周期, 边界层顶最大垂直速度约为中层的 $1/6$ 。这些都充分表明刚性边界面附近粘性对振

荡型对流的影响。

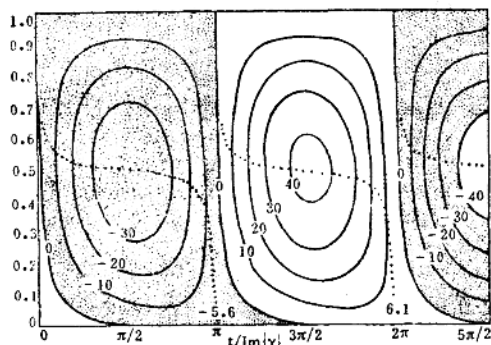


图 4 在一个自由边界面和一个刚性边界面情况下,对流泡中心垂直速度随高度和时间的变化

同图2 a, b, c 相对应, 图 5a, b, c 中给出了三个不同垂直位置的三个流体质点的轨迹。图 5c 表明, 在顶部的自由边界面附近, 流体质点的轨迹基本上类似于图 2c 的结果。然而在底部刚性边界面附近, 流体质点的轨迹(图5a)却与图 2a 有重大差别, 流体质点并不围绕对流泡中心进移, 却逐渐地朝着下边界漂移, 直到它侵入到边界层。这种奇特的运动现象正是 Ekman 边界层的影响。

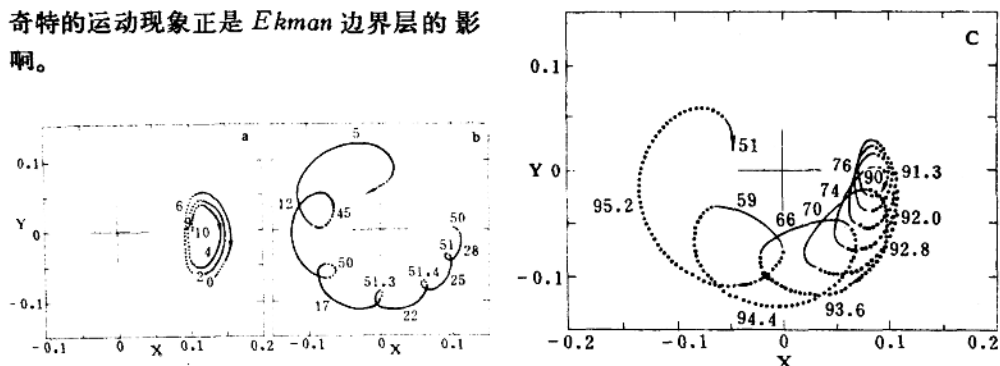


图 5 一个自由边界面和一个刚性边界面情况下,振荡型不稳定模中流体质点的水平投影轨迹

四、实际大气中的振荡型对流

近年来在转盘模拟实验中发现, 夏季模型青藏高原上空出现的对流活动, 既可以是常定型的也可以是振荡型的, 但只有当加热率和转动速度足够大而不太大时, 振荡型才会出现。我们在一个研究台风形成的理论模式中也发现有振荡性不稳定波存在, 并且其产生都同加热以及流体的转动有关, 同上面的讨论相当类似。由于地球自转以及各种非绝热加热作用, 实际大气中有可能产生这种振荡型对流。

ON THE OVERSTABILITY CONVECTION

Mankin Mak

(Dept. of Atmospheric Sciences, University of Illinois, Urbana)

Li Chongyin

(Institute of Atmospheric Physics, Academia Sinica)

Abstract

The oscillatory mode of instability in a rotating fluid layer heated from below is investigated with a combination of Eulerian and Lagrangian analyses. An exact analysis is made for the case of two free surfaces. The method of asymptotic matching between a boundary layer solution and an interior solution is used to analyse the case of one free and one rigid bounding surfaces. The lagrangian analyses results indicate that the oscillatory character of the instability arises from dual effects of the thermal diffusion in a rotating weakly viscous fluid. Provided that the rotation rate is not too large, fluid parcels can be alternately become overcooled and overheated due to large heat exchange with its environment during the relatively long trajectory. This process gives rise to a positive feedback, and hence instability.

The oscillatory vortices, observed in a recent laboratory experiment which was designed to simulate the flow over a heated model Tibetan plateau, is interpretable with the notion of such an oscillatory instability.

有限单元法解三元自由表面孔口水流

丁道扬

(南京水利科学研究所)

摘要 假设为理想势流,应用有限单元法计算了三元孔口水流。基本函数是速度势。为确定自由表面位置、未知流量和孔口出流边线,本文提出了一种迭代解法。数值试验指出,当 $\alpha \leq 0.4$ 有好的收敛性,但 $\alpha > 0.4$ 则变差。算例表明,计算结果与试验值较吻合。

一、问题的提出

在水利水电工程中,通常遇到的孔口水流可近似假设为不可压缩理想重力势流,适合应用有限单元法求解。这类孔口水流往往具有待定的自由表面和未知流量,具有非线性特征,要设法迭代求解。70年代以来,针对二元问题已有不少研究成果^{[1]~[5]},但对于三元水流,目前文献报导仍较少。1976年拉劳克(B. E. Larock)和台劳(C. Taylor)曾用三元方法计算了孔口出流边线已知条件下园形薄壁孔口的出流问题^[6]。

自由表面必须满足为流面(线)和压力为零两个条件,从如何满足这两个条件,可归纳为三种可能迭代求解途径:

- (1) 使近似自由表面先满足流面(线)条件,而后按压力条件调整。
- (2) 相反,先满足压力条件,按流面(线)条件调整。
- (3) 同时满足这两个条件。

第三种是从可变域变分原理出发,从而使两个条件能同时满足(由于非线性仍要迭代求解)。但对于三元问题须采用速度势求解,具有未知流量的可变域变分形式不易直接给出,同时还难以适应高次单元插值模式。因而,对于三元问题,前二者求解途径有较大的适应性。

但是,拉劳克等人认为第一种无法给出自由表面的调整计算式,仅适合渗流问题。因而他们在文献[6]中采用了第二种求解途径。

为了便于确定孔口出流边线,并避免孔口出流处两类不同性质边界衔接的处理困难,本文提出了一种基于第一种迭代求解途径的三元孔口水流计算方法。

二、定解问题及求解途径

如图1所示,给定上游水位,可提出如下定解问题:

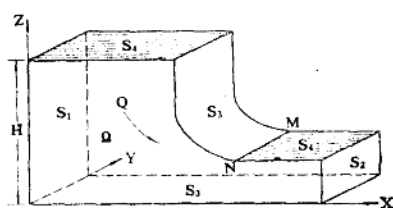


图 1 求解问题示意图

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{aligned} & \nabla^2 \varphi = 0 \quad (\text{在 } \Omega \text{ 内}) & (1) \\ & \varphi_n|_{s_1} = \frac{Q}{A} = m & (2) \\ & \varphi|_{s_2} = 0 & (3) \\ & \varphi_n|_{s_3} = 0 & (4) \\ & \varphi_n|_{s_4} = 0 & (5) \\ & \varphi_t|_{s_5} = \sqrt{2g\left(H + \frac{m^2}{2g} - z\right)} & (6) \end{aligned} \right. \\
 & [\text{I}]:
 \end{aligned}$$

φ_t 为表面上的 φ 梯度，表示流速， A 为 s_1 的面积。为把 φ_t 和 Q 建立直接联系，以便求解流量。设

$$\varphi = m\tilde{\varphi} \quad (7)$$

则问题 [I] 转化为如下形式：

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{aligned} & \nabla^2 \tilde{\varphi} = 0 \quad (\text{在 } \Omega \text{ 内}) & (8) \\ & \tilde{\varphi}_n|_{s_1} = 1 & (9) \\ & \tilde{\varphi}|_{s_2} = 0 & (10) \\ & \tilde{\varphi}_n|_{s_3} = 0 & (11) \\ & \tilde{\varphi}_n|_{s_4} = 0 & (12) \\ & \tilde{\varphi}_t|_{s_5} = \frac{1}{m} \sqrt{2g\left(H + \frac{m^2}{2g} - z\right)} & (13) \end{aligned} \right. \\
 & [\text{II}]:
 \end{aligned}$$

针对问题 [II]，其求解过程为：

(1) 先假设一个初始近似自由表面位置。

(2) 使近似自由表面先满足流面条件，解 (8) 至 (12) 式所确定的问题，称近似流场的求解。

(3) 计算高一次近似流量、孔口出流边线及自由表面位置。由 (2)、(3) 两步反复迭代直至收敛为止。

这种解法的实质，是把具有待定的未知流量和自由表面的非线性可变域问题的求解，转化为对已知流量和表面边界的线性固定域问题进行迭代求解。

三、等参元解近似流场

(8)至(12)式所确定的定解问题, 等价于下述泛函取极小值的变分问题:

$$J[\tilde{\varphi}] = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} (\nabla \tilde{\varphi})^2 dv - \iint_{S_1} \tilde{\varphi} ds = \min \quad (14)$$

采用 20 结点空间等参元来离散流场解(14)式。这种单元容易实现自动编元, 用少量的单元即能较好地拟合弯曲的几何边界。

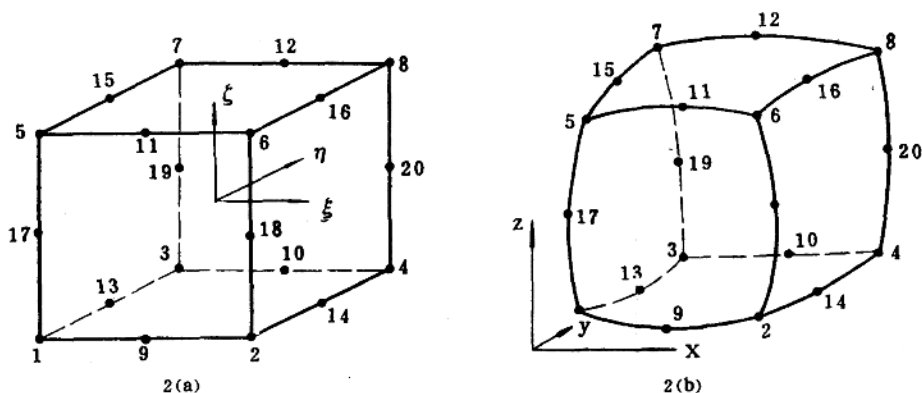


图 2 等参元示意图

图 2(a)为局部座标 (ξ, η, ζ) 下的立方体单元, 棱上结点在各棱中点。图 2(b)为整体座标 (x, y, z) 下的实际单元。规定插值模式:

$$u = \sum_{i=1}^{20} N_i u_i \quad (15)$$

u 分别代表被插值的函数 $\tilde{\varphi}$ 及座标 (x, y, z) , u_i 为相应在各结点的值。形函数 N_i 为:

$$\left\{ \begin{array}{l} N_i = \frac{1}{8} (1 + \xi_0) (1 + \eta_0) (1 + \zeta_0) (\xi_0 + \eta_0 + \zeta_0 - 2) \quad (i = 1-8) \\ N_i = \frac{1}{4} (1 - \xi^2) (1 + \eta_0) (1 + \zeta_0) \quad (i = 9-12) \\ N_i = \frac{1}{4} (1 - \eta^2) (1 + \xi_0) (1 + \zeta_0) \quad (i = 13-16) \\ N_i = \frac{1}{4} (1 - \zeta^2) (1 + \xi_0) (1 + \eta_0) \quad (i = 17-20) \end{array} \right. \quad (16)$$

$$\xi_0 = \xi \xi_i, \quad \eta_0 = \eta \eta_i, \quad \zeta_0 = \zeta \zeta_i \quad (17)$$

(15)至(17)式所确定的变换关系, 使正方体局部单元和曲棱六面体实际单元, 在几

何形态上建立了明确的对应关系。由复合函数求导得:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} \quad (18)$$

$[J]^{-1}$ 为雅可比矩阵 $[J]$ 的逆阵, $[J]$ 为:

$$[J] = [J_*] \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{20} & y_{20} & z_{20} \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$[J_*] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial N_{20}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial N_{20}}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_2}{\partial \zeta} & \dots & \frac{\partial N_{20}}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (20)$$

由(14)式, 考查某单元, 可得单元方程式:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial J^m}{\partial \tilde{\varphi}_1} \\ \frac{\partial J^m}{\partial \tilde{\varphi}_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial J^m}{\partial \tilde{\varphi}_{20}} \end{Bmatrix} = [[d^v] + [d^i]] \begin{Bmatrix} \tilde{\varphi}_1 \\ \tilde{\varphi}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\varphi}_{20} \end{Bmatrix} \quad (21)$$

单元矩阵 $[d^v]$ 是正定对称的 20×20 方阵, 阵内元素可由下式计算:

$$d_{ij}^v = \iiint_{v^m} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) |J| d\xi d\eta d\zeta \quad (22)$$

$|J|$ 为雅可比行列式。包含 s_i 边界的单元才有 $[d^i]$ 项, 由(16)式第二项引起, 是对角矩阵, 阵内元素为:

$$d_{ii}^i = - \iint_{s_i^m} N_i |J| d\xi d\eta \quad (23)$$

它只对形成自由项起作用。对于具有 N 个未知结点的流场, 通过各单元矩阵叠加, 进而