世纪ONE 高教版

全国考研数学真题第一书

2006

全面涵盖87-05试题
按大纲考点分类详解
总结命题特点与规律
分析考题难点与重点
传授解题诀窍与方法

历年考研数学(数学一)真题解析及复习思路

考研命题研究组

新华出版社

历年考研数学真题解析及复习思路

（数学一）

考研命题研究组

新 华 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

历年考研数学真题解析及复习思路(数学一)/考研命题研究组编写.
—北京:新华出版社,2005.4
ISBN 7—5011—7043—6

Ⅰ.历...
Ⅱ.考...
Ⅲ.高等数学—研究生—入学考试—解题
Ⅳ.013—44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 026683 号

总 策 划 张剑锋
责任编辑 刘 洁
封面设计 李继斌

历年考研数学真题解析及复习思路(数学一)
考研命题研究组

出版发行:新华出版社
地 址:北京市石景山区京原路 8 号
邮 编:100043
经 销:新华书店
印 刷:煤炭工业出版社印刷厂
开 本:787×1092 毫米 1/16
印 张:18.75
版 次:2005 年 4 月第 1 版
印 次:2005 年 4 月第 1 次印刷

新华出版社网址:www.xhcbs.126.com
高教考研人网址:www.kaoyanren.com
世纪高教书店:010—82627540
邮 购 部:010—62534421
门 市 部:010—82627540
字 数:400 千字
ISBN 7—5011—7043—6
定 价:25.00 元

前言

《历年数学真题解析及复习思路(数学一)》是考研命题研究系列丛书中的一本，该系列丛书是由曾多年参加研究生考试大纲修订和命题的专家，为便于参加2006年研究生入学考试的广大莘莘学子对考试大纲规定的考试内容和考试要求进行全面、准确地理解而精心设计之作。该系列丛书内容精心设计，预见性极强，既体现了考生复习的阶段性特征，同时又鲜明地突出了考生能力结构提升的层次性。

(一)本书在结构框架和试题编排方面，其主要特点如下：

在第一部分，我们汇编了1987～2005年的全部数学试题，这些试题凝聚了近20年来参加命题的专家、教授的集体智慧，是一份十分宝贵的资料。这些试题既反映了《数学考试大纲》对考生数学知识、能力的测试要求，又充分地体现了命题专家和教授们进行数学命题的基本指导思想和基本原则，而且还能全面地展现试卷的结构、题型的特点。

在第二部分，我们对1987～2005年的全部数学试题根据《数学考试大纲(数学一)》的考查要求按照学科进行了科学地编排，并对试题进行了详细地解析。在编排顺序上，我们把相同或相近知识点列在一块进行解析，这样做除了便于进行比较分析外，更重要的是提供给考生一个重要的信息，即：相同或相近的知识点，相隔多少年会重新进行命题以及考查的知识点和题型的变化情况，以增强考生对命题基本规律的感性认识。如2005年数学一的第(8)小题与1999年数学一的第二大题的第(1)小题；2005年数学一的第(4)小题与1993年数学一的第四大题；2004年数学一的第(3)小题与1993年数学一的第一大题的第(3)小题；2004年数学一的第(5)小题与2003年数学二的第一大题的第(6)小题；2004年数学一的第(20)题与2002年数学三的第九大题；……

关于试题重复命题的问题，需要说明的是，不仅在当年的理工科数学一和数学二之间使用相同试题，而且相隔多年后，一些理工科试题也被用作经济类试题。因此，经济类考生在分析历年试题时，可适当做一些理工类试题。

(二)本书在试题解析方面，其主要特点如下：

(1)依据《数学考试大纲》的章节，按试题考查的知识点分章，并对一些跨章节的、综合性较强的试题进行了科学的编排和处理。同时在每一章节加写了内容提要，对本章考查的大纲知识点进行了提纲挈领的分析。

(2)对每一道试题我们都进行了详细地分析和注释，并给出了命题和解题思路。在“分析”部分，主要分析试题的解题思路和解题方法，以期加强对考生的数学思维能力的培养，提高考生的破题能力；在“解析”部分则对试题进行详细的解析，给出了试题的解题步骤和详细答案，同时，为进一步拓宽考生的思维视野，我们在解析时尽可能地给出了多种解题思路或方法，以便使考生能够举一反三，触类旁通；在“注释”部分则针对历年考生在答卷中的典型错误进行了分析，同时对试题命制的思路、同类试题的解题方法、所考查知识点进行了归纳和总结；在“复习思路”部分，我们对考查的知识点进行了进一步的归纳和总结，并对该知识点的命题特点和趋势进行了分析。

(三)本书适合的报考专业：

(1)工学门类的力学、机械工程、光学工程、仪器科学与技术、冶金工程、动力工程及工程热物理、电气工程、电子科学与技术、信息与通信工程、控制科学与工程、计算机科学与技术、土木工程、水利工程、测绘科学与技术、交通运输工程、船舶与海洋工程、航空宇航科学与技术、兵器科学与技术、核科学与技术、生物医学工程等一级学科中所有的二级学科、专业。

(2)工学门类的材料科学与工程、化学工程与技术、地质资源与地质工程、矿业工程、石油与天然气工程、环境科学与工程等一级学科中对数学要求较高的二级学科、专业。

(3)管理学门类中的管理科学与工程一级学科。

(四)如何使用本书，我们的建议：

(1)建议考生参照《数学考试大纲(数学一)》的考查知识点，结合教材《高等数学》(高教同济五版)、《线性代数》(高教同济四版)、《概率论与数理统计》(高教浙大三版)进行第一轮的复习。为了使复习具有针对性，考生可在这一阶段结合教材的复习进度使用本书，从本书的第二部分开始阅读。这一阶段的阅读主要是使考生明了教材的内容与考试试题的吻合度。这时候，考生首先要自己思考题目，如果不会可参考“分析”再做，如果还是不会再看答案，最后再认真地思考本题，参照“注”对题目进行归纳和总结，不能就题做题，要通过考题发现一些规律性的东西，这样才能取得最好的效果。

(2)在完成第一轮复习后，考生需要尝试做一些套题。每一年的试题就知识点而言，既具有分散性，同时又具有综合性。做套题的目的就是要使考生熟悉考研试题并进行自我检测。考生在做题时不要着急看答案，一定要把整个一套试题做完后再看。在看答案时，要将自己的解题思路与本书的分析进行对比，找差距，找不足。

(3)在复习的第三阶段使用本书，主要结合《数学考试大纲》知识点，重点分析历年试题的命制情况，从中发现和总结知识点命题的特点和规律。这一阶段，要认真阅读本书的试题“注释”部分和“复习思路”部分。通过使用本书，考生会看到每一部分都考过什么内容，如何考查，考试的重点和热点是什么，以便在复习时真正做到心中有数，有的放矢。对历年真题，我们建议大家最少要做2—3遍，做到看到题目就会解答的程度。

由于时间仓促和其他方面的原因，本书难免有不足之处，敬请广大读者和专家同行批评指正，以便再版时更臻于完善。

最后，预祝广大考生考研成功！

考研命题研究组

2005年4月

目　录

1987—2005 年考研数学试题汇编

历年真题解析及复习思路

PART Ⅱ **线性代数**

PART Ⅲ **概率论与数理统计**

1987—2005 年考研数学试题汇编

2005 年全国硕士研究生入学统一考试
理工数学一试题

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分. 把答案填在题中横线上.)

(1) 曲线 $y=\dfrac{x^2}{2x+1}$ 的斜渐近线方程为____________. P84*

(2) 微分方程 $xy'+2y=x\ln x$ 满足 $y(1)=-\dfrac{1}{9}$ 的解为____________. P183

(3) 设函数 $u(x,y,z)=1+\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{12}+\dfrac{z^2}{18}$,单位向量 $\boldsymbol{n}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\{1,2,\}$,则 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{(1,2,3)}=$____________.

P122

(4) 设 $\boldsymbol{\Omega}$ 是由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 围成的空间区域,$\sum$ 是 $\boldsymbol{\Omega}$ 的整个边界的外侧,则 $\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$____________. P157

(5) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均为 3 维列向量,记矩阵

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3),B=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3).$$

如果 $|\boldsymbol{A}|=1$,那么 $|\boldsymbol{B}|=$____________. P198

(6) 从数 1,2,3,4 中任取一个数,记为 X,再从 $1,\cdots,X$ 中任取一个数,记为 Y,则 $\boldsymbol{P}\{Y=2\}=$____________. P257

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分. 每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(7) 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}$,则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内 P72

(A) 处处可导.　　(B) 恰有一个不可导点.

(C) 恰有两个不可导点.　　(D) 至少有三个不可导点.　【　】

(8) 设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数,"$M\Leftrightarrow N$"表示"M 的充分必要条件是 N",则必有 P58

(A) $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数.

(B) $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数.

(C) $F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是周期函数.

(D) $F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是单调函数.　【　】

(9) 设函数 $u(x,y)=\varphi(x+y)+\varphi(x-y)+\int_{x-y}^{x+y}\psi(t)\mathrm{d}t$,其中函数 φ 具有二阶导数,ψ 具有一

---

* P84,表示该题的解答在本书第 84 页,下同.

阶导数，则必有 P117

(A) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.　　(B) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

(C) $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.　　(D) $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.　　【　】

(10) 设有三元方程 $xy-z\ln y+e^{xz}=1$，根据隐函数存在定理，存在点$(0,1,1)$的一个邻域，在此邻域内该方程 P119

(A) 只能确定一个具有连续偏导数的隐函数 $z=z(x,y)$.

(B) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $y=y(x,z)$ 和 $z=z(x,y)$.

(C) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x=x(y,z)$ 和 $z=z(x,y)$.

(D) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x=x(y,z)$ 和 $y=y(x,z)$.　　【　】

(11) 设 λ_1,λ_2 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个不同的特征值，对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$ 线性无关的充分必要条件是 P219

(A) $\lambda_1\neq 0$.　(B) $\lambda_2\neq 0$.　(C) $\lambda_1=0$.　(D) $\lambda_2=0$.　　【　】

(12) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n(n\geqslant 2)$ 阶可逆矩阵，交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行与第 2 行得矩阵 $\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}^*,\boldsymbol{B}^*$ 分别为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵，则 P202

(A) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 列与第 2 列得 $\boldsymbol{B}^*$.

(B) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 行与第 2 行得 $\boldsymbol{B}^*$.

(C) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 列与第 2 列得 $-\boldsymbol{B}^*$.

(D) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 行与第 2 行得 $-\boldsymbol{B}^*$.　　【　】

(13) 设二维随机变量(X,Y)的概率分布为

X \ Y	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

已知随机事件$\{X=0\}$与$\{X+Y=1\}$相互独立，则 P267

(A) $a=0.2,b=0.3$.　　(B) $a=0.4,b=0.1$.

(C) $a=0.3,b=0.2$.　　(D) $a=0.1,b=0.4$.　　【　】

(14) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n\geqslant 2)$ 为来自总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值，S^2 为样本方差，则 P286

(A) $n\overline{X}\sim N(0,1)$.　　(B) $nS^2\sim\chi^2(n)$.

(C) $\frac{(n-1)\overline{X}}{S}\sim t(n-1)$.　　(D) $\frac{(n-1)X_1^2}{\sum\limits_{i=2}^{n}X_i^2}\sim F(1,n-1)$.　　【　】

三、解答题(本题共 9 小题，满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 11 分)

设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant\sqrt{2},x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$，$[1+x^2+y^2]$ 表示不超过 $1+x^2+y^2$ 的最大整数，计算二重积分 $\iint\limits_D xy[1+x^2+y^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. P132

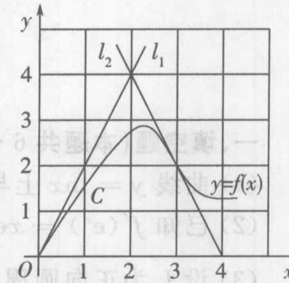
(16)(本题满分 12 分)

求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n(2n-1)}\right)x^{2n}$的收敛区间与和函数$f(x)$.

P175

(17)(本题满分 11 分)

如图,曲线C的方程为$y=f(x)$,点$(3,2)$是它的一个拐点,直线l_1与l_2分别是曲线C在点$(0,0)$与$(3,2)$处的切线,其交点为$(2,4)$. 设函数$f(x)$具有三阶连续导数,计算定积分$\int_0^3 (x^2+x)f'''(x)\mathrm{d}x$.



P93

(18)(本题满分 12 分)

已知函数$f(x)$在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可导,且$f(0)=0$,$f(1)=1$. 证明:

(Ⅰ)存在$\xi\in(0,1)$,使得$f(\xi)=1-\xi$;

(Ⅱ)存在两个不同的点$\eta,\zeta\in(0,1)$,使得$f'(\eta)f'(\zeta)=1$.

P76

(19)(本题满分 12 分)

设函数$\varphi(y)$具有连续导数,在围绕原点的任意分段光滑简单闭曲线L上,曲线积分$\oint_L \frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}$的值恒为同一常数.

(Ⅰ)证明:对右半平面$x>0$内的任意分段光滑简单闭曲线C,有

$$\oint_C \frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}=0;$$

(Ⅱ)求函数$\varphi(y)$的表达式.

P146

(20)(本题满分 9 分)

已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2+2(1+a)x_1x_2$的秩为 2.

(Ⅰ)求a的值;

(Ⅱ)求正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$,把$f(x_1,x_2,x_3)$化成标准形;

(Ⅲ)求方程$f(x_1,x_2,x_3)=0$的解.

P247

(21)(本题满分 9 分)

已知 3 阶矩阵$\boldsymbol{A}$的第一行是(a,b,c),a,b,c不全为零,矩阵$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&k\end{bmatrix}$($k$为常数),且$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,求线性方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的通解.

P226

(22)(本题满分 9 分)

设二维随机变量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,0<y<2x,\\0, & \text{其他}.\end{cases}$

求:(Ⅰ)(X,Y)的边缘概率密度$f_X(x),f_Y(y)$;

(Ⅱ)$Z=2X-Y$的概率密度$f_Z(z)$.

P273

(23)(本题满分 9 分)

设$X_1,X_2,\cdots,X_n(n>2)$为来自总体$N(0,1)$的简单随机样本,$\overline{X}$为样本均值,记$Y_i=X_i-\overline{X}$,$i=1,2,\cdots,n$.

求:(Ⅰ)Y_i的方差$\boldsymbol{D}Y_i,i=1,2,\cdots,n$;

(Ⅱ)Y_1与Y_n的协方差$\mathrm{Cov}(Y_1,Y_n)$.

P285

2004 年全国硕士研究生入学统一考试
理工数学一试题

一、填空题(本题共 6 个小题,每小题 4 分,满分 24 分. 把答案填在题中横线上.)

(1) 曲线 $y = \ln x$ 上与直线 $x + y = 1$ 垂直的切线方程为__________. P75

(2) 已知 $f'(e^x) = xe^{-x}$,且 $f(1) = 0$,则 $f(x) =$ __________. P89

(3) 设 L 为正向圆周 $x^2 + y^2 = 2$ 在第一象限中的部分,则曲线积分 $\int_L x\,dy - 2y\,dx$ 的值为__________. P140

(4) 欧拉方程 $x^2 \dfrac{d^2 y}{dx^2} + 4x \dfrac{dy}{dx} + 2y = 0\ (x > 0)$ 的通解为__________. P186

(5) 设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{ABA}^* = 2\boldsymbol{BA}^* + \boldsymbol{E}$,其中 $\boldsymbol{A}^*$ 为 A 的伴随矩阵,$\boldsymbol{E}$ 是单位矩阵,则 $|\boldsymbol{B}| =$ __________. P201

(6) 设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布,则 $P\{X > \sqrt{D(X)}\} =$ __________. P262

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一个是符合题目要求的,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(7) 把 $x \to 0^+$ 时的无穷小量 $\alpha = \int_0^x \cos t^2 dt$,$\beta = \int_0^{x^2} \tan\sqrt{t}\,dt$,$\gamma = \int_0^{\sqrt{x}} \sin t^3 dt$ 排列起来,使排在后面的是前一个的高阶无穷小,则正确的排列次序是 P66

(A) α, β, γ. (B) α, γ, β. (C) β, α, γ. (D) β, γ, α. 【 】

(8) 设函数 $f(x)$ 连续,且 $f'(0) > 0$,则存在 $\delta > 0$,使得 P71

(A) $f(x)$ 在 $(0, \delta)$ 内单调增加.

(B) $f(x)$ 在 $(-\delta, 0)$ 内单调减少.

(C) 对任意的 $x \in (0, \delta)$ 有 $f(x) > f(0)$.

(D) 对任意的 $x \in (-\delta, 0)$ 有 $f(x) > f(0)$. 【 】

(9) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数. 下列结论中正确的是 P163

(A) 若 $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

(B) 若存在非零常数 λ,使得 $\lim_{n\to\infty} na_n = \lambda$,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

(C) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,则级数 $\lim_{n\to\infty} n^2 a_n = 0$.

(D) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散,则存在非零常数 λ,使得 $\lim_{n\to\infty} na_n = \lambda$. 【 】

(10) 设 $f(x)$ 为连续函数,$F(t) = \int_1^t dt \int_y^t f(x)\,dx$,则 $F'(2)$ 等于 P96

(A)$2f(2)$.　　(B)$f(2)$.　　(C)$-f(2)$.　　(D)0　　【　】

(11) 设$\boldsymbol{A}$是 3 阶方阵，将$\boldsymbol{A}$的第 1 列与第 2 列交换得$\boldsymbol{B}$，再把$\boldsymbol{B}$的第 2 列加到第 3 列得$\boldsymbol{C}$，则满足$\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{C}$的可逆矩阵$\boldsymbol{Q}$为　　P206

(A)$\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&0&1\end{bmatrix}$　　(B)$\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}$

(C)$\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}$　　(D)$\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$　　【　】

(12) 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$为满足$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$的任意两个非零矩阵，则必有　　P218

(A)$\boldsymbol{A}$的列向量线性相关，$\boldsymbol{B}$的行向量组线性相关.

(B)$\boldsymbol{A}$的列向量线性相关，$\boldsymbol{B}$的列向量组线性相关.

(C)$\boldsymbol{A}$的行向量线性相关，$\boldsymbol{B}$的行向量组线性相关.

(D)$\boldsymbol{A}$的行向量线性相关，$\boldsymbol{B}$的列向量组线性相关.　　【　】

(13) 设随机变量X服从正态分布$N(0,1)$，对给定的$\alpha(0<\alpha<1)$，数u_α满足$P\{X>u_\alpha\}=\alpha$. 若$P\{|X|<x\}=\alpha$，则x等于　　P286

(A)$u_{\frac{\alpha}{2}}$　　(B)$u_{1-\frac{\alpha}{2}}$　　(C)$u_{\frac{1-\alpha}{2}}$　　(D)$u_{1-\alpha}$　　【　】

(14) 设随机变量$X_1,X_2,\cdots,X_n(n>1)$独立同分布，且其方差为$\sigma^2>0$. 令$Y=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，则　　P281

(A)$\mathrm{Cov}(X_1,Y)=\frac{\sigma^2}{n}$.　　(B)$\mathrm{Cov}(X_1,Y)=\sigma^2$.

(C)$D(X_1+Y)=\frac{n+1}{n}\sigma^2$.　　(D)$D(X_1-Y)=\frac{n+1}{n}\sigma^2$.　　【　】

三、解答题(本题共 9 小题，满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 12 分)

设$\mathrm{e}<a<b<\mathrm{e}^2$，证明$\ln^2 b-\ln^2 a>\frac{4}{\mathrm{e}^2}(b-a)$.　　P82

(16)(本题满分 11 分)

某种飞机在机场降落时，为了减少滑行距离，在触地的瞬间，飞机尾部张开减速伞，以增大阻力，使飞机迅速减速并停下.

现有一质量为9000kg的飞机，着陆时的水平速度为700 km/h. 经测试，减速伞打开后，飞机所受的总阻力与飞机的速度成正比(比例系数为$k=6.0\times10^6$). 问从着陆点算起，飞机滑行的最长距离是多少?

注　kg 表示千克，km/h 表示千米 / 小时.　　P191

(17)(本题满分 12 分)

计算曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma}2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中$\sum$是曲面$z=1-x^2-y^2(z\geqslant 2)$的上侧.　　P157

(18)(本题满分 11 分)

设有方程 $x^n + nx - 1 = 0$,其中 n 为正整数. 证明此方程存在唯一正实根 x_n,并证明当 $\alpha > 1$ 时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^{\alpha}$ 收敛.

P166

(19)(本题满分 12 分)

设 $z = z(x,y)$ 是由 $x^2 - 6xy + 10y^2 - 2yz - z^2 + 18 = 0$ 确定的函数,求 $z = z(x,y)$ 的极值点和极值.

P126

(20)(本题满分 9 分)

设有齐次线性方程组

$$\begin{cases} (1+a)x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0 \\ 2x_1 + (2+a)x_2 + \cdots + 2x_n = 0 \\ \cdots\cdots \\ nx_1 + nx_2 + \cdots + (n+a)x_n = 0 \end{cases} \quad (n \geqslant 2)$$

试问 a 取何值时,该方程组有非零解,并求出其通解.

P224

(21)(本题满分 9 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & a & 5 \end{bmatrix}$ 的特征方程有一个二重根,求 a 的值,并讨论 A 是否可相似对角化.

P242

(22)(本题满分 9 分)

设 A,B 为随机事件,且 $P(A) = \frac{1}{4}$,且 $P(A) = \frac{1}{4}$,$P(B \mid A) = \frac{1}{3}$,$P(A \mid B) = \frac{1}{2}$,令

$$X = \begin{cases} 1, A\text{ 发生} \\ 0, A\text{ 不发生} \end{cases} \qquad Y = \begin{cases} 1, B\text{ 发生} \\ 0, B\text{ 不发生} \end{cases}$$

求:(Ⅰ)二维随机变量(X,Y)的概率分布;

(Ⅱ)X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY}.

P278

(23)(本题满分 9 分)

设总体 X 的分布函数为

$$F(x;\beta) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^{\beta}}, & x > 1 \\ 0, & x \leqslant 1 \end{cases}$$

其中未知参数 $\beta > 1$,$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本,求:

(Ⅰ)β的矩估计量;

(Ⅱ)β的最大似然估计量.

P290

2003 年全国硕士研究生入学统一考试
理工数学一试题

一、填空题(本题共 6 个小题,每小题 4 分,满分 24 分.)

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}} =$ ________. P63

(2) 曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $2x + 4y - z = 0$ 平行的切平面的方程是________. P125

(3) 设 $x^2 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx (-\pi \leqslant x \leqslant \pi)$,则 $a_2 =$ ________. P176

(4) 从 $\mathbf{R}^2$ 的基 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}_2 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ 的过渡矩阵为________.

P220

(5) 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

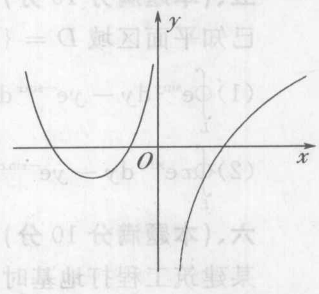
$$f(x,y) = \begin{cases} 6x, & 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

则 $P\{X + Y \leqslant 1\} =$ ________. P272

(6) 已知一批零件的长度 X(单位:cm) 服从正态分布 $N(\mu,1)$,从中随机地抽取 16 个零件,得到长度的平均值为 40(cm),则 μ 的置信度为 0.95 的置信区间是________.
(注:标准正态分布函数值 $\Phi(1.96) = 0.975, \Phi(1.645) = 0.95$.) P292

二、选择题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分)

(1) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续其导函数的图形如图所示,
则 $f(x)$ 有 P85



(A) 一个极小值点和两个极大值点
(B) 两个极小值点和一个极大值点
(C) 两个极小值点和两个极大值点
(D) 一个极小值点和一个极大值点 【　】

(2) 设 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 均为非负数列,且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1, \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \infty$,则必有 P60

(A) $a_n < b_n$ 对任意 n 成立.　　(B) $b_n < c_n$ 对任意 n 成立.

(C) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n c_n$ 不存在.　　(D) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n c_n$ 不存在. 【　】

(3) 已知函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某个邻域内连续,且 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} \dfrac{f(x,y) - xy}{(x^2 + y^2)^2} = 1$,则 P126

(A) 点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点.

(B) 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极大值点.

(C) 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值点.

(D) 根据所给条件无法判断点 $(0,0)$ 是否为 $f(x,y)$ 的极值点. 【　】

(4) 设向量组 Ⅰ:$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 可由向量组 Ⅱ:$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示,则 P218

(A) 当 $r < s$ 时,向量组 Ⅱ 必线性相关.

(B) 当 $r > s$ 时，向量组 Ⅱ 必线性相关.

(C) 当 $r < s$ 时，向量组 Ⅰ 必线性相关.

(D) 当 $r > s$ 时，向量组 Ⅰ 必线性相关. 【　】

(5) 设有齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$，其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 $m\times n$ 矩阵，现有 4 个命题：

P224

① 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解均是 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解，则秩($\boldsymbol{A}$) $\geqslant$ 秩($\boldsymbol{B}$)；

② 若秩($\boldsymbol{A}$) $\geqslant$ 秩($\boldsymbol{B}$)，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解均是 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解；

③ 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 同解，则秩($\boldsymbol{A}$) $=$ 秩($\boldsymbol{B}$)；

④ 若秩($\boldsymbol{A}$) $=$ 秩($\boldsymbol{B}$)，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 同解.

(A)①②　　(B)①③　　(C)②④　　(D)③④ 【　】

(6) 设随机变量 $X\sim t(n)(n>1)$，$Y=\dfrac{1}{X^2}$，则

P285

(A)$Y\sim\chi^2(n)$　　(B)$Y\sim\chi^2(n-1)$

(C)$Y\sim F(n,1)$　　(D)$Y\sim F(1,n)$ 【　】

三、(本题满分 10 分)

过坐标原点作曲线 $y=\ln x$ 的切线，该切线与曲线 $y=\ln x$ 与 x 轴围成平面图形 D.

(1) 求 D 的面积 A；

(2) 求 D 绕直线 $x=\mathrm{e}$ 旋转一周所得旋转体的体积 V.

P103

四、(本题满分 12 分)

将函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1-2x}{1+2x}$ 展开成 x 的幂级数，并求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和.

P171

五、(本题满分 10 分)

已知平面区域 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant\pi,0\leqslant y\leqslant\pi\}$，$L$ 为 D 的正向边界. 试证：

(1)$\oint\limits_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x=\oint\limits_L x\mathrm{e}^{-\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x$

(2)$\oint\limits_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x\geqslant 2\pi^2$.

P142

六、(本题满分 10 分)

某建筑工程打地基时，需用汽锤将桩打进土层. 汽锤每次击打，都将克服土层对桩的阻力而作功. 设土层对桩的阻力的大小与桩被打进地下的深度成正比(比例系数为 $k,k>0$)，汽锤第一次击打将桩打进地下 a(m). 根据设计方案，要求汽锤每次击打桩时所作的功与前一次击打时所作的功之比为常数 $r(0<r<1)$. 问

(1) 汽锤击打桩 3 次后，可将桩打进地下多深？

(2) 若击打次数不限，汽锤至多能将桩打进地下多深？

P105

七、(本题满分 12 分)

设函数 $y=y(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有二阶导数，且 $y'\neq 0$，$x=x(y)$ 是 $y=y(x)$ 的反函数.

(1) 试将 $x=x(y)$ 所满足的微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}+(y+\sin x)\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^3=0$ 变换为 $y=y(x)$ 满足的微分方程；

(2) 求变换后的微分方程满足初始条件 $y(0)=0,y'(0)=\dfrac{3}{2}$ 的解.

P188

八、(本题满分 12 分)

设函数 $f(x)$ 连续且恒大于零，

$$F(t)=\frac{\iiint\limits_{\Omega(t)} f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v}{\iint\limits_{D(t)} f(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma},\quad G(t)=\frac{\iint\limits_{D(t)} f(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma}{\int_{-t}^{t} f(x^2)\mathrm{d}x}$$

其中 $\Omega(t)=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant t^2\}$，$D(t)=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant t^2\}$.

(1) 讨论 $F(t)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内的单调性.

(2) 证明当 $t>0$ 时，$F(t)>\dfrac{2}{\pi}G(t)$. *P137*

九、(本题满分 10 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}$，求 $\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$ 的特征值与特征向量，其中 $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵. *P234*

十、(本题满分 8 分)

已知平面上三条不同直线的方程分别为

$$l_1: ax+2by+3c=0$$
$$l_2: bx+2cy+3a=0$$
$$l_3: cx+2ay+3b=0$$

试证这三条直线交于一点的充分必要条件为 $a+b+c=0$. *P230*

十一、(本题满分 10 分)

已知甲、乙两箱中装有同种产品，其中甲箱中装有3件合格品和3件次品，乙箱中仅装有3件合格品. 从甲箱中任取 3 件产品放入乙箱后，求：

(1) 乙箱中次品件数 X 的数学期望；

(2) 从乙箱中任取一件产品是次品的概率. *P277*

十二、(本题满分 8 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2(x-\theta)}, & x>\theta\\ 0, & x\leqslant\theta\end{cases}$$

其中 $\theta>0$ 是未知参数. 从总体 X 中抽取简单随机样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，记 $\hat{\theta}=\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)$.

(1) 求总体 X 的分布函数 $F(x)$；

(2) 求统计量 $\hat{\theta}$ 的分布函数 $F_{\hat{\theta}}(x)$；

(3) 如果用 $\hat{\theta}$ 作为 θ 的估计量，讨论它是否具有无偏性. *P291*

2002 年全国硕士研究生入学统一考试
理工数学一试题

一、填空题(本题共 5 个小题，每小题 3 分，满分 15 分，把答案填在题中横线上.)

(1) $\int_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x} =$ ________. P102

(2) 已知函数 $y = y(x)$ 由方程 $e^y + 6xy + x^2 - 1 = 0$ 确定，则 $y''(0) =$ ________. P73

(3) 微分方程 $yy'' + y'^2 = 0$ 满足初始条件 $y\Big|_{x=0} = 1, y'\Big|_{x=0} = \frac{1}{2}$ 的特解是________. P185

(4) 已知实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$ 经正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 可化成标准形 $f = 6y_1^2$，则 $a =$ ________. P247

(5) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)(\sigma > 0)$，且二次方程 $y^2 + 4y + X = 0$ 无实根的概率为 $\frac{1}{2}$，则 $\mu =$ ________. P262

二、选择题(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分. 每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 考虑二元函数 $f(x, y)$ 的下面 4 条性质： P113

①$f(x, y)$ 在点(x_0, y_0) 处连续

②$f(x, y)$ 在点(x_0, y_0) 处的两个偏导数连续

③$f(x, y)$ 在点(x_0, y_0) 处可微

④$f(x, y)$ 在点(x_0, y_0) 处的两个偏导数存在

若用"$P \Rightarrow Q$"表示可由性质 P 推出性质 Q，则有

(A) ②⇒③⇒① (B) ③⇒②⇒①

(C) ③⇒④⇒① (D) ③⇒①⇒④ 【 】

(2) 设 $u_n \neq 0 (n = 1, 2, 3, \cdots)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{u_n} = 1$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}}\right)$ P162

(A) 发散 (B) 绝对收敛

(C) 条件收敛 (D) 收敛性根据所给条件不能判定 【 】

(3) 当函数 $y = f(x)$ 在$(0, +\infty)$ 内有界且可导，则 P77

(A) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$

(B) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ 存在时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$

(C) 当 $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 0$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to0^+} f'(x) = 0$

(D) 当 $\lim\limits_{x\to0^+} f'(x)$ 存在时，必有 $\lim\limits_{x\to0^+} f'(x) = 0$ 【 】

(4) 设有三张不同平面的方程 $a_{i1}x + a_{i2}y + a_{i3}z = b_i, i = 1, 2, 3$，它们所组成的线性方程组的系数矩阵与增广矩阵的秩都为 2，则这三张平面可能的位置关系为 【 】