北 京 数 学 会
北京数学培训学校 教学丛书

主 编 赵 桢
副主编 刘来福 张秀平

分册主编 胡永建

高中基础分卷Ⅱ

北京师范大学出版社
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PRESS

序　言

北京数学培训学校是由北京数学会主办的一所课外培养中学生的数学学校（前身是北京数学奥林匹克学校）。1985 年开始建校，是我国成立最早的一所数学奥林匹克学校。二十多年来，该校为北京市培养了一大批数学优秀学生，不仅在全国和国际中学生数学竞赛中获奖，而且在高等学校的“数学建模竞赛”中（和大学生一起参加，评奖标准也完全一致），该校学生也曾多次获得全国（新苗）奖和北京市奖。

在该校学习的学生，即使没有获得竞赛奖，也获得了不少课外数学知识，提高了数学能力（包括解决实际问题的能力），增强了数学素质；这对于参加高考时解决难题和应用题也有不少帮助，从而使很多学生提高了自己的高考分数，考上了理想的大学。因此，该校一直受到学生和家长的欢迎。

二十多年来该校在高中数学教学中积累了丰富的教学经验和教学资料，一直希望能够很好地整理一下，以供教师和学生参考使用（特别是对于新课标的部分选课也将很有参考价值）。本套丛书就是在此基础上由该校任教的部分教师编写的，由北京师范大学出版社出版，目前陆续出版的有高中基础分卷Ⅰ、高中基础分卷Ⅱ、高中应用分卷Ⅰ、高中应用分卷Ⅱ、高中提高分卷和高中建模分卷等。

王梓坤
赵桢

2007 年 9 月 27 日

作者的话

我国自1955年举办高中学生的数学竞赛以来，至今已有52年的历史了。中间虽中断过一个时期，但自1978年恢复竞赛以来，发展更为迅速。尤其是自1985年参加国际数学奥林匹克竞赛(IMO)至今，已经取得了特别辉煌的成绩。

举办数学竞赛的目的主要应该是让更多的人喜欢数学、学好数学，促进数学教学的质量，从中选拔更多的作为我国数学研究和发展的后备力量。北京数学培训学校多年致力于这方面的研究，在多年教学的基础上，总结出版了这套教材，其特点是注意培养学生的数学思维，对高考、竞赛以及学生将来的数学发展都奠定了很好的基础。

本书第1～4，9～11，28，29讲由王忠钦编写，第7，8，40，41讲由张国栋编写，第12～15，18，24，30，39，43，47，48讲由张秀平编写，第16，17，25～27，37，38讲由王博程编写，第5，19～23，31～34讲由韩乐琴编写，第35，36讲由胡永建编写，第42讲由黎栋材编写，第44，45讲由赵维悦编写，第6，46，49，50讲由苏效乐编写。

本书由北京师范大学数学科学学院在校学生逐题验算。金勇麟：第1，5～6，14～15，21～22讲；李妹桦：第2～4，35～36，40～42讲；郭转娜：第7，9，19～20，25，32～33讲；李剑铎：第8，11，17～18，34，39，47讲；李京睿：第10，12～13，16，48～50讲；谢瑶：第23～24，26～27，31，37～38讲；郭念晗：第28～30，43～46讲。

本书中IMO指国际数学奥林匹克竞赛；CMO指中国数学奥林匹克竞赛。

对北京师范大学出版社帮助出版本书，我们表示衷心感谢。

由于我们的水平有限，书中的错误与不妥之处在所难免，深切盼望广大读者提出宝贵意见，以便我们及时修改，使本教材日臻完善。

北京数学培训学校

2007年8月8日

北京数学培训学校情况简介

北京数学培训学校是由北京数学会主办的一所课外培养中学生的数学学校，我们的办学方针是：

1. 丰富学生的课外知识，促进中学数学教学质量的提高，激发学生对数学学习的兴趣；

2. 在德智体全面发展的基础上，及时发现和培养数学尖子学生，使他们有较宽的知识面和较强的分析问题和解决问题（包括实际问题）的能力；

3. 探索数学特长生的培养方法和规律。

我校的办学方式是利用星期日进行业余培训。按照我们自定的教学计划，聘请北京市大、中学校热爱数学普及工作、有丰富教学经验的数学专家和教师担任教学工作。根据学生和家长对教学的意见，不断改进教学，保证教学质量的不断提高。每年都有一批我校学生在全国和北京市各种数学竞赛中获奖。我校应用班的很多学生都参加了北京市高中学生数学知识应用竞赛。根据竞赛要求，参加决赛的学生每人要完成一篇小论文，通过写作论文，学生普遍认为收获很大。这是从选题、调研、提出数学模型、修改数学模型一直到利用计算机编程计算的全过程。这可以说是在进行素质教育。这样的培训工作可以使学生从小就逐步建立起“应用”意识，对适应社会主义市场经济发展将起重要作用。从而，我校为中学数学教学改革也摸索了初步经验。

我校的前身是北京数学奥林匹克学校．1985 年开始建校，是在我国成立最早的一所数学奥林匹克学校，二十多年来培养了一大批数学特长学生。

通过我校培养，北京中学生在全国中学生数学竞赛中成绩很长时间名列前茅。自从全国中学生数学奥林匹克竞赛设立“陈省身杯”以来，北京市的中学生代表队曾多次获得了“陈省身杯”，还曾经连续三次获得了“陈省身杯”，因此将“陈省身杯”保存在北京市教育局。

在参加国际中学生数学奥林匹克竞赛的中国代表队中，曾多次有北京的中学生，并获得了多枚奖牌，为我国争得了荣誉。这些学生毫无例外地都曾经接受过我校和北京数学会组织的培训。

具体获奖的学生名单如下：

1987 年第 28 届国际中学生数学奥林匹克竞赛：北京大学附中　滕峻　获得金牌；北京大学附中　高峡　获得铜牌；

1989 年第 30 届国际中学生数学奥林匹克竞赛：北京人大附中　颜华菲

获得银牌；

1990年第31届国际中学生数学奥林匹克竞赛：北京四中　张朝晖　获得金牌；

1991年第32届国际中学生数学奥林匹克竞赛：北京大学附中　张里钊　获得金牌；北京大学附中　王绍昱　获得金牌；北京大学附中　刘彤威　获得银牌；

1992年第33届国际中学生数学奥林匹克竞赛：北京大学附中　周宏　获得金牌；

1993年第34届国际中学生数学奥林匹克竞赛：北京大学附中　周宏　获得金牌；

1994年第35届国际中学生数学奥林匹克竞赛：北京人大附中　姚健刚　获得金牌；北京大学附中　奚晨海　获得银牌；

1996年第37届国际中学生数学奥林匹克竞赛：北京22中　阎珺　获得金牌；

2001年第42届国际中学生数学奥林匹克竞赛：北京人大附中　肖梁　获得金牌；

2002年第43届国际中学生数学奥林匹克竞赛：清华附中　付云皓　获得金牌；

2003年第44届国际中学生数学奥林匹克竞赛：清华附中　付云皓　获得金牌；

共计：金牌11块；银牌3块；铜牌1块。

目前教育部在高等学校组织的数学竞赛只有“数学建模竞赛”，经竞赛组委会批准，只有我校可以推荐中学生组队（每队3人）参加大学生的“数学建模竞赛”，和大学生一起参加评奖（标准完全一致）。我校学生也曾多次获奖（包括全国奖和北京市奖）。

部分获奖情况如下：（2000年以前获奖资料暂缺）

2000年　北京四中　索岳　皮德义　曾依一　新苗特等奖
　　北京四中　李卓蒙　韩准　崔燕宁　新苗一等奖
　　北京师范大学第二附属中学　戴熹　王昕　李森　新苗一等奖
　　北京50中　丁杰　孙喜龙　高鹏远　新苗二等奖
　　北京师范大学第二附属中学　康健　谢安平　孙琦　新苗二等奖
　　组合队　郭婷婷（北京13中）　张韬（北京13中）
　　　　李璋　（北京四中）　新苗二等奖

2001年　北京十一学校　李煦　黄雄韬　郭枫　新苗一等奖
　　北京15中　赵晨　乐晨　王辉　新苗二等奖

2002 年　北京大学附中　刘熹　谭思睿　周栋　新苗一等奖
北京师范大学第二附属中学　任昊宇　薛飞　孙文昊　新苗一等奖
2003 年　北京汇文中学　王超　耿华　王业竑　新苗一等奖
北京四中　钱珑　邹箐箐　张品超　新苗一等奖
2004 年　北京 15 中　付潇鹏　鲁黎阳　张强　新苗特等奖
北京 15 中　税梁宇　洪拓　戴洋　新苗一等奖
北京 15 中　王阳　侯天逸　朱达　新苗二等奖
北京 15 中　许辰　任冠宇　刘博浩　新苗二等奖
2005 年　北京师范大学实验中学　何子淮　张弢　沈熹　新苗二等奖

共计：新苗特等奖 2 队，新苗一等奖 8 队，新苗二等奖 7 队，获奖学生 51 人。

1985 年我校成立时，第一任校长是梅向明教授（时任北京数学会副理事长、北京师范学院教授），名誉校长是江泽涵教授（时任北京数学会理事长、北京大学教授）。后来因为北京数学会改选和梅先生从政，1989 年开始由北京师范大学数学系赵桢教授担任校长（时任北京数学会副理事长、北京师范大学教授）。数学学校的校址也由北京师范学院转到了北京师范大学，江泽涵教授仍任名誉校长一直到江先生去世。2005 年 10 月北京师范大学数学科学学院刘来福教授担任校长（时任北京数学会副理事长、北京师范大学教授），赵桢教授任名誉校长。

为了加强我校和中学之间的沟通，督促和改进我校的教学工作，2005 年暑假前我校还成立了教学指导委员会，聘请一些北京市重点中学的校长、数学教研组长、特级教师等作为委员，由赵桢担任主任，刘来福、明知白担任副主任。已经开过几次例会，另外还与北京师范大学数学科学学院，北京数学会共同组织了北京市在职中学教师参加的数学教学改革座谈会（第一次座谈会已经于 2006 年 10 月在北京师范大学召开，参加座谈会的中学教师大约有 70 人），这样可以使我校的教学更好地适应中学数学教学改革的需要。

20 多年来，我校在高中教学中积累了丰富的教学经验和教学资料，一直想很好地整理一下，以供教师和学生们使用。现在这套“北京数学会北京数学培训学校教学丛书”正是在我校多年教学经验的基础上整理出版的，我们希望它对于高中学生提高数学能力和数学素质能起到积极的作用，对于同学们参加数学竞赛、数学知识应用竞赛以及解决高考中的数学难题及应用题都会起很好的作用。

北京数学培训学校
2007 年 9 月

CONTENT

目录

CONTENTS

第 1 讲　直线与直线束

一、基本知识与性质

解析几何是在坐标系的基础上，用坐标表示点，用方程表示曲（直）线，用代数方法研究几何的一门数学学科，所以在处理解析几何问题时，一定要充分利用代数的有关手段和方法. 在运用代数方法解题时，也要充分注意到问题的几何性质. 几何本质的挖掘，往往有利于问题的解决.

1. 直线方程

(1)一般式：$Ax+By+C=0$　(A，B 不同时为 0).

(2)点斜式：$y-y_0=k(x-x_0)$.

(3)斜截式：$y=kx+b$.

(4)两点式：$\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$.

(5)截距式：$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$　(其中 a，b 为截距).

(6)参数式：$\begin{cases}x=x_0+t\cos\alpha,\\ y=y_0+t\sin\alpha,\end{cases}$　(t 为参数).

(7)点法式：已知直线 l 经过点 $P_0(x_0,y_0)$ 且 l 的法向量 $\boldsymbol{n}=(A,B)$，则直线 l 的点法式为

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0.$$

(8)法线式：设原点 O 到直线 l 的距离为 p，并且 l 的垂线 OD 的倾斜角为 α，则 l 的方程为：

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0.$$

此方程由直线 l 的法向量$\overrightarrow{OD}$所确定，故称为 l 的法线式方程.

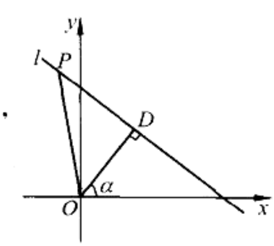

图 1-1

事实上，如图 1-1，设 OD 的倾斜角为 α，且 $|OD|=p$，则$\overrightarrow{OD}=(p\cos\alpha,p\sin\alpha)$，设点 $P(x,y)$ 为直线 l 上任意一点，则$\overrightarrow{OP}=(x,y)$，

又因为 $OD\perp l$ 且 $|\overrightarrow{OD}|=p$，

所以向量$\overrightarrow{OP}$在向量$\overrightarrow{OD}$上的射影的长度为 p.

所以$\left|\dfrac{\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OD}}{|\overrightarrow{OP}|}\right|=p$，即：$x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$.

2. 直线束：直线 $l_1:a_1x+b_1y+c_1=0$ 与直线 $l_2:a_2x+b_2y+c_2=0$ 相交于 P 点，则过 P 点的直线束方程为：$\lambda_1(a_1x+b_1y+c_1)+\lambda_2(a_2x+b_2y+c_2)=0$(式中 $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbf{R}$ 且 $\lambda_1^2+\lambda_2^2\neq0$).

如果 $\lambda_1\neq0$，直线束方程可写成：

$a_1x+b_1y+c_1+\lambda(a_2x+b_2y+c_2)=0$(式中 $\lambda=\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}$，该直线束不含直线 l_2).

3. 已知直线 $l_1:a_1x+b_1y+c_1=0$，直线 $l_2:a_2x+b_2y+c_2=0$.

(1)直线 l_1 与 l_2 平行$\Leftrightarrow a_1b_2-a_2b_1=0$.

(2)直线 l_1 与 l_2 垂直$\Leftrightarrow a_1a_2+b_1b_2=0$.

(3)直线 l_1 与 l_2 相交,当直线 l_1 到直线 l_2 的角为 θ 时,则 $\tan\theta=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$;又当直线 l_1 与 l_2 的夹角为 $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$时,则 $\tan\theta=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|$(其中 k_1、k_2 分别为直线 l_1 与 l_2 的斜率).

4. 点 $P(x_0,y_0)$到直线 $l:Ax+By+C=0$ 的距离为 $d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

二、例题

例 1　设点 $P(-2,2)$到直线束$(2+\lambda)x-(1+\lambda)y-2(3+2\lambda)=0$ 的距离为 d_λ,求证:无论 λ 取何值,总有:$d_\lambda<4\sqrt{2}$.

证明　将直线束方程写成标准式

$$2x-y-6+\lambda(x-y-4)=0(\text{不含直线 } x-y-4=0).$$

令 $2x-y-6=0$ 与 $x-y-4=0$,

得 $x=2,y=-2$.

故直线束恒过定点 $M(2,-2)$.

当过点 $M(2,-2)$且与直线 PM 垂直的直线有最大距离 $4\sqrt{2}$,直线 PM 的斜率为 $k_{PM}=\frac{2-(-2)}{-2-2}=-1$,故过定点 M,且垂直于 PM 的直线方程为$\frac{y+2}{x-2}=1$,整理得,$x-y-4=0$,但该直线不含在直线束内,故取不到等号. 所以 $d_\lambda<4\sqrt{2}$.

例 2　设动点 P,P'的坐标分别为$(x,y)(x',y')$,它们满足$\begin{cases}x'=3x+2y+1,\\y'=x+4y-3,\end{cases}$试问 P,P'能否同在同一直线上运动?

解　假设 P,P'都在直线 $Ax+By+C=0$　①上运动,则有 $Ax'+By'+C=0$.　②

将 $x'=3x+2y+1,y'=x+4y-3$ 代入②得:$A(3x+2y+1)+B(x+4y-3)+C=0$ 即 $(3A+B)x+(2A+4B)y+(A-3B+C)=0$.　③

方程①③代表同一直线,故有

$$\frac{3A+B}{A}=\frac{2A+4B}{B}=\frac{A-3B+C}{C},\qquad ④$$

由④中前一个等式,可得 $B=2A$ 或 $B=-A$.

当 $B=2A$ 时,由④中后一个等式,得 $C=-\frac{5}{4}A$. 当 $B=-A$ 时,由④中后一个等式,得 $C=4A$. 从而,有 $A:B:C=4:8:(-5)$或 $A:B:C=1:(-1):4$.

因此,P,P'可在同一直线 $x-y+4=0$ 上运动,也可在同一直线 $4x+8y-5=0$ 上运动.

例 3　S 是直线 $l_1:7x-5y+8=0$ 与直线 $l_2:3x+4y-13=0$ 的交点,点 $P(3,7)$,$Q(11,13)$所成直线 PQ 上有两点 A,B,其中 P 在 AQ 之间,B 在 PQ 之间,并且$\frac{|PA|}{|AQ|}=\frac{|PB|}{|BQ|}=\frac{2}{3}$,在不求出 S 的坐标的情况下,求直线 SA 和 SB 的方程.

解　因为 P 在 AQ 之间,所以 A 点是 PQ 的外分点,所以$\frac{PA}{AQ}=-\frac{2}{3}$,所以 A 的坐标为

$$\begin{cases} x_A=\dfrac{x_P+\lambda x_Q}{1+\lambda}=-13, \\ y_A=\dfrac{y_P+\lambda y_Q}{1+\lambda}=-5. \end{cases}$$

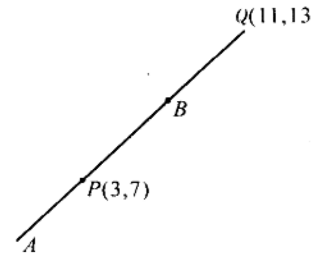

图 1-2

同理：$x_B=\dfrac{31}{5}$，$y_B=\dfrac{47}{5}$.

过 S 的直线束方程为

$$7x-5y+8+\lambda(3x+4y-13)=0,$$

SA 是直线束中的一条直线，把 $A(-13,-5)$ 代入，得：$\lambda_A=-\dfrac{29}{36}$.

所以直线 SA：$7x-5y+8-\dfrac{29}{36}(3x+4y-13)=0$，整理得：$165x-296y+665=0$.

同理代入 B 点坐标，得 $\lambda_B=-\dfrac{11}{109}$，可求出直线 SB：$723x-584y+1\,007=0$.

例 4 $\triangle ABC$ 的顶点 $C(x_0,y_0)$ 的坐标满足不等式 $x^2+y^2\leqslant 8+2y$，$y\geqslant 3$，边 AB 在 x 轴上，已知点 $Q(0,1)$ 与直线 AC 与 BC 的距离均为 1，求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

解 设 A 点坐标为 $(a,0)$，则 AC 方程为 $\dfrac{y}{y_0}=\dfrac{x-a}{x_0-a}$ 即 $-y_0(x-a)+y(x_0-a)=0$，点 $Q(0,1)$ 到 AC 的距离为 1，故 $\left|\dfrac{ay_0+(x_0-a)}{\sqrt{y_0^2+(x_0-a)^2}}\right|=1\Rightarrow(y_0-2)a^2+2x_0a-y_0=0$ 得到 A 的两个横坐标 a_1,a_2，故 $|AB|=|a_2-a_1|=\dfrac{\sqrt{\Delta}}{y_0-2}=\dfrac{2\sqrt{y_0^2+x_0^2-2y_0}}{y_0-2}$.

因为 $C(x_0,y_0)$ 满足 $x_0^2+y_0^2-2y_0\leqslant 8$，$y_0\geqslant 3$，

所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}y_0|AB|=\dfrac{y_0}{y_0-2}\sqrt{x_0^2+y_0^2-2y_0}\leqslant\sqrt{8}\left(1+\dfrac{2}{y_0-2}\right)\leqslant 6\sqrt{2}$.

当 C 的坐标为 $(\pm\sqrt{5},3)$ 时，$S_{\triangle ABC}$ 可取最大值 $6\sqrt{2}$.

例 5 在 xOy 平面内，设 $\triangle ABC$ 是以 C 为直角的直角三角形，斜边 AB 的长度为 60，BC 与 AC 边上的中线所在直线方程分别为 $y=x+3$ 和 $y=2x+4$，求 $\triangle ABC$ 的面积.

解 如图 1-3，设中线的交点即 $\triangle ABC$ 的重心为 G，AB，AC 的中点为 D，E，AE 的斜率 $k_1=1$，BG 的斜率 $k_2=2$.

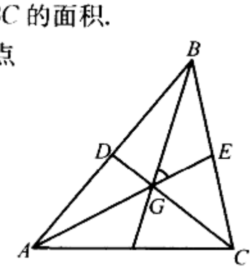

图 1-3

所以 $\tan\angle BGE=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}=\dfrac{1}{3}$.

因为 $\angle ACB=90^\circ$，所以 $DC=\dfrac{1}{2}AB$.

所以 $DG=\dfrac{1}{3}DC=\dfrac{1}{6}AB=10$.

在 $\triangle ABG$ 中，易证 $AB^2=AG^2+BG^2-2AG\cdot BG\cdot\cos\angle AGB$，

所以 $2AG\cdot BG\cdot\cos(\pi-\angle AGB)=\dfrac{1}{2}AB^2-2DG^2=1\,600$，

所以 $S_{\triangle ABC}=3S_{\triangle ABG}=3\times\dfrac{1}{2}\times AG\cdot BG\cdot\sin\angle BGE=400$.

例 6 在平面直角坐标系中，求方程

$$\frac{|x+y|}{2a}+\frac{|x-y|}{2b}=1\quad(a>0,b>0)$$

表示的曲线所围成的图形面积.

解　直线 $l_1:y-x=0$ 与直线 $l_2:y+x=0$ 将平面 xOy 分成四个区域：

(Ⅰ) $\begin{cases}y+x\geqslant0,\\x-y\geqslant0,\end{cases}$　(Ⅱ) $\begin{cases}x+y\geqslant0,\\x-y\leqslant0,\end{cases}$

(Ⅲ) $\begin{cases}x+y\leqslant0,\\x-y\leqslant0,\end{cases}$　(Ⅳ) $\begin{cases}x+y\leqslant0,\\x-y\geqslant0,\end{cases}$

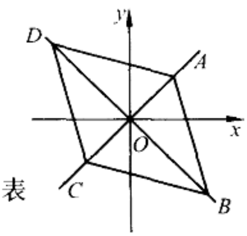

图 1-4

在区域(Ⅰ)中，方程 $\frac{|x+y|}{2a}+\frac{|x-y|}{2b}=1$，成为 $\frac{x+y}{2a}+\frac{x-y}{2b}=1$，它表示在区域(Ⅰ)中的一条线段，令 $x-y=0$ 得到与直线 l_1 的一个交点 $A(a,a)$，令 $x+y=0$，得到与直线 l_2 的一个交点 $B(b,-b)$.

同理可得到交点 $C(-a,-a)$，$D(-b,b)$. 故题设所围成的图形为菱形 $ABCD$(如图 1-4)，对角线 $|AC|=2\sqrt{2}a$，$|BD|=2\sqrt{2}b$，

所以 $S_{四边形ABCD}=4ab$.

例 7　求平面上整点(纵横坐标都是整数的点)到直线 $y=\frac{5}{3}x+\frac{4}{5}$ 的距离中的最小值.

解　设整点为 (x_0,y_0)，则它到直线 $25x-15y+12=0$ 的距离为

$$d=\frac{|25x_0-15y_0+12|}{\sqrt{25^2+(-15)^2}}=\frac{|25x_0-15y_0+12|}{5\sqrt{34}}.$$

由于 $x_0,y_0\in\mathbf{Z}$，故 $25x_0-15y_0$ 为 5 的倍数，于是有 $|25x_0-15y_0+12|\geqslant2$. 当 $x_0=-1$，$y_0=-1$ 时，$|25x_0-15y_0+12|=2$，所以所求最小值为 $\frac{\sqrt{34}}{85}$.

例 8　在直角坐标平面上，求满足不等式组 $\begin{cases}y\leqslant3x,\\y\geqslant\frac{1}{3}x,\\x+y\leqslant100\end{cases}$ 的整点个数.

解　满足不等式组的三条直线围成的图形是△AOB(如图 1-5)，$A(75,25)$，$B(25,75)$，$C(100,0)$，$D(0,100)$. 线段 CD 上有整点 101 个，CD 向左平移一个单位后，线段上有 100 个……向左平移一个单位后，只有一个整点(原点)，故△COD 中(含边界)共有整点 $1+2+3+\cdots+101=5\ 151$ 个.

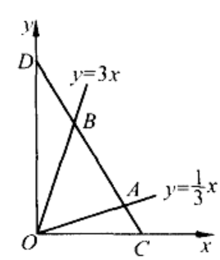

图 1-5

令 $y=0$(即 x 轴)，OC 有整点 100 个(不含原点). $y=1$ 与 AO，AC 相交于 E，F. 线段 EF 上有整点 $99-3=96$ 个(不含 OA 上的点). 令 $y=2$，有整点 $98-6=92$ 个……令 $y=24$ 时，有整点 4 个. 故△AOC 内有整点：$4+8+\cdots+92+96+100=1\ 300$ 个(不含 OA 边上的整点)，由对称可知△OBD 内有整点 1 300 个，故满足不等式组的整点共有 $5\ 151-2\times1\ 300=2\ 551$ 个.

例 9　给定曲线系 $2(2\sin\theta-\cos\theta+3)x^2-(8\sin\theta+\cos\theta+1)y=0$　(θ 为参数)，求该曲线系在直线 $y=2x$ 上所截得的弦长的最大值.

解　显然，该曲线系恒过原点，而直线 $y=2x$ 也过原点，所以曲线系在 $y=2x$ 上截得的弦长仅取决于曲线系与 $y=2x$ 的另一个交点的坐标.

把 $y=2x$ 代入曲线系方程，得

$$(2\sin\theta-\cos\theta+3)x-(8\sin\theta+\cos\theta+1)=0.$$

又显然有 $2\sin\theta-\cos\theta+3\neq0$，故当 $x\neq0$ 时，有 $x=\dfrac{8\sin\theta+\cos\theta+1}{2\sin\theta-\cos\theta+3}$.

令 $\sin\theta=\dfrac{2u}{1+u^2}$，$\cos\theta=\dfrac{1-u^2}{1+u^2}$，则 $x=\dfrac{8u+1}{2u^2+2u+1}$. 故有 $2xu^2+2(x-4)u+(x-1)=0$.

由 $u\in\mathbf{R}$ 知，当 $x\neq0$ 时，关于 u 的方程的判别式

$$\Delta=[2(x-4)]^2-8x(x-1)=4(-x^2-6x+16)\geqslant0,$$

即：$x^2+6x-16\leqslant0$ 且 $x\neq0$，

解得：$-8\leqslant x\leqslant2$ 且 $x\neq0$，

因此，$|x|_{\max}=8$.

由 $y=2x$，得 $|y|_{\max}=16$，

故所求弦长的最大值为 $\sqrt{8^2+16^2}=8\sqrt{5}$.

例 10　设 a,b,k,p 分别表示同一直线的横截距，纵截距，斜率和原点到这条直线的距离，证明下列关系式：

(1) $ak+b=0$.

(2) $a^2k^2-p^2(1+k^2)=0$.

(3) $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}-\dfrac{1}{p^2}=0$.

解　设直线的法线式方程为 $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$，易知此直线在 x 轴，y 轴上的截距与斜率分别为 $a=\dfrac{p}{\cos\alpha}$，　$b=\dfrac{p}{\sin\alpha}$，　$k=-\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$，

所以 $ak+b=\dfrac{p}{\cos\alpha}\left(-\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)+\dfrac{p}{\sin\alpha}=0$，

$$a^2k^2-p^2(1+k^2)=\frac{p^2}{\cos^2\alpha}\cdot\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}-p^2\left(1+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}\right)$$
$$=\frac{p^2}{\sin^2\alpha}-\frac{p^2}{\sin^2\alpha}=0,$$

$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{1}{p^2}(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=\dfrac{1}{p^2}$，即 $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}-\dfrac{1}{p^2}=0$.

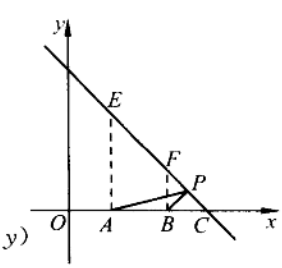

图 1-6

例 11　在直线 $l: x+y-5=0$ 上找一点 $P(x,y)$，使得点 $P(x,y)$ 对于 $A(1,0)$，$B(3,0)$ 的视角 $\angle APB$ 最大.

解　如图 1-6，$|AB|=2$，P 为 l 上一点，作 AE，BF 垂直 AB 且分别交 l 于 E，F，显然 $\angle AEB<\angle AFB=\dfrac{\pi}{4}$.

当 P 点不与 E，F 重合时，直线 AP，BP 的斜率分别为 $k_{PA}=\dfrac{y}{x-1}$，$k_{PB}=\dfrac{y}{x-3}$.

设 $\angle APB=\alpha$，并记 $\tan\alpha=a$.

(i) 当 P 位于上半平面时，

$$a=\frac{k_{PB}-k_{PA}}{1+k_{PB}\cdot k_{PA}}=\frac{\dfrac{y}{x-3}-\dfrac{y}{x-1}}{1+\dfrac{y}{x-1}\cdot\dfrac{y}{x-3}},$$

整理得　$a(x^2-4x+3+y^2)=2y$.　　　　(＊)

把 $x=5-y$ 代入(＊)式得：$ay^2-(3a+1)y+4a=0$，

此时 $\Delta=(3a+1)^2-16a^2\geqslant 0$，即 $7a^2-6a-1\leqslant 0$，解得 $-\frac{1}{7}\leqslant a\leqslant 1$，显然 $a>0$，故 $0<a\leqslant 1$，故 $\angle APB\leqslant\frac{\pi}{4}$，所以 $\alpha_{\max}=\frac{\pi}{4}$.

(ii)当 P 位于下半平面时，

$$a=\frac{k_{PA}-k_{PB}}{1+k_{PA}\cdot k_{PB}}=\frac{\dfrac{y}{x-1}-\dfrac{y}{x-3}}{1+\dfrac{y}{x-1}\cdot\dfrac{y}{x-3}},$$

整理并将 $x=5-y$ 代入，可得 $ay^2-(3a-1)y+4a=0$.

同理由 $\Delta\geqslant 0$，得 $7a^2+6a-1\leqslant 0$，

解之，得 $-1\leqslant a\leqslant\frac{1}{7}$.

从而 $a_{\max}=\frac{1}{7}$，$\alpha_{\max}=\arctan\frac{1}{7}$，

综上所述，$\angle APB$ 的最大值为 $\frac{\pi}{4}$，此时点 P 的坐标为 $(3,2)$.

例 12　在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle A=60^\circ$，过该三角形的内心 I 作直线平行于 AC，交 AB 于 F，在 BC 边上取点 P，使 $3BP=BC$，求证：$\angle BFP=\frac{1}{2}\angle B$.

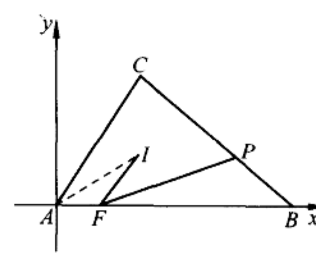

图 1-7

分析与解　因 $\tan\angle BFP=k_{PF}$，故只需用 $\angle B$ 表示点 P 与 F 的坐标即可，如图 1-7，建立直角坐标系，设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R，由正弦定理，知 $B(2R\sin C,0)$，$C(R\sin B,\sqrt{3}R\sin B)$.

又因为 $3BP=BC$，

所以 P 分 CB 所成比为 2.

利用定比分点公式可得 P 点坐标 $\left(\frac{R}{3}(4\sin C+\sin B),\frac{\sqrt{3}}{3}R\sin B\right)$. 设 $\triangle ABC$ 的内切圆半径为 r，三边长分别为 a,b,c，则由 $\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}(a+b+c)r$，得

$$r=\frac{bc\sin A}{a+b+c}=\frac{2R\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C}{\sin A+\sin B+\sin C}$$
$$=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=2R\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

故 $x_F=x_I-y_I\cot 60^\circ=r\cot 30^\circ-r\cot 60^\circ=\frac{4\sqrt{3}}{3}R\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$.

从而 $k_{PF}=\dfrac{y_P}{x_P-x_F}$

$$=\frac{\sqrt{3}\sin B}{4\sin(120^\circ-B)+\sin B-4\sqrt{3}\sin\frac{B}{2}\sin\left(60^\circ-\frac{B}{2}\right)}$$

$$=\frac{\sin B}{1+\cos B}=\tan\frac{B}{2},$$

因此$\angle BFP=\dfrac{1}{2}\angle B$.

三、习题

1. 线段 AB 的端点 A 在直线 $y=x$ 上，端点 B 在直线 $y=2x$ 上，且 $|AB|=4$，求 AB 中点的轨迹方程.

2. 给定一点 $P(3,1)$ 及两条直线 $l_1: x+2y+3=0$，$l_2: x+2y-7=0$，试求过 P 且与 l_1，l_2 都相切的圆的方程.

3. 已知 $f(x)=x^2-6x+5$，问满足 $f(x)+f(y)\leqslant 0$ 和 $f(x)-f(y)\geqslant 0$ 的点(x,y)在平面上的什么范围?

4. 证明：直角坐标平面内，过点 $A(\sqrt{3},0)$的直线系中，只有一条直线上有无数个有理点.

5. 已知平面上两点 $A(4,1)$和 $B(0,4)$，在直线 $l: 3x-y-1=0$ 上找一点 M，使$|MA|-|MB|$最大，求点 M 的坐标.

6. 在坐标平面上是否存在一个含有无穷多条直线 $l_1,l_2,\cdots,l_n,\cdots$的直线系，它满足条件：

(1)点$(1,1)\in l_n$，$n=1,2,3,\cdots$

(2)$k_{n+1}=a_n-b_n$，其中 k_{n+1} 是 l_{n+1} 的斜率. a_n，b_n 是 l_n 在 x 轴和 y 轴上的截距，$n=1,2,3,\cdots$

(3)$k_n\cdot k_{n+1}\geqslant 0$，$n=1,2,3$，

证明你的结论.

7. 设 A,B,C,D 是一条直线上依次排列的四个不同的点，分别以 AC,BD 为直径的两圆相交于 X 和 Y. 直线 XY 交 BC 于 Z. 若 P 为直线 ZY 上异于 Z 的一点，直线 CP 与以 AC 为直径的圆相交于 C 及 M，直线 BP 与 BD 为直径的圆相交于 B 及 N. 试证：AM,DN 和 ZY 三条直线共点.

8. 如图 1-8，$\odot O_1$ 和$\odot O_2$ 与$\triangle ABC$ 的三边所在直线都相切，E,F,G,H 为切点，且 EG,FH 的延长线交于 P 点，求证：直线 PA 与 BC 垂直.

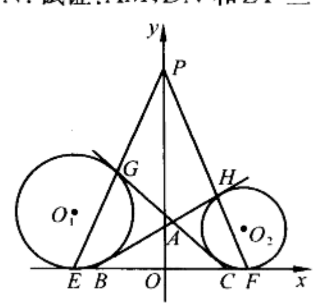

图 1-8

9. 当 $\theta\in[0,2\pi)$，求直线 $x\cos\theta+y\sin\theta=11$ 与直线 $x\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)-y\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=13$ 的交点的轨迹方程.

第2讲　圆

一、基本知识与性质

1. 圆方程的三种基本形式

(1)标准方程：$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$(其中(a,b)为圆心，r为圆的半径).

(2)参数方程：$\begin{cases}x=a+r\cos\theta,\\ y=b+r\sin\theta\end{cases}$($\theta$为参数).

(3)一般方程：$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$(其中$D^2+E^2-4F>0$，圆心$\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$，半径$r=\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$).

2. 圆的幂和根轴

(1)圆的幂

过定点A任作直线交定圆于B，C两点，则$AB\cdot AC$为定值. 该定值称作定点A到定圆的幂.

(2)圆的切线方程及切线长

设圆的一般方程为：$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$.

①切点(x_1,y_1)处的切线方程为$x_1x+y_1y+D\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+E\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)+F=0$；

②设$P(x_0,y_0)$为圆外一点，从P_0引圆的切线. 切点为P_1，则切线长为

$$|P_0P_1|=\sqrt{x_0^2+y_0^2+Dx_0+Ey_0+F}.$$

(3)圆的根轴及共轴圆系

到两个不同心的已知圆

C_i：$x^2+y^2+D_ix+E_iy+F_i=0(i=1,2)$的切线长相等点的轨迹称为该两圆的根轴，共根轴的圆系称为共轴圆系，共轴圆系的方程为

$$\lambda_1(x^2+y^2+D_1x+E_1y+F)+\lambda_2(x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2)=0\quad(\lambda_1^2+\lambda_2^2\neq0).$$

当$\lambda_1=-\lambda_2$，共轴圆系方程变为直线

$(D_1-D_2)x+(E_1-E_2)y+(F_1-F_2)=0$，即为圆的根轴方程.

3. 直线与圆的位置关系

设直线l：$y=kx+m$，圆为$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$，圆心(x_0,y_0)到直线l的距离为d，则

直线与圆相切$\Leftrightarrow d=r$，

直线与圆相交$\Leftrightarrow d<r$，

直线与圆相离$\Leftrightarrow d>r$.

或者

把$y=kx+m$代入圆方程化简可得一个一元二次方程. 设其为$ax^2+bx+c=0$，$\Delta=b^2-4ac$，则直线与圆的位置关系为：

相切$\Leftrightarrow\Delta=0$，

相交$\Leftrightarrow\Delta>0$，

相离$\Leftrightarrow\Delta<0$.

二、例题

例 1 设圆满足:①截 y 轴所得弦长为 2;②被 x 轴分成两段圆弧的比为 3∶1;③圆心到直线 $l:x-2y=0$ 的距离最小.求该圆的方程.

解 设圆心为 $P(a,b)$,半径为 r.由条件①得 $r^2=a^2+1$,由条件②得 $r^2=2b^2$.由上述两式消去 r^2,得 $2b^2-a^2=1$.又 P 到直线 $x-2y=0$ 的距离 $d=\frac{|a-2b|}{\sqrt{5}}$,于是 $5d^2=(a-2b)^2=a^2+4b^2-4ab\geqslant a^2+4b^2-2(a^2+b^2)=2b^2-a^2=1$.当且仅当 $a=b$ 时取等号.此时 d 取最小值 $\frac{\sqrt{5}}{5}$,且 $\begin{cases}a=1,\\b=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-1,\\b=-1,\end{cases}$ $r=\sqrt{2}$.

故所求圆的方程为 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$ 或 $(x+1)^2+(y+1)^2=2$.

例 2 圆 $x^2+y^2=4$ 的切线交 x 轴,y 轴于 A,B 两点,求 AB 中点 M 的轨迹方程.

解 如图 2-1 所示.设切点为 $T(2\cos\theta,2\sin\theta)$,则切线 AB 的方程为:

$$x\cos\theta+y\sin\theta-2=0.$$

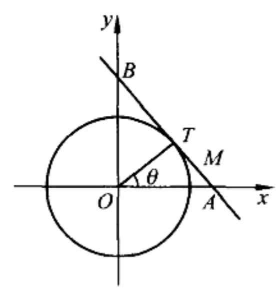

图 2-1

令 $y=0$,得 $x=\frac{2}{\cos\theta}$,即 $A(\frac{2}{\cos\theta},0)$.

令 $x=0$,得 $y=\frac{2}{\sin\theta}$,即 $B(0,\frac{2}{\sin\theta})$.

则 AB 中点 $M(x,y)$ 满足

$$\begin{cases}x=\frac{1}{\cos\theta},\\ y=\frac{1}{\sin\theta},\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cos\theta=\frac{1}{x},\\ \sin\theta=\frac{1}{y},\end{cases}$$

消去 θ,得 $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=1$ 即为所求轨迹方程.

说明 若设切点 $T(x_0,y_0)$,则过⊙O:$x^2+y^2=R^2$ 上一点 $T(x_0,y_0)$ 的切线方程为

$$xx_0+yy_0=R^2.$$

例 3 自 $P(x_0,y_0)$ 作圆 $x^2+y^2=R^2$ 的两切线.切点分别为 P_1,P_2,求切点弦 P_1P_2 所在直线的方程.

解 设切点 P_1,P_2 的坐标分别为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$,则过 P_1,P_2 的切线方程分别

$$x_1x+y_1y=R^2,\quad ①\qquad x_2x+y_2y=R^2.\quad ②$$

因为两切线均过 $P_0(x_0,y_0)$ 点,所以有:

$$x_1x_0+y_1y_0=R^2,\quad ③\qquad x_2x_0+y_2y_0=R^2,\quad ④$$

由③④知,P_1,P_2 在直线 $x_0x+y_0y=R^2$ 上,

所以切点弦 P_1P_2 所在直线方程为 $x_0x+y_0y=R^2$.

例 4 讨论圆系 $x^2+y^2+2kx+(4k+10)y+10k+20=0(k\in\mathbf{R},k\neq-1)$ 中任意不同的两个圆的位置关系.

解 将圆系方程化成 $(x+k)^2+[y+(2k+5)]^2=5(k+1)^2$,其圆心为 $(-k,-2k-5)$,半径为 $\sqrt{5}|k+1|$.设当 k 取两个不同的值 k_1,k_2 时,圆系中两圆的圆心分别为 $(-k_1,-2k_1-5)$ 和 $(-k_2,-2k_2-5)$,半径分别为 $\sqrt{5}|k_1+1|$ 和 $\sqrt{5}|k_2+1|$.为讨论两圆的位置关系,可以研究两