锦囊妙解

中学生 数理化 系列

主编/吴小菲

不可不知的素材

MATH

九年级数学

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

锦囊妙解

中学生数理化系列

不可不知的素材

九年级数学

总策划　司马文

丛书主编　万强华

编　　委　刘　芬　江华平　欧阳晔　郑永盛
　　　　　吴小平　管厚坤　胡志芳　吴小菲
　　　　　王智军　张和良　张延良　黄　维

本册主编　吴小菲

编　　者　郭　鲁　王　萌　郭　君
　　　　　罗月珍　魏圣男　汪建丽

机械工业出版社

本书是“锦囊妙解中学生数理化系列”的《不可不知的素材　九年级数学》分册，它体现了新课标改革精神，不受任何版本限制。书中体现了系统的知识讲解，不设置习题。设置有知识表解、知识与规律、身边的数学和联系生活应用题四个栏目。本书内容新颖，题材广泛，目的是要从本质上提高学生理解知识的能力，以及分析问题和解决问题的能力。

图书在版编目(CIP)数据

不可不知的素材. 九年级数学/吴小菲主编. —北京：机械工业出版社，2006. 6
(锦囊妙解中学生数理化系列)
ISBN 7-111-18906-X

Ⅰ. 不...　Ⅱ. 吴...　Ⅲ. 数学课-初中-教学参考资料　Ⅳ. G634. 73

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2006)第 056611 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037)
策划编辑：石晓芬　　责任编辑：石晓芬　左卫霞
责任印制：洪汉军
三河市宏达印刷有限公司印刷
2006 年 8 月第 1 版 · 第 1 次印刷
169mm×230mm · 9 印张 · 225 千字
定价：13. 00 元

前　言
Preface

武林竞技，想要取胜，或“一把枪舞得风雨不透”，或有独门绝技，三招之内，挑敌于马下。古有“锦囊妙计”，今有“锦囊妙解”辅导系列。继“锦囊妙解——中学生英语系列”、“锦囊妙解——中学生语文系列”之后，我们又隆重推出了“锦囊妙解——中学生数理化系列”。

这是一套充满智慧的系列丛书，能使你身怀绝技，轻松过关斩将，技增艺长。这更是一套充满谋略的系列丛书，能使你做到“风雨不透”，意外脱颖而出，圆名校梦。

这套丛书紧密结合教材内容，力求将教学需求和实际中高考要求完美结合。在体例设计、内容编排、方法运用、训练考查等方面都充分考虑各个年级学生的实际，由浅入深，循序渐进，稳步提高，并适度、前瞻性地把握中高考动态和趋向，在基础教学中渗透中高考意识。

本丛书作者均为多年在初中、高中一线教学的精英，每册都由有关专家最后审稿定稿。

这套丛书按中高考数、理、化必考的知识点分成三大系列：《不可不读的题》、《不可不知的素材》和《不可不做的实验》。从七年级到高考，并按数学、物理、化学分类，配套中学新课标教材，兼顾老教材，共有36册。

本丛书有如下特点：

1. 选材面广，知识点细，针对性强

在《不可不读的题》中，我们尽量选用当前的热点题，近几年各地的中高考题，并有自编的创新题。在《不可不知的素材》中，我们力求做到：知识面广、知识点细而全、知识网络清晰，并增加一些中高考的边缘知识和前瞻性知识。在《不可不做的实验》中，我们针对目前中学生实验水平低、实验技能差、实验知识缺乏的情况，结合教材的知识网络，详细而全面地介绍了实验。有实验目的、原理、步骤、仪器，实验现象、结论、问题探讨，并增加了实验的一般思路和方法。除介绍课本上的学生实验和教师的演示实验外，还增加了很多中高考中出现的课外实验和探究实验。

2. 指导到位

本丛书在指导学生处理好学习中的基础知识的掌握、解题能力的娴熟、实验能力的提高方面，有意想不到的功效。选择本丛书潜心修炼，定能助你考场

上游刃有余,一路顺风,高唱凯歌。

3. 目标明确

在强调学生分析问题和解决问题能力的同时,在习题、内容上严格对应中高考命题方式,充分体现最新中高考的考试大纲原则和命题趋势。

梦想与你同在,我们与你同行。我们期盼:静静的考场上,有你自信的身影。我们坚信:闪光的金榜上,有你灿烂的笑颜。

本丛书特邀江西师范大学附属中学高级教师、南昌市学科带头人万强华担任主编。本分册由吴小菲主编。

我们全体策编人员殷切期待广大读者对丛书提出宝贵意见。无边的学海仍然警示着我们:只有不懈努力,才会取得胜利,走向辉煌。

编　者

2006年6月

目 录
Contents

前言
第一章 一元二次方程 ……… 1
第一节 一元二次方程及其解法 ……… 1
第二节 一元二次方程根的判别式及根与系数的关系 ……… 6
第三节 一元二次方程的应用题 ……… 10
第二章 解直角三角形 ……… 21
第一节 锐角三角函数 ……… 21
第二节 解直角三角形 ……… 28
第三章 圆 ……… 38
第一节 圆的有关性质 ……… 38
第二节 直线与圆的位置关系 ……… 45
第三节 圆与圆之间的位置关系 ……… 53
第四节 正多边形和圆 ……… 56
第四章 函数及其图像 ……… 70
第一节 函数初步知识 ……… 70
第二节 一次函数及其图像 … 77
第三节 二次函数及其图像 … 88
第四节 反比函数及其图像 ……… 102
第五章 统计初步 ……… 115
第一节 数据的处理 ……… 115
第二节 数据的表示方法 … 121

第一章 一元二次方程

第一节 一元二次方程及其解法

知识表解

- 一元二次方程
  - 一元二次方程的一般形式
  - 一元二次方程的解法
    - 直接开平方法
    - 配方法
    - 公式法
    - 因式分解法
  - 二次三项式的因式分解(用公式法)
  - 可化为一元二次方程的方程
    - 高次方程 $\xrightarrow[\text{换元}]{\text{降次}}$ 一元二次方程
    - 分式方程 $\xrightarrow[\text{换元}]{\text{去分母}}$ 整式方程 $\longrightarrow$ 验根

知识与规律

1. 一元二次方程的概念

(1)定义:只含有一个未知数,且未知数的最高次数是2,这样的整式方程叫做一元二次方程.

(2)一元二次方程的一般形式:$ax^2+bx+c=0(a\neq0)$,其中ax^2叫做二次项,a叫做二次项系数,bx叫做一次项,b叫做一次项系数,c叫做常数项.

(3)判定方程是否为一元二次方程的方法.

①根据定义判定:将方程进行去分母,去括号,移项,合并同类项等变形后,如果能满足两个条件:(ⅰ)只含一个未知数;(ⅱ)未知数的最高次数是2.那么,这个方程就是一元二次方程,否则,它就不是一元二次方程.

②根据一般形式判定:将方程进行去分母,去括号,移项,合并同类项等变形后,如果能化为一元二次方程的一般形式:$ax^2+bx+c=0(a\neq0)$,那么它就是一元二次方程.否则,它就不是一元二次方程.

例1 判断下列方程是不是一元二次方程.

1)$2x^2+4x-1=0$;

2)$x^2+y=0$;

3)$4x^2=\sqrt{3}x$;

4)$(x-1)(2x+1)=2x^2$;

5)$\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}=5$;

6)$ax^2+x-3=0$(a为常数).

解 一元二次方程的一般形式是$ax^2+bx+c=0$(a、b、c是常数,$a\neq0$).

1)$2x^2+4x-1=0$是一元二次方程.这时$a=2,b=4,c=-1$.

2)$\because x^2+y=0$含有两个未知数

$\therefore x^2+y=0$不是一元二次方程.

3)原方程化为$4x^2-\sqrt{3}x=0$是一元二次方程,这时$a=4,b=-\sqrt{3},c=0$.

4)原方程化为$x+1=0$不是一元二次

方程.

5) $\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}=5$ 不是整式方程,$\therefore \frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}=5$ 不是一元二次方程.

6) $ax^2+x-3=0$ 中,当 $a=0$ 时不是一元二次方程,当 $a\neq0$ 时 $ax^2+x-3=0$ 是一元二次方程.

点评　本题主要考查一元二次方程的概念,一元二次方程必须具备:1)是整式方程;2)只含有一个未知数;3)含有未知数的项最高次数是2;4)二次项系数不等于0.

2. 一元二次方程的解法

(1)直接开平方法.

利用平方根的定义直接开平方求一元二次方程的根的方法叫做直接开平方法.

直接开平方法适用于解形如 $(x+a)^2=b(b\geqslant0)$ 的一元二次方程.

例2　用开平方法解下列方程:

1) $4x^2-9=0$;

2) $4(x-3)^2-3=0$;

3) $(5m+1)^2+2=0$;

4) $(3x-2)(3x+2)=1$.

解　1)由 $4x^2-9=0$ 得 $x^2=\frac{9}{4}$,

$\therefore x=\pm\frac{3}{2}$.

$\therefore x_1=\frac{3}{2},x_2=\frac{3}{2}$.

2)由 $4(x-3)^2-3=0$ 得 $(x-3)^2=\frac{3}{4}$

$\therefore x-3=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\therefore x_1=3+\frac{\sqrt{3}}{2},x_2=3-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3)由 $(5m+1)^2+2=0$ 得 $(5m+1)^2=-2$

$\because$ 负数没有平方根

$\therefore$ 这个方程无实数根.

4)原方程可以为 $9x^2-5=0$

$\therefore x^2=\frac{5}{9},x=\pm\frac{\sqrt{5}}{3}$.

$\therefore x_1=\frac{\sqrt{5}}{3},x_2=-\frac{\sqrt{5}}{3}$.

点评　用开平方法解一元二次方程,应将方程先化为 $(ax+b)^2=m$ 的形式,若 $m<0$,则方程无实数根.

(2)配方法.

对于一个一元二次方程,首先把它化为一边含有未知数的完全平方式,另一边是非负常数,再用开平方法,这种求一元二次方程的根的方程叫做配方法.

配方法解一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的一般步骤:

①二次项系数化为1:方程两边同除以二次项系数.

②移项:使方程左边为含有未知数的项,右边为常数项.

③配方:方程两边都加上一次项系数一半的平方,把原方程化为 $(x+m)^2=n$ 的形式.

④用直接开平方法解变形后的方程.

例3　用配方法解下列方程:

1) $x^2+2x-3=0$;

2) $2x^2+3x-3=0$.

分析　方程1)的二次项系数已经是1,所以直接移项、配方、求解即可.

方程2)要先把二次项系数化为1.

解　1)移项,得 $x^2+2x=3$

配方得　$x^2+2x+1=3+1$

即　$(x+1)^2=4$.

$\therefore x+1=\pm2$.

$x_1=1,x_2=-3$.

2)方程两边同时除以2得

$x^2+\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}=0$

移项得　$x^2+\frac{3}{2}x=\frac{3}{2}$

配方法得 $x^2+\frac{3}{2}x+(\frac{3}{4})^2=\frac{3}{2}+(\frac{3}{4})^2$

即 $\left(x+\frac{3}{4}\right)^2=\frac{33}{16}$

$x+\frac{3}{4}=\pm\frac{\sqrt{33}}{16}$

$\therefore x_1=-\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{33}}{4}, x_2=-\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{33}}{4}.$

点评　用配方法解一元二次方程时，首先要化二次项系数为1，而关键步骤是方程两边同时加上一次项系数一半的平方.

(3)公式法.

公式法就是用求根公式解一元二次方程. 它是解一元二次方程的一般方法.

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的求根公式：

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}(b^2-4ac\geqslant 0)$$

用公式法解一元二次方程的一般步骤：

①把方程化为一般形式，确定 a、b、c 的值.

②把 a、b、c 代入一元二次方程的求根公式，求出 x_1, x_2.

(用这种方法解一元二次方程必须有 $b^2-4ac\geqslant 0$ 的条件)

例4　用公式法解下列方程：

1) $x^2-2x-1=0$;

2) $2x^2+1=2\sqrt{2}x$;

3) $\frac{3}{2}y^2-y+1=0$.

解　1) $\because a=1, b=-2, c=-1, \Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\times 1\times(-1)=8$

$$\therefore x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-(-2)\pm\sqrt{8}}{2\times 1}$$

$$=\frac{2\pm 2\sqrt{2}}{2}$$

$$=1\pm\sqrt{2}$$

$\therefore x_1=1+\sqrt{2}, x_2=1-\sqrt{2}.$

2)原方程为 $2x^2-2\sqrt{2}x+1=0$

$\because a=2, b=-2\sqrt{2}, c=1, \Delta=b^2-4ac=(-2\sqrt{2})^2-4\times 2\times 1=0$

$$\therefore x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-(-2\sqrt{2})}{2\times 2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\therefore x_1=x_2=\frac{\sqrt{2}}{2}.$

3) $\because a=\frac{3}{2}, b=-1, c=1, \Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\times\frac{3}{2}\times 1=1-6=-5<0$

$\therefore$原方程没有实数根.

点评　用公式法解一元二次方程时，一定要将方程化成一般形式，确定 a、b、c 的值. 当 $\Delta=0$ 时，应把方程的根写成 $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$ 的形式，所以一元二次方程有两个根.

(4)因式分解法.

因式分解法就是利用因式分解的手段求出方程的解的方法. 它是解一元二次方程最常用的方法.

因式分解法解一元二次方程的一般步骤：

①将方程的左边分解为两个一次因式乘积，右边为零.

②令每个因式分别为零，得到两个一元一次方程.

③分别解这两个一元一次方程.

用因式分解法解一元二次方程要求熟练掌握因式分解.

例5　用因式分解法解下列方程：

1) $3x^2+2x=0$;

2) $(2x-1)^2-(x+2)^2=0$;

3) $3x^2+11x=20$;

4) $x^2+\sqrt{6}=(\sqrt{2}+\sqrt{3})x$.

分析　1)、2)的右边是0，可以直接把左边因式分解，1)用提公因式法分解.

2)用平方差公式进行因式分解，3)、4)必须变形使方程的右边是0，然后再用十字相乘法进行因式分解.

解　1) $x(3x+2)=0$,

$\therefore x=0$ 或 $3x+2=0$.

$\therefore x_1=0, x_2=-\frac{2}{3}$.

2) $(2x-1+x+2)(2x-1-x-2)=0$　即 $(3x+1)(x-3)=0$

$\therefore 3x+1=0$ 或 $x-3=0$.

$\therefore x_1=-\frac{1}{3}, x_2=3$.

3) 原方程为 $3x^2+11x-20=0$,

$(3x-4)(x+5)=0$

$\therefore 3x-4=0$ 或 $x+5=0$.

$\therefore x_1=\frac{4}{3}, x_2=-5$.

4) 原方程为 $x^2-(\sqrt{2}+\sqrt{3})x+\sqrt{6}=0$

$(x-\sqrt{2})(x-\sqrt{3})=0$

$\therefore x-\sqrt{2}=0$ 或 $x-\sqrt{3}=0$.

$\therefore x_1=\sqrt{2}, x_2=\sqrt{3}$.

点评　用因式分解法解一元二次方程的关键有两个：一是必须要有方程右边是0的条件，二是有多项式因式分解的基本功.

3. 二次三项式的因式分解

(1) 二次三项式：一般地，我们把形如 $ax^2+bx+c(c\neq 0)$ 的多项式叫做 x 的二次三项式.

(2) 二次三项式的因式分解与一元二次方程的关系：

①利用因式分解可以解一元二次方程；②利用解一元二次方程进行二次三项式的因式分解.

(3) 二次三项式的因式分解公式：$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ 叫做二次三项式的因式分解公式，其中 $a\neq 0$, x_1, x_2 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根.

(4) 用公式法分解二次三项式的一般步骤：

①写出二次三项式 ax^2+bx+c 对应的方程 $ax^2+bx+c=0$.

②求方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根，即解方程 $ax^2+bx+c=0$ 得两实数根 x_1、x_2.

③将 a、x_1、x_2 的值代入二次三项式的因式分解公式 $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

例6　分解下列因式：

1) $-\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{2}$；

2) $4x^2+8x-1$.

解　1) 解　写出 $-\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{2}$ 对应的方程 $-\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{2}=0$

解方程 $-\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{2}=0$，即 $x^2-2x+1=0$.

$\therefore x_1=x_2=1$.

$$\begin{aligned}\therefore -\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{2} &=-\frac{1}{2}(x-1)(x-1)\\ &=-\frac{1}{2}(x-1)^2\end{aligned}$$

点评　本题不用解方程的方法也可以分解 $-\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{2}$，用提公因式法和公式法分解.

2) **分析**　此题就难用以前学过的因式分解法分解，而用公式法求根比较方便.

解　写出 $4x^2+8x-1$ 对应的方程 $4x^2+8x-1=0$

$\Delta=8^2-4\times4\times(-1)=80$

$\therefore x=\frac{-8\pm\sqrt{80}}{2\times4}=\frac{-2\pm\sqrt{5}}{2}$

$\therefore x_1=\frac{-2+\sqrt{5}}{2}, x_2=\frac{-2-\sqrt{5}}{2}$.

将结果代入公式，得

$$\begin{aligned}4x^2+8x-1 &=4\left(x-\frac{-2+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{-2-\sqrt{5}}{2}\right)\\ &=2\left(x-\frac{-2+\sqrt{5}}{2}\right)2\left(x-\frac{-2-\sqrt{5}}{2}\right)\\ &=(2x+2-\sqrt{5})(2x+2+\sqrt{5})\end{aligned}$$

点评　注意：写二次三项式的分解式时，不能漏掉第一因数 a，化简要注意准确.

4. 可化为一元二次方程的方程

(1) 可化为一元二次方程的高次方程.

高次方程通过降次转化为一元二次方程，

主要方法是因式分解法和换元法.

例7　解下列方程：

1) $2x^3+x^2-x=0$；2) $y^4-3y^2+2=0$.

分析　方程1)是一元三次方程，提取 x 后得一元二次方程，然后用解一元二次方程的方法求解. 方程2)是一元四次方程的特殊情况，即双二次方程，可通过换元的方法化为一元二次方程，然后用解一元二次方程的方法求解.

解　1)原方程可化为 $x(2x^2+x-1)=0$

得 $x=0$ 或 $2x^2+x-1=0$

解方程 $2x^2+x-1=0$ 得 $x=-1$ 或 $x=\frac{1}{2}$

∴原方程的解为 $x_1=0, x_2=-1, x_3=\frac{1}{2}$.

2)设 $y^2=a$　则原方程可化为 $a^2-3a+2=0$.

解这个一元二次方程得 $a_1=1, a_2=2$.

当 $a=1$ 时，$y^2=1$　$y=1$ 或 $y=-1$.

当 $a=2$ 时，$y^2=2$　$y=\sqrt{2}$ 或 $y=-\sqrt{2}$.

∴原方程的解为 $y_1=1, y_2=-1, y_3=\sqrt{2}, y_4=-\sqrt{2}$.

(2)可化为一元二次方程的分式方程.

分式方程的基本思想就是设法将分式方程转化为整式方程，然后利用整式方程的解法求解. 解分式方程的基本方法是去分母法和换元法.

▲ 用去分母法解分式方程的一般步骤：

①去分母，将分式方程转化为整式方程.

②解所得的整式方程.

③验根.

例8　解方程 $\frac{5x}{x+1}+\frac{x}{x+3}=4$.

解　两边同乘以 $(x+1)(x+3)$ 得 $5x(x+3)+x(x+1)=4(x+1)(x+3)$

将这个方程化简，得 $x^2=6$　∴$x=\pm\sqrt{6}$

经检验 $x=\pm\sqrt{6}$ 是原方程的解

∴原方程的解为 $x_1=\sqrt{6}, x_2=-\sqrt{6}$.

▲ 用换元法解分式方程的一般步骤：

①设辅助未知数，得到关于辅助未知数的新方程.

②解这个新方程，求出辅助未知数的值.

③把辅助未知数的值代回原式，求出原未知数的值.

④检验.

例9　解方程 $x^2+3x-\frac{20}{x^2+3x}=8$.

解　设 $x^2+3x=a$，则原方程为 $a-\frac{20}{a}=8$，化简得 $a^2-8a-20=0$

解这个方程得 $a_1=-2, a_2=10$.

当 $a=-2$ 时，$x^2+3x=-2$，即 $x^2+3x+2=0$，解得 $x=-1$ 或 $x=-2$.

当 $a=10$ 时，$x^2+3x=10$，即 $x^2+3x-10=0$，解得 $x=2$ 或 $x=-5$.

经检验 $x=-1, x=-2, x=2, x=-5$ 都是原方程的解.

∴原方程的解是 $x_1=-1, x_2=-2, x_3=2, x_4=-5$.

5. 本节规律小结

(1)任何一个一元二次方程都可以化成一般形式.

(2)形如 $ax^2+bx+c=0$ 的方程是不是一元二次方程，取决于二次项系数 $a\neq0$.

(3)一元二次方程解法的选择顺序：首先考虑直接开平方法和因式分解法. 再考虑公式法，没有特殊要求时，一般不用配方法，因为配方法比较麻烦.

(4)分式方程解法的选择顺序：首先考虑用换元法，不能用换元法再用去分母法解.

(5)无论用什么方法解分式方程，都必须进行验根.

身边的数学

一元二次方程的概念，一元二次方程的解法，不能直接解决身边的数学问题，在中考中直接出现的问题不多，但生活中有大量的问题需要利用一元二次方程去解决，比如求银行的利率就必须列一元二次方程求得，而一元二次

方程的概念、解法会渗透在各种问题之中，一定要熟练掌握.

联系生活应用题

例 10 根据下列题意，列出一元二次方程，并将它化为一般式.

在一块长为 30m、宽为 20m 的矩形土地中间，种植面积为 $551m^2$ 的矩形绿地，在绿地四周铺设宽度相等的鹅卵石道路(图 1-1-1)，求鹅卵石道路的宽(设鹅卵石道路的宽都是 x m)？

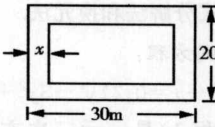

图 1-1-1

解 绿地矩形的长是 $(30-2x)$m，宽 $(20-2x)$m.

由矩形面积公式得 $(30-2x)(20-2x)=551$，一般形式为 $4x^2-100x+49=0$.

第二节　一元二次方程根的判别式及根与系数的关系

知识表解

一元二次方程
- 根的判别式：$\Delta=b^2-4ac$
- 根与系数的关系：$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1x_2=\frac{c}{a}$
- 构造方程：以 x_1，x_2 为根的一元二次方程为 $x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0$
- 简单的二元二次方程组

知识与规律

1. 一元二次方程根的判别式

(1) 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的根的判别式：$\Delta=b^2-4ac$.

(2) 一元二次方程的根与判别式 Δ 的关系：

$\Delta>0\Leftrightarrow$方程有两个不相等的实数根；

$\Delta=0\Leftrightarrow$方程有两个相等的实数根；

$\Delta<0\Leftrightarrow$方程没有实数根；

$\Delta\geqslant0\Leftrightarrow$方程有实数根.

(3) 一元二次方程根的判别式的应用：

①不解方程判别根的情况.

例 1 不解方程，判别下列方程的根的情况：

1) $x^2+12x-14=0$；

2) $4x^2+12x+9=0$；

3) $5y(5y-2)=-3$；

4) $(x-1)(x-2)=k(k\geqslant1)$；

5) $(x-a)^2+b(2a+b)=2bx$(x 是未知数).

解 1) $\Delta=b^2-4ac=12^2-4\times(-14)=200>0$

∴原方程有两个不相等的实数根.

2) $\Delta=b^2-4ac=12^2-4\times4\times9=0$

∴原方程有两个相等的实数根.

3) 将原方程化成一般形式为：$25y^2-10y+3=0$

$\Delta=b^2-4ac=10^2-4\times25\times3=-200<0$

∴原方程没有实数根.

4) 将原方程化成一般形式为：$x^2-3x+2-k=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times1\times(2-k)$

$=1+4k$

由已知条件 $k\geqslant1$ 得 $1+4k>0$，即 $\Delta>0$.

∴原方程有两个不相等的实数根.

5) 将原方程化成一般形式为：$x^2-2(a+b)x+a^2+2ab+b^2=0$

$\Delta=[-2(a+b)]^2-4(a^2+2ab+b^2)$

$=4(a+b)^2-4(a+b)^2=0$

∴无论 a、b 取何实数值，原方程都有两个相等的实数根.

点评 利用根的判别式判定一元二次方

程根的情况时，必须先把方程化成一般形式，正确地确定 a、b、c，另外还要注意题中所给的条件.

②利用非负数的性质，如 $a^2\geqslant0$，$-a^2\leqslant0$，a^2+k（k 为正数）>0，$-(a^2+k)$（k 为正数）<0 证明字母系数方程根的情况.

例 2 求证：关于 x 的一元二次方程 $x^2+(2m+3)x+3m+1=0$ 有两个不相等的实数根.

证明 $\Delta=(2m+3)^2-4(3m-1)$

$=4m^2+13$

$\because$ 无论 m 为何值，都有 $m^2\geqslant0$，

$\therefore 4m^2+3>0$，即 $\Delta>0$.

$\therefore$ 原方程有两个不相等的实数根.

2. 确定方程系数中字母的取值范围

例 3 若关于 x 的一元二次方程 $x^2+(2k-1)x+(k^2-1)=0$ 有两个不相等的实数根，求 k 的取值范围.

分析 本题给的方程是一元二次方程，只需要由 $\Delta>0$ 解答.

解 根据题意，得 $\Delta=(2k-1)^2-4(k^2-1)=-4k+5$

当 $-4k+5>0$ 时，原方程有两个不相等的实数根.

$-4k+5>0$ 得 $k<\dfrac{5}{4}$

$\therefore k$ 的取值范围是 $k<\dfrac{5}{4}$.

(1)韦达定理：

如果 x_1，x_2 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的两根，那么 $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$，$x_1x_2=\dfrac{c}{a}$. 特别地，如果一元二次方程 $x^2+px+q=0$ 的两个根是 x_1，x_2，那么 $x_1+x_2=-p$，$x_1x_2=q$.

(2)韦达定理的逆定理：

如果存在两个数 x_1，x_2，满足 $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$，$x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}$，那么 x_1、x_2 一定是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根，特别地，如果 $x_1+x_2=-p$，$x_1x_2=q$，那么 x_1、x_2 一定是一元二次方程 $x^2+px+q=0$ 的两个根.

(3)一元二次方程根与系数的关系的应用.

①检验一元二次方程的根是否正确.

例 4 检验下列方程的解是否正确

1) $x^2+3x-4=0$ $(x_1=1, x_2=-4)$；

2) $2x^2-3x-16=0$ $(x_1=\sqrt{2}+1, x_2=\sqrt{2}-1)$.

分析 本题可以通过解方程检验方程的解是否正确，但由于本题都具备 $\Delta>0$ 的条件，故也可以通过根与系数的关系检验方程的解是否正确.

解 1) $\because x_1+x_2=1-4=-3$，$x_1x_2=-4$

$\therefore x_1=1$，$x_2=-4$ 是原方程的解.

2) $\because x_1+x_2=(\sqrt{2}+1)+(\sqrt{2}-1)$

$=2\sqrt{2}\neq\dfrac{3}{2}$

$\therefore x_1=\sqrt{2}+1$，$x_2=\sqrt{2}-1$ 不是原方程的解.

点评 若方程的解正确，必须符合两个关系式：$x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$，$x_1x_2=\dfrac{c}{a}$，若方程的解不正确，只需检验出一个关系式不符合即可.

②已知方程的一根，求另一根或方程中的字母系数.

例 5 若关于 x 的方程 $x^2+3x+m=0$ 的一个根为 1，则另一根是______，$m=$______.

分析 本题可以将 $x=1$ 代入原方程得 $m=-4$，再将 $m=-4$ 代入原方程得 $x^2+3x-4=0$，然后解这个方程得 $x_1=-4$，$x=1$，也可以利用根与系数的关系求另一根和 m.

解 设方程的另一根为 x_1，则 $1+x_1=-3$，得 $x_1=-4$，$1\cdot x_1=m$，得 $m=-4$.

③不解方程，可以求出两根 x_1，x_2 的对称式.

例 6 已知 x_1、x_2 是 $2x^2+3x-1=0$ 的两

根，求：①$x_1^2+x_2^2$；②$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$；③$(x_1-x_2)^2$；④$(x_1+1)(x_2+1)$；⑤$\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_1}{x_2}$；⑥$|x_1-x_2|$.

分析　不解方程，求已知方程两根的某些代数式的值，就是将所求代数式化为含有 x_1+x_2 与 x_1x_2 的形式，代入 x_1+x_2，x_1x_2 的值进行计算.

解　∵x_1、x_2 是方程 $2x^2+3x-1=0$ 的两根，代入 $x_1+x_2=-\frac{3}{2}$，$x_1x_2=-\frac{1}{2}$

①$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$

$=(-\frac{3}{2})^2-2\times(-\frac{1}{2})=\frac{13}{4}$

②$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{-\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}}=3$

③$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$

$=(-\frac{3}{2})^2-4\times(-\frac{1}{2})$

$=\frac{17}{4}$

④$(x_1+1)(x_2+1)=x_1x_2+x_1+x_2+1$

$=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}+1$

$=-1.$

⑤$\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_1}{x_2}=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}=\frac{\frac{13}{4}}{-\frac{1}{2}}=-\frac{13}{2}$

⑥$|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2}=\frac{\sqrt{17}}{2}$

点评　常用的变形有：

$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$

$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$

$|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

这些对称式运用很广泛，要熟记.

④不解方程(在有根的情况下)可以判断根的符号.

对一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0$，且 $b^2-4ac>0)$，若$\frac{c}{a}>0$，则两根同号；若$\frac{c}{a}<0$，则两根异号. 在两根同号的条件下，若有$-\frac{b}{a}>0$，则两根同正；若$-\frac{b}{a}<0$，则两根同负. 在两根异号的条件下，若有$-\frac{b}{a}>0$，则正根的绝对值大于负根的绝对值；若$-\frac{b}{a}<0$，则负根的绝对值大于正根的绝对值.

例7　关于 x 的一元二次方程 $(k^2+1)x^2-2kx-1=0$ 的根的情况是　(　　)

A. 有两个正根　B. 有两个负根

C. 有一正根一负根　D. 无实数根

分析　本题首先确定有无实数根，再确定两根是否同号，异号.

解　∵$\Delta=(2k)^2+4(k^2+1)=8k^2+4>0$，

∴原方程有两个不相等的实数根.

设两根为 x_1，x_2，则 $x_1x_2=\frac{-1}{k^2+1}<0$.

∴两根为一正一负，选 C.

⑤一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 中若两根互为相反数，则 $b=0$；若两根互为倒数，则 $a=c$. 反之，若 $b=0$ 且 $\Delta>0$，则两根互为相反数；若 $a=c$ 且 $\Delta>0$，则两根互为倒数.

例8　已知关于 x 的方程 $x^2-(m^2-6)x-1=0$ 的两根互为相反数，则 $m=$________.

分析　本题首先要考虑原方程必须有根即要 $\Delta>0$.

解　设方程的两根为 x_1，x_2. 则 $x_1+x_2=m^2-6$.

又∵两根互为相反数，∴$x_1+x_2=0$，即 $m^2-6=0$，∴$m=\pm\sqrt{6}$.

当 $m=\pm\sqrt{6}$时，原方程为 $x^2-1=0$，这时 $\Delta>0$，

∴$m=\pm\sqrt{6}$.

点评　本题若先利用 $\Delta>0$ 确定 m 的范围，再利用已知条件求出 m 的值运算量更大，故选用先求 m 的值，再用“Δ”进行检验的方法.

⑥确定字母系数的取值.

利用根与系数关系确定字母系数的取值时，要同时考虑 $a\neq0$，$\Delta\geqslant0$ 这两个条件.

3. 构造方程

以 x_1，x_2 为根的一元二次方程为 $x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0$.

(1)已知方程的两根，求作这个一元二次方程.

例 9 以 $(\sqrt{2}+1)$，$(\sqrt{2}-1)$ 为根的一元二次方程是________.

解 根据题意，可得 $x^2-[(\sqrt{2}+1)+(\sqrt{2}-1)]x+(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=0$

化简，得 $x^2-2\sqrt{2}x+1=0$

∴所求的方程是 $x^2-2\sqrt{2}x+1=0$

(2)已知两数和与两数积，求这两个数.

例 10 解方程组 $\begin{cases}x+y=7\\xy=12\end{cases}$

分析 方程组中的 x、y 是两个未知数，本题就是已知两数和与两数积，求这两个数的问题，可构造以 x，y 为根的一元二次方程，并解这个方程.

解 设以 x，y 为根的一元二次方程是 $z^2-7z+12=0$，

解得 $z_1=3$，$z_2=4$，即 $\begin{cases}x=3\\y=4\end{cases}$ $\begin{cases}x=4\\y=3\end{cases}$

4. 简单的二元二次方程组

(1)二元二次方程组的概念：

由一个二元一次方程和一个二元二次方程组成的方程组，或由两个二元二次方程组成的方程组都叫做二元二次方程组.

(2)解二元二次方程组的基本思想方法：

①代入消元法：通过“代入”消去一个未知数，使“二元方程组”转化为“一元方程”，进而求出方程组的解.

例 11 解方程组 $\begin{cases}x^2-2xy-3y^2=5 & ①\\x-3y=5 & ②\end{cases}$

解法 1 由②得 $x=5+3y$ ③

将③代入①得 $(5+3y)^2-2(5+3y)\cdot y-3y^2=5$，化简得 $20y=-20$，∴$y=-1$

把 $y=-1$ 代入③得 $x=5-3=2$

∴原方程组的解是 $\begin{cases}x=2\\y=-1\end{cases}$

解法 2 也可以将①分解得 $(x-3y)(x+y)=5$ ③

将②代入③得，$5(x+y)=5$，即 $x+y=1$ ④

由②和④组成新方程组 $\begin{cases}x-3y=5\\x+y=1\end{cases}$ 解这个方程组得 $\begin{cases}x=2\\y=-1\end{cases}$

∴原方程组的解是 $\begin{cases}x=2\\y=-1\end{cases}$

点评 本题的两种代入法都分别达到了“消元”和“降次”的目的，而将 $x-3y$ 作为一个整体代入也是解题的一个技巧.

②对形如 $\begin{cases}x+y=a\\xy=b\end{cases}$ 的方程组，除了可用代入法解外，还可联系韦达定理，通过构造一个以 x、y 为根的一元二次方程求解.

5. 本节规律小结

(1)凡涉及一元二次方程的实数根的存在性问题，都要用判别式.

(2)在运用根与系数关系时，必须注意 $\Delta\geqslant0$ 这个前提条件，而应用判别式 Δ 的前提是方程必须是一元二次方程的二次项系数 $a\neq0$，在解题中常常要同时用到 $a\neq0$，$\Delta\geqslant0$ 的隐含条件.

身边的数学

一元二次方程根的判别式、根与系数关系的应用不仅在本章中起着重要作用，还在二次函数中有着非常重要的应用. 是解决数字问题的重要定理，必须熟练掌握，灵活解决相关问题.

联系生活应用题

例 12 已知 a，b，c 是三角形的三条边，求证：关于 x 的方程

$b^2x^2+(b^2+c^2-a^2)x+c^2=0$ 没有实数根.

分析　本题要证方程没有实数根，即要证$\Delta<0$.

证明　$\because \Delta=(b^2+c^2-a^2)^2-4b^2c^2$

$=(b^2+c^2-a^2+2bc)(b^2+c^2-a^2-2bc)$

$=[(b+c)^2-a^2][(b-c)^2-a^2]$

$=(b+c+a)(b+c-a)(b-c+a)(b-c-a)$

$\because a,b,c$是三角形的三条边，

$\therefore a+b+c>0$.

又$\because$"三角形两边之和大于第三边，两边之差小于第三边"

$\therefore b+c>a$即$b+c-a>0$，$b+a>c$即$b-c+a>0$，$b-c<a$即$b-c-a<0$

$\therefore (a+b+c)(b+c-a)(b-c+a)(b-c-a)<0$

即$\Delta<0$，$\therefore$原方程没有实数根.

点评　本题是综合题，运用了判别式的知识、因式分解、有关三角形的性质，另外也不能盲目化简，本题就是因式分解向结论靠拢.

例 13　设a,b,c是$\triangle ABC$三边的长，且关于x的方程$c(x^2+n)+b(x^2-n)-2\sqrt{n}ax=0(n>0)$有相等的两个实数根，求证：$\triangle ABC$是直角三角形.

分析　本题要证$\triangle ABC$是直角三角形，必须用直角三角形的判定定理，而本题的条件是有关边的条件，故要找$a^2+b^2=c^2$的条件. 又有已知条件：方程有两个相等的实根. 故一定要用$\Delta=0$.

证明　将原方程整理成一般形式：$(c+b)x^2-2\sqrt{n}ax+n(c-b)=0$

$\Delta=(-2\sqrt{n}a)^2-4n(c+b)(c-b)=0$，即$4na^2-4n(c^2-b^2)=0$

即$a^2-(c^2-b^2)=0$，即$a^2+b^2=c^2$

$\therefore \triangle ABC$是直角三角形.

例 14　已知等腰三角形三边的长为a,b,c，且$a=c$，若关于x的一元二次方程$ax^2-\sqrt{2}bx+c=0$的两根之差为$\sqrt{2}$，求等腰三角形的一个底角的度数.

解　设原方程的两根分别为x_1,x_2，则$x_1+x_2=\dfrac{\sqrt{2}b}{a}$，$x_1x_2=\dfrac{c}{a}$.

由已知$|x_1-x_2|=\sqrt{2}$，得$(x_1-x_2)^2=2$，即$(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=2$.

$\therefore \left(\dfrac{\sqrt{2}b}{a}\right)^2-\dfrac{4c}{a}=2$，又$\because a=c$.

$\therefore \dfrac{2b^2}{a^2}=6$，$\therefore b=\sqrt{3}a$.

如图 1-2-1，作等腰$\triangle ABC$底边上的高AD，$\mathrm{Rt}\triangle ABD$中$AB=a$，$BD=\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$.

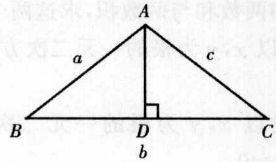

图 1-2-1

$\therefore AD=\dfrac{1}{2}a$

$\therefore \angle B=30°$，即等腰三角形的一个底角为$30°$.

点评　本题得出了一元二次方程和三角形的有关知识求解.

第三节　一元二次方程的应用题

知识表解

列方程解应用题 $\begin{cases}\text{列一元二次方程解应用题}\\ \text{列分式方程解应用题}\end{cases}$

知识与规律

1. 正确地列出方程解应用题

方程是等式，列方程即列等式，列方程的步骤：

(1)找:从应用题中找出等式,不仅要找直接等式,还要找出隐含在问题中的等式,找的过程中,可借助于图、表格等.

(2)设:适当地设出未知数,多数情况直接设所求的未知数为 x,有时需设间接未知数.

(3)列:用含有未知数的代数式表示等式中的每一个量,并且将代数式代入等式,这样就列出了方程.

列方程解应用题的书写步骤:

①设未知数;

②列方程;

③解方程;

④答.

2. 常见列一元二次方程解应用题的几种类型

(1)整数问题:寻找等量关系时要抓住数字间,或新数、原数之间的关系.

①两位数=十位数字×10+个位数字,

②三位数=百位数字×100+位数字×10+个位数字,

③三个连续整数可表示为:$x-1,x,x-1$,

④三个连续奇数(或偶数),可表示为:$x-2,x,x+2$.

(2)面积问题:利用面积公式找少量关系式,如:

①矩形面积=长×宽,

②正方形面积=(边长)^2,

③三角形面积=$\frac{1}{2}$×底×高,

④梯形面积=$\frac{1}{2}$×(上底+下底)×高,

⑤圆的面积=πR^2.

(3)增长率问题:寻找等量关系时要抓住原产量、增产量、实际产量.

平均增长率之间的关系:

①原产量+增产量=实际产量,

②实际产量=原产量×(1+增长率).

3. 常见列分式方程解应用题

(1)列公式方程解应用题的一般步骤:

①审题、设未知数,

②找出能够表达题目全部含义的等量关系,列出公式方程,

③解公式方程,

④验根:1)检验是否有增根,2)是否符合题中的实际意义,

⑤答.

(2)列分式方程应用题、常见类型题:

①工程问题

基本公式:工作量=工作效率×工作时间

常用等量关系式:甲工作量+乙工作量=总工作量

常常将"一件工作""一项工程"看作单位"1".

②行程问题

基本公式:路程=速度×时间

常用等量关系式:

a. 相遇问题:甲的路程+乙的路程=总路程

b. 追击问题(设甲速度快):

同时 不同地 | 甲用的时间=乙用的时间
甲的路程-乙的路程=甲、乙间的路程
同地 不同时 | 乙时间-甲时间=时间差
甲的路程=乙的路程

身边的数学

生活中有大量的问题需要利用一元二次方程去解决.比如:已知两数和(差)、两数积,求这两个数;已知矩形的周长和面积,求矩形的长和宽;已知圆的面积,求圆的半径.大量的行程问题,工程问题,百分比问题,商品问题,银行利率问题,系统问题,贷款问题,捐款问题,出租车收费,电话收费等等都可以通过一元二次方程得到解决.

联系生活应用题

例1　(2005 吉林)一条长 64cm 的铁丝被剪成两段,每段均折成正方形,若两个正方形的面积和等于 160cm^2,求这两个正方形的边长.