

工科基础课提高·应试系列

计算方法

典型题分析解集

DIANXINGTI FENXI JIEJI

(第3版)

封建湖 车刚明 编著

- 内容提要
- 典型题分析
- 习题及答案

西北工业大学出版社

- ☐ 策划编辑/刘彦信
☐ 责任编辑/刘彦信
☐ 封面设计/张 谨

工科基础课提高·应试系列

大	学	物	理	典型题分析解集	(第2版)	
普	通	化	学	典型题分析解集	(第3版)	
高	等	数	学	典型题分析解集	(上册) (第3版)	
高	等	数	学	典型题分析解集	(下册) (第3版)	
概	率	论	与	数理统计	典型题分析解集 (第3版)	
线	性	代	数	典型题分析解集	(第3版)	
计	算	方	法	典型题分析解集	(第3版)	
复	变	函	数	与	积分变换	典型题分析解集 (第3版)

ISBN 7-5612-1072-8



9 787561 210727 >

ISBN 7-5612-1072-8/O·147

定价:13.00元

计算方法典型题分析解集

(第3版)

封建湖 车刚明 编著

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书主要为理工科大学本、专科学生、研究生学习“数值计算方法”而编写的。内容包括：误差知识、函数插值、函数逼近、数值积分与数值微分、方程求根、线性代数方程组的直接与迭代解法、矩阵特征值与特征向量的计算、常微分方程初值问题的数值解法等方面的典型习题的解题思路、分析与求解方法。

本书也可作为应用数学专业本科生和数学系其它专业学生学习计算方法课程的参考书。

图书在版编目 (CIP) 数据

计算方法典型题分析解集/封建湖等编. —3版. 西安: 西北工业大学出版社, 2003. 5

ISBN 7-5612-1072-8

I. 计… II. 封… III. 计算方法—高等学校—解题
IV. O241-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2003) 第 023641 号

出版发行: 西北工业大学出版社

通讯地址: 西安市友谊西路 127 号 邮编: 710072 电话: (029) 8493844

网 址: www.nwpup.com

印刷者: 陕西天元印务有限公司

开 本: 850 mm×1 168 mm 1/32

印 张: 9.125

字 数: 229 千字

版 次: 1998 年 8 月第 1 版 2000 年 9 月第 2 版

2003 年 5 月第 3 版第 7 次印刷

印 数: 40 001~48 000 册

定 价: 定价 13.00 元

第3版前言

本书自1998年8月第1版、2000年8月第2版出版发行以来，不仅得到了广大读者的热情支持和关注，而且得到了多位同行著名专家的支持和关心。阅读本书，使广大研究生、本科生对计算方法课程的理论体系和解题方法有了更深刻的理解，也使不少初次讲授该课程的青年教师得到助益。本书曾于2000年荣获“全国大学出版社优秀畅销书奖”。

从内容的完备性方面考虑书中缺少“误差知识”等内容以及还存在个别疏漏等原因，有必要对本书第2版进行修订，进一步完善其内容体系。鉴于此，本次是在第2版的基础上增加了第一章“误差知识”等内容（由车刚明编写），并对原书中部分内容和题目作了修订、更换和调整，对疏漏差错作了订正、修改。

值此第3版修订再版之际，作者谨向对本书给予关心和帮助的广大读者和同行专家深致谢忱。

编 者

2003年3月

第 2 版前言

本书第 1 版自 1998 年 8 月问世以来，得到了广大读者朋友的热情支持和关爱。本次修订再版时，我们对第 1 版中的一些错误和论述不妥当之处做了修改、订正；对个别题目进行了调整，并增加了一些典型题；最后附加了四套模拟试题，其中两套供工科研究生使用，两套供工科本科生使用。这四套题目的简要解答也附于书后，供读者朋友对照使用。

由于作者水平有限，书中难免会有错误或不妥之处，恳请读者批评指正。

编 者

2000 年 8 月

前 言

随着电子计算机的广泛普及与使用,“数值计算方法”已成为高等院校理工科各专业本专科学生的必修课,也是不少数学系以外的理工科硕士研究生的必修课。为了有效地帮助广大学生学好“数值计算方法”课程的基本理论和解题方法,我们根据多年的教学经验编写了本书。

全书共有八章。第一章为代数插值,包括拉格朗日插值、牛顿插值、埃尔米特插值以及三次样条插值;第二章函数逼近,主要涉及最佳一致逼近、最佳平方逼近、数据的曲线拟合以及正交多项式、最小二乘法等内容;第三章是数值积分与数值微分,重点放在数值积分上,内容包括牛顿-柯特斯求积公式、龙贝格求积方法以及高斯型求积公式;方程求根是第四章的内容,涉及二分法、简单迭代法、牛顿迭代法、弦割法及抛物线法等;第五章是线性代数方程组的直接解法;第六章是线性代数方程组的迭代解法,主要讨论了简单迭代法(雅可比法作为特例处理)、高斯-赛德尔迭代法和超松弛迭代法及其收敛性讨论;第七章是矩阵的特征值与特征向量的计算,包括乘幂法与反幂法、雅可比法、QR方法及二分法等内容;第八章是常微分方程初值问题的数值解法,单步法主要涉及欧拉法及其变形、龙格-库塔法,多步法涉及到阿达姆斯法。对误差估计和稳定性也作了讨论。

每章一开始都给出了内容提要,以便统一记号和概念。然后对该章所涉及到的方法逐一给出数值算例,对所涉及的理论证明题,也用不少例题作了示范处理。除少量习题因意思清楚,方法确定而未给出分析外,大部分习题在解答之前都给出了分析。全

书共精选了近 200 道题，其中有的题目采用一题多解，以帮助读者掌握解题的思路和技巧，加深对所学内容的理解。为了加深理解，每章后均给出一定量的习题。

本书第一、二、三、四、七章由封建湖执笔，第五、六、八章由车刚明执笔，最后由封建湖、车刚明共同定稿。

限于水平，错误和不妥之处在所难免，恳请读者批评指正。

编 者

1998 年 2 月

目 录

第一章 误差知识	1
一、内容提要	1
二、典型题分析	2
三、习题一	12
第二章 代数插值	14
一、内容提要	14
二、典型题分析	15
三、习题二	52
第三章 函数逼近	55
一、内容提要	55
二、典型题分析	56
三、习题三	90
第四章 数值积分与数值微分	92
一、内容提要	92
二、典型题分析	94
三、习题四	135
第五章 方程求根	137
一、内容提要	137
二、典型题分析	138
三、习题五	157

第六章 解线性代数方程组的直接法	158
一、内容提要.....	158
二、典型题分析.....	159
三、习题六.....	180
第七章 解线性代数方程组的迭代法	183
一、内容提要.....	183
二、典型题分析.....	185
三、习题七.....	204
第八章 矩阵的特征值与特征向量的计算	206
一、内容提要.....	206
二、典型题分析.....	208
三、习题八.....	233
第九章 常微分方程初值问题数值解法	235
一、内容提要.....	235
二、典型题分析.....	238
三、习题九.....	258
附录	260
模拟试题 A	260
模拟试题 B	262
模拟试题 C	263
模拟试题 D	265
练习题参考答案.....	267
模拟试题参考答案.....	271
参考文献	282

第一章 误差知识

一、内 容 提 要

1. 绝对误差与相对误差

设 $x^{(*)}$ 是真值 x 的近似值, 称 $e(x^{(*)}) = x - x^{(*)}$ 为近似数 x^* 的绝对误差, 当 $|e(x^{(*)})| \leq \epsilon$ 时, 则称 ϵ 为 $x^{(*)}$ 的一个绝对误差限.

称 $e_r(x^{(*)}) = \frac{x - x^{(*)}}{x}$ 为近似数 $x^{(*)}$ 的相对误差, 如果 $|e_r(x^{(*)})| \leq \epsilon_r$, 则称 ϵ_r 为 $x^{(*)}$ 的一个相对误差限. 在实用中, 常也按 $\frac{x - x^{(*)}}{x^{(*)}}$ 来近似估计相对误差.

2. 有效数字

将近似数 $x^{(*)}$ 表示为

$$x^{(*)} = \pm 10^m (0.a_1 a_2 \cdots a_n \cdots a_p) \quad (a_1 \neq 0, p \leq \infty)$$

其中 a_1 是 1 到 9 中的数字, $a_2, a_3, \cdots$ 均为 0 到 9 中的数字. 如果误差 $x - x^{(*)}$ 满足

$$|x - x^{(*)}| \leq \frac{1}{2} \times 10^{m-n}$$

则说近似数 $x^{(*)}$ 至少具有 n 位有效数字, 分别是 $a_1, a_2, \cdots, a_n$. 如果 $n = p$, 则说 $x^{(*)}$ 是有效数.

3. 有效数位与误差的关系

设近似数 $x^{(*)}$ 具有 n 位有效数字, 则有

$$|e_r(x^{(*)})| \leq \frac{1}{2a_1} \times 10^{1-n}$$

有效数字的位数 n 越多, 则 $x^{(*)}$ 的绝对误差与相对误差越小.

4. 数值运算的误差估计

设 $x_1^{(*)}, x_2^{(*)}, \dots, x_n^{(*)}$ 分别是 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的近似值, 则 $y^{(*)} = f(x_1^{(*)}, x_2^{(*)}, \dots, x_n^{(*)})$ 是函数值 $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的近似值. 函数值的误差与自变量的误差有如下近似关系

$$e(y^{(*)}) \approx \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{x=x^{(*)}} e(x_i^{(*)})$$

$$e_r(y^{(*)}) \approx \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{x=x^{(*)}} \frac{x_i^{(*)}}{y^{(*)}} e_r(x_i^{(*)})$$

这里 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), x^{(*)} = (x_1^{(*)}, x_2^{(*)}, \dots, x_n^{(*)})$.

5. 数值运算应遵循的原则

- (1) 要避免相近的两个数相减;
- (2) 要避免绝对值相对很小的数作分母;
- (3) 要防止大数“吃”小数, 即防止绝对值相差很大的两个数相加或相减;
- (4) 要尽量简化计算步骤, 减小运算次数;
- (5) 要使用数值稳定的计算公式.

二、典型题分析

例 1-1 设近似数 $x^{(*)} = 0.0670$ 是“四舍五入”得到的. 试确定其有效数字的位数, 并说明 $x^{(*)}$ 是否为有效数.

分析 本题只需按有效数字的定义严格判断.

解 因为 $x^{(*)} = 0.0670$ 是“四舍五入”得来的, 所以 $x^{(*)}$ 的绝对误差限不超过 $x^{(*)}$ 最末位的半个单位, 即

$$|e(x^{(*)})| \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4}$$

也可写为

$$|e(x^{(*)})| \leq \frac{1}{2} \times 10^{-1-3}$$

于是由定义可知, $x^{(*)}$ 具有三位有效数字, 分别是 6, 7, 0.

由于 $x^{(*)}$ 从第一个非零数字开始, 以后各位数字均为有效数字, 故近似数 $x^{(*)}$ 是有效数.

注 由本例题不难进一步判断, 任何“四舍五入”所得的近似数均为有效数.

例 1-2 试问真值 $x = 2.62$ 的近似数 $x^{(*)} = 2.58$ 是否为有效数?

解 因为

$$|x - x^{(*)}| = 0.04 < 0.05 = \frac{1}{2} \times 10^{-1} = \frac{1}{2} \times 10^{1-2}$$

所以由定义易知近似数 $x^{(*)} = 2.58$ 具有两位有效数字, 分别是 2, 5.

由于 8 不是有效数字, 故 $x^{(*)}$ 不是有效数.

例 1-3 试确定 $\frac{22}{7}$ 作为 π 的近似值具有几位有效数字?

解 因为

$$\frac{22}{7} = 3.142857\cdots$$

$$\pi = 3.141592\cdots$$

所以

$$|\pi - \frac{22}{7}| = 0.001264\cdots < 0.005 = \frac{1}{2} \times 10^{-2}$$

$$|\pi - \frac{22}{7}| < \frac{1}{2} \times 10^{1-3}$$

由有效数字的定义可知 $\frac{22}{7}$ 作为 π 的近似值具有三位有效数字.

例 1-4 设 $x_1^{(*)}, x_2^{(*)}$ 分别是 x_1, x_2 的近似值. 试证乘积 $x_1^{(*)} x_2^{(*)}$ 的绝对误差与相对误差有如下近似表达式

$$e(x_1^{(*)} x_2^{(*)}) \approx x_2^{(*)} e(x_1^{(*)}) + x_1^{(*)} e(x_2^{(*)})$$

$$e_r(x_1^{(*)} x_2^{(*)}) \approx e_r(x_1^{(*)}) + e_r(x_2^{(*)})$$

分析 本题中的两个近似关系式都涉及到了自变量 $x_1^{(*)}$, $x_2^{(*)}$ 的误差与函数值 $x_1^{(*)} x_2^{(*)}$ 的误差, 而近似公式

$$e(y^{(*)}) \approx \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \bigg|_{x=x^{(*)}} e(x_i^{(*)})$$

$$e_r(y^{(*)}) \approx \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \bigg|_{x=x^{(*)}} \frac{x_i^{(*)}}{y^{(*)}} e_r(x_i^{(*)})$$

反映的正是自变量的误差与函数值的误差之间的近似关系, 所以取二元函数 $y = f(x_1, x_2) = x_1 x_2$, 并应用上述两个近似公式就容易得到所要证明的近似表达式.

证 取 $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$, 则

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = x_2, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1$$

应用上述近似公式, 有

$$e(x_1^{(*)} x_2^{(*)}) \approx x_2^{(*)} e(x_1^{(*)}) + x_1^{(*)} e(x_2^{(*)})$$

$$e_r(x_1^{(*)} x_2^{(*)}) \approx \frac{x_2^{(*)} x_1^{(*)}}{x_1^{(*)} x_2^{(*)}} e_r(x_1^{(*)}) + \frac{x_1^{(*)} x_2^{(*)}}{x_1^{(*)} x_2^{(*)}} e_r(x_2^{(*)})$$

即

$$e_r(x_1^{(*)} x_2^{(*)}) \approx e_r(x_1^{(*)}) + e_r(x_2^{(*)})$$

例 1-5 设 $x_1^{(*)}$, $x_2^{(*)}$ 分别是 x_1, x_2 的近似值 ($x_2^{(*)} \neq 0$). 试

证商 $\frac{x_1^{(*)}}{x_2^{(*)}}$ 的绝对误差与相对误差有如下近似表达式

$$e\left(\frac{x_1^{(*)}}{x_2^{(*)}}\right) \approx \frac{x_2^{(*)} e(x_1^{(*)}) - x_1^{(*)} e(x_2^{(*)})}{(x_2^{(*)})^2}$$

$$e_r\left(\frac{x_1^{(*)}}{x_2^{(*)}}\right) \approx e_r(x_1^{(*)}) - e_r(x_2^{(*)})$$

分析 与例 1-4 的分析相同, 只是这里应取二元函数 $f(x_1,$

$$x_2) = \frac{x_1}{x_2}.$$

解 设 $f(x_1, x_2) = \frac{x_1}{x_2}$, 则

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{1}{x_2}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = -\frac{x_1}{x_2^2}$$

于是由近似公式

$$e(y^{(*)}) \approx \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{x=x^{(*)}} e(x_i^{(*)})$$

得

$$e\left(\frac{x_1^{(*)}}{x_2^{(*)}}\right) \approx \frac{1}{x_2^{(*)}} e(x_1^{(*)}) - \frac{x_1^{(*)}}{(x_2^{(*)})^2} e(x_2^{(*)})$$

即

$$e\left(\frac{x_1^{(*)}}{x_2^{(*)}}\right) \approx \frac{x_2^{(*)} e(x_1^{(*)}) - x_1^{(*)} e(x_2^{(*)})}{(x_2^{(*)})^2}$$

又由近似公式

$$e_r(y^{(*)}) \approx \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{x=x^{(*)}} \frac{x_i^{(*)}}{y^{(*)}} e_r(x_i^{(*)})$$

有

$$e_r\left(\frac{x_1^{(*)}}{x_2^{(*)}}\right) \approx \frac{1}{x_2^{(*)}} \frac{x_1^{(*)}}{\frac{x_1^{(*)}}{x_2^{(*)}}} e_r(x_1^{(*)}) - \frac{x_1^{(*)}}{(x_2^{(*)})^2} \frac{x_2^{(*)}}{\frac{x_1^{(*)}}{x_2^{(*)}}} e_r(x_2^{(*)})$$

整理后得

$$e_r\left(\frac{x_1^{(*)}}{x_2^{(*)}}\right) \approx e_r(x_1^{(*)}) - e_r(x_2^{(*)})$$

例 1-6 设 $x^{(*)}$ 为 x 的近似值. 试证 $\sqrt[n]{x^{(*)}}$ 的相对误差约为自变量 $x^{(*)}$ 的相对误差的 $\frac{1}{n}$ 倍.

分析 与例 1-4 的分析相同, 不过这里应取函数 $f(x) = \sqrt[n]{x}$.

解 设 $f(x) = \sqrt[n]{x}$, 则 $f'(x) = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$, 由近似关系式

$$e_r(y^{(*)}) \approx f'(x^{(*)}) \frac{x^{(*)}}{f(x^{(*)})} e_r(x^{(*)})$$

易得

$$e_r(\sqrt[n]{x^{(*)}}) \approx \frac{1}{n}(x^{(*)})^{\frac{1}{n}-1} \frac{x^{(*)}}{(x^{(*)})^{\frac{1}{n}}} e_r(x^{(*)})$$

亦即

$$e_r(\sqrt[n]{x^{(*)}}) \approx \frac{1}{n} e_r(x^{(*)})$$

例 1-7 设近似数 $x_1^{(*)} = 0.001$ 和 $x_2^{(*)} = -3.105$ 均为有效数, 试分别求

$$x_1^{(*)} + x_2^{(*)}, \quad x_1^{(*)} x_2^{(*)}, \quad x_1^{(*)} / x_2^{(*)}$$

的绝对误差限与相对误差限.

分析 首先应确定 $x_1^{(*)}$ 和 $x_2^{(*)}$ 各自的绝对误差限, 再由近似公式

$$e(y^{(*)}) \approx \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{x=x^{(*)}} e(x_i^{(*)})$$

确定函数值 $x_1^{(*)} + x_2^{(*)}$, $x_1^{(*)} x_2^{(*)}$ 和 $x_1^{(*)} / x_2^{(*)}$ 的绝对误差限, 最后由定义求它们的相对误差限, 也可以由例 1-4 中的公式求乘积与商的相对误差限.

解 因为 $x_1^{(*)} = 0.001$ 和 $x_2^{(*)} = -3.105$ 为有效数, 故它们的绝对误差分别不超过 $x_1^{(*)}$ 和 $x_2^{(*)}$ 最末位的半个单位, 即

$$|e(x_1^{(*)})| \leq \frac{1}{2} \times 10^{-3}, \quad |e(x_2^{(*)})| \leq \frac{1}{2} \times 10^{-3}$$

从而

$$|e_r(x_1^{(*)})| = \frac{|e(x_1^{(*)})|}{|x_1^{(*)}|} \leq \frac{\frac{1}{2} \times 10^{-3}}{0.001} = 0.5$$

$$|e_r(x_2^{(*)})| = \frac{|e(x_2^{(*)})|}{|x_2^{(*)}|} \leq \frac{\frac{1}{2} \times 10^{-3}}{3.105} \leq 1.61031 \times 10^{-4}$$

(1) 对 $x_1^{(*)} + x_2^{(*)}$, 易得

$$\begin{aligned} |e(x_1^{(*)} + x_2^{(*)})| &= |e(x_1^{(*)}) + e(x_2^{(*)})| \leq \\ &|e(x_1^{(*)})| + |e(x_2^{(*)})| \leq \\ &\frac{1}{2} \times 10^{-3} + \frac{1}{2} \times 10^{-3} = 10^{-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |e_r(x_1^{(*)} + x_2^{(*)})| &= \frac{|e(x_1^{(*)} + x_2^{(*)})|}{|x_1^{(*)} + x_2^{(*)}|} \leq \\ &\frac{10^{-3}}{3.104} \leq 0.0322165\% \end{aligned}$$

(2) 对 $x_1^{(*)} x_2^{(*)}$, 由例 1-4 中的公式可得

$$\begin{aligned} |e(x_1^{(*)} x_2^{(*)})| &\approx |x_2^{(*)} e(x_1^{(*)}) + x_1^{(*)} e(x_2^{(*)})| \leq \\ &|x_2^{(*)}| |e(x_1^{(*)})| + |x_1^{(*)}| |e(x_2^{(*)})| \leq \\ &3.105 \times \frac{1}{2} \times 10^{-3} + 0.001 \times \frac{1}{2} \times 10^{-3} = \\ &1.553 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |e_r(x_1^{(*)} x_2^{(*)})| &= \frac{|e(x_1^{(*)} x_2^{(*)})|}{|x_1^{(*)} x_2^{(*)}|} \approx \\ &\frac{|x_2^{(*)} e(x_1^{(*)}) + x_1^{(*)} e(x_2^{(*)})|}{|x_1^{(*)} x_2^{(*)}|} \leq \\ &\frac{1.553 \times 10^{-3}}{3.105 \times 10^{-3}} \leq 50.0162\% \end{aligned}$$

(3) 对 $x_1^{(*)}/x_2^{(*)}$, 同样由例 1-4 中的公式得

$$\begin{aligned} \left| e\left(\frac{x_1^{(*)}}{x_2^{(*)}}\right) \right| &\approx \left| \frac{x_2^{(*)} e(x_1^{(*)}) - x_1^{(*)} e(x_2^{(*)})}{(x_2^{(*)})^2} \right| \leq \\ &\frac{|x_2^{(*)}| |e(x_1^{(*)})| + |x_1^{(*)}| |e(x_2^{(*)})|}{|x_2^{(*)}|^2} \leq \\ &\frac{1.553 \times 10^{-3}}{3.105^2} \leq 1.61083 \times 10^{-4} \end{aligned}$$