

轻松科普

A PATH OF

数学散发着宇宙和谐的馨香

数学的捷径 MATHEMATICS

[韩] 李贞礼◎著 任姮◎译

研修、教授数学多年的 **李贞礼** 老师倾情奉献趣味数学读物！

轻松阅读，在阅读中参悟数学的奥妙。



中国市场出版社
China Market Press

01-49/77

2008

A PATH OF MATHEMATICS



数学散发着宇宙和谐的馨香

数学的捷径

[韩] 李贞礼 / 著 任姮 / 译

中国市场出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学的捷径 / (韩) 李贞礼著; 任姮译. —北京: 中国市场出版社, 2008.4

ISBN 978-7-5092-0335-4

I. 数… II. ①李…②任… III. 数学—普及读物 IV. 01-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2008) 第 019886 号

著作权合同登记号: 图字 01-2008-0807

A Path of Mathematics

By Lee, Jung Rye

Copyright 2004 Kyung Moon Publishers

Chinese translation Copyright 2007 by China Market Press.

Chinese traditional edition is published by arrangement with Kyung Moon Publishers.

All right reserved

本书中文简体字专有使用权归中国市场出版社所有

书 名: 数学的捷径

作 者: [韩] 李贞礼

译 者: 任 姮

责任编辑: 白 琼

出版发行: 中国市场出版社

地 址: 北京市西城区月坛北小街 2 号院 3 号楼 (100837)

电 话: 编辑部 (010) 68032104 读者服务部 (010) 68022950

发行部 (010) 68021338 68020340 68053489

68024335 68033577 68033539

经 销: 新华书店

印 刷: 北京凯达印务有限公司

规 格: 850 × 1168 毫米 1/32 10.25 印张 300 千字

版 本: 2008 年 5 月第 1 版

印 次: 2008 年 5 月第 1 次印刷

书 号: ISBN 978-7-5092-0335-4

定 价: 28.00 元



前 言

我们的生活以伦理性的思考为基础，是合理判断的延续。

众所周知，从古希腊以来，数学便是思维训练的工具和探求真理的典型，是现代信息社会和科学技术文明的基石。然而，对于这样的数学，我们大多数人却有畏惧之感。

数学虽然令人讨厌却又必不可少，虽然复杂，但是如果解开它会感到痛快，看似呆板却又是那么和谐……

数学散发着宇宙和谐美的香气。

为了能共同感受到数学的这股芬芳，笔者从很早就开始构想这本《数学的捷径》。然而对数学有深入了解的人本来就不少，弄不好就会被指责，所以一直没有拿出勇气来写。不过最后觉得是实现当初想法的时候了，于是准备将这本书出版。笔者从事数学教育工作多年，编写过高中教科书，并一直参与入学考试出题，对数学教育工作兢兢业业，并且怀着深厚的情感。

本书可作为选修数学的教材。

参考选修数学科目方面的讲义精心整理而成的这本《数学的捷径》，笔者自信它是一本编写细致的书，一本简单明了的书。阅读本书，会给人步入幽径的感觉，同时感觉到本书的便利之处。在本书中，高中生可以了解到数学的各个方面的知识，学生们能够很容易地就接触到数学的应用，而一般读者可以从书里嗅到数学本身散发出的芳香。

本书以生活中的数学为中心，带领读者在数学的历史、集合与逻辑、代数学、分析学、几何学、概率论与统计学，以及现代数学等数学世界中漫步，让读者在每个领域游览一番之后，又转回去用其所得去琢磨历史、生活、电脑等包含的数学问题。

本书竭尽全力使读者感受到数学的乐趣。

为了使本书能给读者带来更多关于数学的乐趣，笔者特别在书中添加了休息室、图形数学、数学游戏、数学试验等妙趣横生的小板块。

希望大家能和本书一道，漫步在数学的幽径上，期望这本书成为一本饱含感情的读物，也希望读者能够摆脱偏见和反感，喜爱上数学。如果读者通过本书来寻找生活之中的数学，感受数学的魅力，从而能向数学迈进一步的话，对于笔者来说是无比快乐的事。

为避免书中的错误和逻辑上的不连贯，笔者一直以谨慎的态度编写此书。然而因水平有限，难免有错误的地方，还希望各位批评指正。

最后，为不曾相见的各位亲爱的读者献上本书。

李贞礼



目 录

前言 1

第一章 数学的世界 1

- 1-1 何谓数学 2
- 1-2 为什么要学习数学 6
- 1-3 数学研究什么 10
- 1-4 生活中的数学 13

第二章 数学的历史 18

- 2-1 古代数学故事 20
- 2-2 中世纪数学故事 22
- 2-3 近代数学故事 24
- 2-4 现代数学故事 28

第三章 集合与逻辑的世界 32

- 3-1 集合的故事 34
- 3-2 逻辑的故事 46
- 3-3 悖论的故事 58

第四章 代数学的世界 67

- 4-1 数的故事 69
- 4-2 整数论的故事 86
- 4-3 方程式和不等式的故事 100

4-4 线性代数和现代代数的故事 111

第五章 分析学的世界 126

5-1 实数和数列的故事 128

5-2 函数的故事 146

5-3 微分和积分的故事 163

第六章 几何学的世界 182

6-1 欧几里德几何学和非欧几里德几何学的故事 184

6-2 图形的故事 207

6-3 生活中的图形故事 226

第七章 拓扑学的世界 240

7-1 拓扑学的故事 242

7-2 现代几何学的故事 252

第八章 概率论与统计学的世界 263

8-1 概率的故事 265

8-2 统计学的故事 277

第九章 现代数学的世界 286

9-1 离散数学的故事 288

9-2 密码的故事 291

9-3 计算机数学的故事 295

附 录 301

1. 答案与解析 302

2. 度量单位换算表 314

3. 数学家年表 316



第一章 数学的世界

- 1-1 何谓数学
- 1-2 为什么要学习数学
- 1-3 数学研究什么
- 1-4 生活中的数学

数学是研究思考对象的学问，能够加强人类的逻辑思维能力，我们为了培养逻辑性的思考和合理解决问题的能力而学习数学。数学从远古以来便被认为是探求真理的基本途径，作为对自然的理解和技术开发上的工具，它是科学技术发展的基石。所以我们称数学是科学的女王。如今在工业、金融、国防、信息通信、医学等领域，都有数学的影子。特别是我们周围，常常存在着数学，所以我们的生活无时无刻不需要数学思考。因此，数学对于学习自然科学、工程和社会科学专业的学生是必修的科目；对于一般人来说，称数学是提供生活的智慧的学问，一点也不夸张。

为了探求数学的世界，我们有必要在数学的历史、集合与逻辑、代数学、分析学、几何学、拓扑学、概率与统计，还有现代数学等数学世界中漫步一圈。

开启新千年的2000年被联合国教科文组织（UNESCO）定为“世界数学年”，同一年，作为全世界的数学节日——国际数学奥林匹克（IMO）在韩国举行。如今，我们必须相信数学将会开启一个新的时代，也必须了解到“数学是国力的标尺”的含义。

1-1 何谓数学

思维热身
到底何谓
数学？



令人愉快的事：3 竟然比 4 大！

⁴3 8 8

令人爽快的事：8 的一半不仅仅是 4，还可以是 0 或 3！

令人痛快的事：生和死是一样的！

如果人生一半是死去，一半是活着，那么，

由 $\frac{1}{2}(\text{生}) = \frac{1}{2}(\text{死})$ ，可得 $(\text{生}) = (\text{死})$

令人不快的事：看似相似的两个值却有天壤之别！

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = 1 \qquad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots = \infty$$

上面我们所说的 3 比 4 大、8 的一半是 0 或 3、生和死一样，这样的问题不是数学研究的对象。因为在数学之中，所谓大的定义不是指数字形状的大小，一半的定义也不是针对数字形状而言的。虽然大家对数学有一定的认识，但是，在本书最后的章节中学习级数问题时，需要更多数学知识的积累。

要简单地说明数学是什么并非易事。当今的文明社会，是以数学为基础发展而来的，数学能够培养观察各种现象的能力、逻辑思维能力以及合理地解决问题的能力，它不仅成为其他学科的基础，而且为解决实际生活中的各种问题提供帮助。“数学”这个词，英文称 *Mathematics*，是从希腊语中表示学习之意的词 *Manthano* 和表示科学之意的词 *Mathema* 得来的，因此，英语中的数学一词更多地表达的是

“学习、思维和思考的科学”。

一般而言，自然科学是涉及实体的，而数学涉



我思故我在。 ——笛卡尔

及人类内心存在的观念性的对象，是一门抽象性的学问。对于3个可口的糖果和3个好看的石头，数学性的观念只是“3”这个数字，味道和外观等不是数学研究的对象。在数学里，球面与圆环虽然是不相同的曲面，但是可以把带手把的杯子和圆环看做是相同的曲面。

数学是什么

马克思·布兰克：数学研究用符号表达的构造，是一切符号体系的语法。

怀特海德：数学是所有的模型的形式化和必然性演绎的推论。

克莱因：数学是创造性的过程，从实际问题中找出抽象性概念并且将其理想化，并通过对相关联的体系进行抽象化后设定问题，直观地引导出可能的解，同时对之前的设定进行演绎证明。

在关于数学的本质的讨论中，绝对主义的观点认为“数学性的知识是建立在可靠的基础上的”，而相对主义的观点则坚持“数学性的知识不存在绝对的基础，即使存在也不能判断出哪一个为基础”。在这里，我们就来了解一下属于绝对主义的观点中的柏拉图主义、逻辑主义、形式主义和直观主义。

第一，柏拉图主义的观点认为，数学的对象与构造和人类没有关系并且客观地存在着，探求的数学方法是一种演绎法。柏拉图主义者认为，研究数学就是挖掘已经是绝对存在的关系的过程。

第二，以罗素、怀特海德为代表的逻辑主义者认为，数学的所有概念都是由穷极的集合论概念或者纯粹的逻辑性的构成所引导出的。逻辑主义者持有的这种观点认为：所有的数学真理都可能由公理和逻辑的推论规则所证明。

第三，以希尔伯特为代表的形式主义者认为

数学是人类知性精神的荣耀。——雅戈比



“数学是用没有意义的符号表示的形式上的游戏”。所以形式主义者相信“在已成构造的符号体系里，不可能存在真理和意义”。逻辑上没有矛盾的符号体系是主要被关注的对象。

第四，对于直观主义者来说，他们把数学看做是无止境成长的过程，他们相信数学是不可能完全被符号化的。并且直观主义者主张，任何数学性的命题都必须具备明确的直观意义。

从上面我们看到，虽然对于数学的本质的论点各不相同，但是总体的观点认为数学是一种思考的方法，是研究图形的学问，是由抽象化的符号所组成的学问。在数学之中，必须有根据严密的逻辑性的推论得出的思考。数学就是对物理世界中的对象和关系进行抽象化，并构建出数学模型，继而研究一切可能的模型。另外，在抽象化的过程中，将缜密地选择出的用语和符号作为数学的语言使用。

数学的特性是什么

数学是具有抽象性、形式性、直观性和逻辑性的系统化的学问。

抽象性是数学的第一特性。在数学中，研究的范围不局限于实际存在的物理对象。自然数是把物体的个数抽象化，三角形的实体是并不存在的。在数学中，研究的对象是通过抽象化而获得的概念，数学研究这些概念之间的关系。

形式性是数学的第二个特征。这是指数学根据公理和推论规则的展开，形式性是为了保证数学有严密的装备。

直观性和逻辑性是数学的第三个特征。数学在诱导新的命题时，

需要有推论的支持。在推论中包括归纳性的推论和演绎性的推论。归纳性的推论是通过观察、试验、灵



数学的本质在于它的自由。——康托尔

感而发现的新的直观性的思考过程。一般地，在数学里，根据归纳性的推论发现新的事实，然后用演绎性的推论证明这个事实，最后确定其是否为真理。另外，数学在基础性内容的基础上，增加新的内容，不断发展从而具备系统性。也就是说，数学体系是在公理和定义的基础上，根据演绎推论证明定理，从而逐渐添加新的内容，最后形成从逻辑上具有合理性的体系。另一方面，数学不是从一开始就以完备的形态存在的，而是不断变化和发展的，所以数学还具备运动性的特征。

数学的严密性

数学要求严密的计算和证明的过程。为了求得圆周率 π 的正确值，包括阿基米德在内的很多数学家通过不懈的努力，最终发现圆周率是一个无理数。为了证明圆周率不是一个有理数，毕达格拉斯学派的一名学者为此还付出了自己的生命。

“费尔马最后的定理”是费尔马在一页书中提到的定理，大部分数学家都相信这个定理是正确的。但直到 360 年过后，才得出了正确的证明。另外，“哥德巴赫猜想”甚至作为小说出版，即使在有上千个例子成立的情况下，由于自然数是无穷无尽的，所以不能作为一般的证明。直到 250 多年之后的现在还是悬而未解的难题，这也是它被称为“哥德巴赫猜想”的原因。

如此，在数学上，猜想或者假设是指被相信是正确的，但是缺少证明的命题，这些命题如果没有得到数学的证明，就决不能被认定是正确的。黎曼假设和庞加莱猜想都设立了悬赏金，但是直至现在数学家还在为试图找出对它们的证明忙碌着。

1-2 为什么要学习数学

思维热身
如果知道
数学!!



问题: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$ 的值是多少?

简单的量: 一块起司, 开始吃了一半, 接着吃了一半的一半, 接着又吃了一半的一半的一半……这样继续下去的话, 由于最后整块的起司都会被吃掉, 所以求出的值应该是 1。

出奇的方法: 首项是 $\frac{1}{2}$, 公比是 $\frac{1}{2}$ 的无限等比数列, 则有以下的公式成立:

$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

不可思议: 啊哈! 如果 $2 + 4 + 8 + 16 + \dots = \frac{2}{1-2} = -2$ 的话, 那么, 开始的时候吃两块起司, 接着吃 4 块, 再接着吃 8 块……这样继续下去的话, 最后会吃出负两块来吗?

为什么要学习数学呢?

我们在实际生活中解决数学问题时都明白, 经验和常识是多么的重要。而通过经验和常识, 对问题进行分析并推导出结果之后, 如果结果能够表示为数学符号和式子的话, 那么就能成为具有普遍性的数学知识, 对于其他问题也同样适用。就如上面思维热身所提到的, 在“简单的量”当中, 虽然通过生活的经验分析, 问题可以被轻而易举地

解决, 但是还有必要如同“出奇的方法”那样, 将其进行数学化。例如:



数学的严密性的目的是认证直观征服的, 并使其合法化。——阿达玛

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \cdots = \frac{1}{2} \quad \text{和} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots = \infty$$

两个式子所显示的结果，通过单纯的经验是很难看出的。另外，这样的经验利用数列、级数、极限等概念数学化后不再是单纯的生活问题，由此可以为复杂的产业社会里的诸多问题提供解决方法。

数学是一门创造美的学问，也是一门非常有用的学问，这也是我们要学习数学的原因之一。数学家哈第一再强调，在数学世界里能看到抽象化的思想之美妙。数学的美和宇宙、自然的和谐的秩序一样，是值得我们去揣摩的美。

另外，在教育的目的中，有精神训练一项，我们通过数学能直接强化思维能力。学习数学就好比是为了锻炼体力去做体操一样，为了我们思维能力的提高，我们需要做思维的体操。

美国某个与数学教育有关的委员会曾发表过一份研究报告，报告称，作为一名公民在充分发挥社会作用时必须具备几项数学能力。首先是解决问题的能力，在实际生活中用数学方法得出合理的推导过程并对结果加以计算；其次是推断情况的能力，通过计算近似值或阅读、分析所制作的统计表和图示等数学事实，预测未来的情况；最后是使用计算机的能力。

另外，英国的派瑞在“数学的有用性”的演讲中提出了数学的有用性和必需性的观点，内容如下。

第一，使人有高尚的情感，给人以快乐；

第二，对头脑的发达和数学自身的研究有用；

第三，是科学研究的数学性基础，告诉人们科学的基础性原理；

第四，是思维的工具；

音乐是感观的数学，数学是理性的音乐。

—— 西尔维斯特



第五，不屈于权威，培养自我观察思考的能力；
最后，给哲学家以逻辑的帮助，而不陷于抽象论之中。

韩国数学的教育目标

“学习数学的基本知识和技能，培养用数学的方式进行思考的能力，培养实际生活中合理地解决各种问题的能力和态度。”这是韩国数学教育的基本目标，为了实现这些目标，针对数学学习应做到：

第一，用数学的眼光观察各种生活现象，通过这样的经验，理解数学的基础性的概念、原理、法则，以及它们之间的关系；

第二，活用数学的知识和技能，对于在生活中出现的各种问题，通过用数学的方式观察、分析、组织、思考来解决问题；

第三，能够持续地对数学感兴趣，能够活用数学知识和数学技能，培养学生合理地解决各种问题的态度。

总结以上几点，数学学习虽然有发展数学的目的，然而数学对于学习其他的学科是非常有用的，并且适用于高水平的思维活动。因此，数学教育的目标是通过数学活动，培养逻辑思维和合理解决问题的能力。

菲尔兹奖(Fields medal)——数学界的诺贝尔奖

瑞典的炸药发明家诺贝尔将生前的财产捐出，设立了诺贝尔奖，将奖金授予每年作出最杰出贡献的人。除了韩国前任总统金大中获得的和平奖之外，诺贝尔奖还包括文学奖、生物及医学奖、物理学奖、化学奖、经济学奖，唯独没有数学奖。诺贝尔奖没有数学奖是令人十分惊讶的事情，传说是因为诺贝尔



自然是用数学书写的卷册。——伽利略

和挪威数学家米塔格-列夫勒的关系不好而未设数学奖。

被称为数学界的诺贝尔奖的是由加拿大多伦多大学的菲尔兹教授设立的菲尔兹奖。

菲尔兹是1924年第七届国际数学家大会的主席，他把自己的财产作为基金，通过他生前的努力，终于在他去世后不久的1932年第九届国际数学家大会上通过了设立菲尔兹奖的决议。菲尔兹奖在每4年召开的国际数学家大会上颁奖，第一届菲尔兹奖在1936年颁出，东方的获奖者只有日本的3名数学家。

2000年国际数学奥林匹亚在韩国召开，将韩国在数学上提升到第四的地位，我们也期盼韩国人出现菲尔兹奖的获得者。

另外，菲尔兹奖只颁发给未满40岁的数学家，从这一点来看，可以说菲尔兹奖比诺贝尔奖更具价值。菲尔兹奖在给获奖者的奖牌上刻有阿基米德的头像。



菲尔兹奖牌（正反面）



菲尔兹教授



2000年国际数学奥林匹亚会徽

1-3 数学研究什么

许多人想当然地认为数学就是数字和计算，然而数字和计算不过是数学中极小的一个部分，实际上数学是模型科学。下面，我们就从数学中众所熟知的领域来举例说明。

逻辑学研究抽象的推理的模型，数论研究数的模型，几何学研究物体的模型，代数学研究分类的模型，微积分研究连续变化的模型，拓扑学研究相对位置和结合关系的模型，概率论研究随机事件中的反复出现的情况的模型，统计学研究数据资料的模型。初高中数学教育课程或者大学数学课中学习的数学领域大致可分为纯粹数学和应用数学，此外还有现代数学，具体分类如下：

集合与逻辑 (set theory and logic)

包含整数论、线性代数与现代代数的代数学 (algebra)

包含微积分学、微分方程式等有关实数和复数的分析学 (analysis)

包含欧几里德几何学、非欧几里德几何学、微分几何的几何学 (geometry)

包含距离空间论的拓扑学 (topology)

概率论 (probability) 和统计学 (statistics)

在需要数学的领域中，有传统的应用数学领域、统计领域、计算机领域、保险和金融领域、系统分析等，还涉及与现代信息产业、电信和通信、信息保护策略和技术开发、电子邮件的安全保护和电子署名等领域相关的暗号学和符号理论等。



数学虽然不研究实体，却研究思考的对象和对象之间的关系。——彭加莱