

03

第二辑

数学科学文化理念传播丛书

丛书主编 丁石孙



# 数学与思维

MATHEMATICS AND THINKING

著 徐利治 王 前



大连理工大学出版社  
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS



01-0/48  
:2(3)  
2008

数学科学文化理念传播丛书

丛书主编 丁石孙

03  
第二辑

# 数学与思维

MATHEMATICS AND THINKING

著 徐利治 王 前



大连理工大学出版社  
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

## 图书在版编目(CIP)数据

数学与思维/徐利治,王前著. —大连:大连理工大学出版社,2008.7

(数学科学文化理念传播丛书)

ISBN 978-7-5611-4296-7

I. 数… II. ①徐…②王… III. 数学—思维方法 IV. O1-0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 103304 号

大连理工大学出版社出版

地址:大连市软件园路 80 号 邮政编码:116023

发行:0411-84708842 邮购:0411-84703636 传真:0411-84701466

E-mail: dutp@dutp.cn URL: <http://www.dutp.cn>

大连图腾彩色印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

---

|                  |        |                   |
|------------------|--------|-------------------|
| 幅面尺寸:147mm×210mm | 印张:5.5 | 字数:107 千字         |
| 2008 年 7 月第 1 版  |        | 2008 年 7 月第 1 次印刷 |

---

|              |          |
|--------------|----------|
| 责任编辑:刘新彦 梁 锋 | 责任校对:知 轩 |
| 封面设计:宋 蕾     |          |

---

ISBN 978-7-5611-4296-7

定价:20.00 元



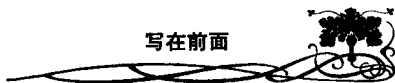
数学科学文化理念传播丛书·第二辑

## 编写委员会

丛书主编 丁石孙

委员(按姓氏笔画排序)

|     |     |     |
|-----|-----|-----|
| 王 前 | 史树中 | 刘新彦 |
| 齐民友 | 张祖贵 | 张景中 |
| 张楚廷 | 汪 浩 | 孟实华 |
| 胡作玄 | 徐利治 |     |



## 写在前面\*

—

20 世纪 80 年代钱学森同志曾在一封信中提出了一个观点,他认为数学应该与自然科学和社会科学并列,他建议称之为数学科学。当然,这里问题并不在于是用“数学”还是用“数学科学”,他认为在人类整个知识系统中,数学不应该被看成是自然科学的一个分支,而应提高到与自然科学和社会科学同等重要的地位。

我基本上同意钱学森同志的这个意见。数学不仅在自然科学的各个分支中 useful,同时在社会科学的很多分支中也有用。随着科学的飞速发展,不仅数学的应用范围日益广泛,同时数学在有些学科中的作用也愈来愈深刻。事实上,数学的重要性不只在于它与科学的各个分支有着广泛而密切的联系,而且数学自身的发展水平也在影响着人们

---

\* “一”为丁石孙先生于 1989 年 4 月为《数学·我们·数学》丛书出版所写,此处略有改动;“二”为丁先生为本丛书此次出版而写。



的思维方式,影响着人文科学的进步。总之,数学作为一门科学有其特殊的重要性。为了使更多人能认识到这一点,我们决定编辑出版《数学·我们·数学》这套小丛书。与数学有联系的学科非常多,有些是传统的,即那些长期以来被人们公认与数学分不开的学科,如力学、物理学以及天文学等。化学虽然在历史上用数学不多,不过它离不开数学是大家都看到的。对这些学科,我们的丛书不打算多讲,我们选择的题目较多的是那些与数学的关系虽然密切,但又不大被大家注意的学科,或者是那些直到近些年才与数学发生较为密切关系的学科。我们这套丛书并不想写成学术性的专著,而是力图让更大范围的读者能够读懂,并且能够从中得到新的启发。换句话说,我们希望每本书的论述是通俗的,但思想又是深刻的。这是我们的目的。

我们清楚地知道,我们追求的目标不容易达到。应该承认,我们很难做到每一本书都写得很好,更难保证书中的每个论点都是正确的。不过,我们在努力。我们恳切希望广大读者在读过我们的书后能给我们提出批评意见,甚至就某些问题展开辩论。我们相信,通过讨论与辩论,问题会变得愈来愈清楚,认识也会愈来愈明确。

## 二

大连理工大学出版社的同志看了《数学·我们·数学》这套丛书,认为本套丛书的立意与该社目前正在策划的《数



学科学文化理念传播丛书》的主旨非常吻合,因此出版社在征得每位作者的同意之后,表示打算重新出版这套书。作者经过慎重考虑,决定除去原版中个别的部分在出版前要做文字上的修饰,并对诸如文中提到的相关人物的生卒年月等信息作必要的更新之外,其他基本保持不动。

在我们正准备重新出版的时候,我们悲痛地发现我们的合作者之一史树中同志因病于上月离开了我们。为了纪念史树中同志,我们建议在丛书中仍然保留他所做的工作。

最后,请允许我代表丛书的全体作者向大连理工大学出版社表示由衷的感谢!

丁石小

2008年6月

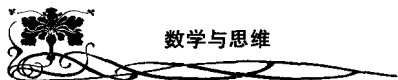


# 目 录

|           |   |
|-----------|---|
| 绪 论 ..... | 1 |
|-----------|---|

## 数学与左脑思维

|                         |    |
|-------------------------|----|
| 一 数学与抽象 .....           | 7  |
| 1.1 数学的对象与抽象思维 .....    | 7  |
| 1.2 数学的方法与抽象思维 .....    | 16 |
| 1.3 数学抽象思维的一般规律 .....   | 23 |
| 1.4 数学抽象度分析法 .....      | 31 |
| 二 数学与形式化 .....          | 41 |
| 2.1 数学与符号化 .....        | 41 |
| 2.2 数学与形式化 .....        | 48 |
| 2.3 数学形式化的必要性和局限性 ..... | 53 |
| 三 数学与公理化 .....          | 59 |
| 3.1 数学与逻辑思维 .....       | 59 |
| 3.2 数学与公理化 .....        | 65 |
| 3.3 数学公理化的必要性和局限性 ..... | 71 |
| 3.4 数学左脑思维的限度 .....     | 76 |



## 数学与右脑思维

|                      |     |
|----------------------|-----|
| 四 数学与猜测 .....        | 81  |
| 4.1 数学与探索性思维 .....   | 81  |
| 4.2 数学猜测与反驳的作用 ..... | 88  |
| 4.3 数学猜测的方法 .....    | 96  |
| 五 数学与想象 .....        | 105 |
| 5.1 数学与形象思维 .....    | 105 |
| 5.2 数学想象的类型和作用 ..... | 110 |
| 5.3 数学想象的方法 .....    | 118 |
| 六 数学与直觉 .....        | 125 |
| 6.1 数学与直觉思维 .....    | 125 |
| 6.2 数学直觉的类型和作用 ..... | 130 |
| 6.3 数学直觉的方法 .....    | 137 |
| 6.4 数学直觉的美学标准 .....  | 144 |
| 6.5 数学右脑思维的限度 .....  | 149 |

## 数学研究与左右脑思维的配合

|                         |     |
|-------------------------|-----|
| 七 数学研究与左右脑的配合 .....     | 153 |
| 7.1 数学研究中左右脑配合的作用 ..... | 153 |
| 7.2 数学研究中左右脑配合的方法 ..... | 158 |



## 绪 论



数学从它诞生那天起,就与思维结下了不解之缘。数学的存在和发展都要依靠思维,都要通过思维来表现。反过来,数学又是思维的工具。精湛的思维艺术常常要借助数学显示其美感和力量。“数学思维”作为一个统一的名词,经常挂在学者们的嘴边。人们对它的使用习以为常,大都不假思索。既然如此,专门写这样一本小书来讨论数学与思维,又有什么意义呢?

诚然,“数学思维”一词是被人们用惯了的,但用惯了的东西未必就是深刻理解了的东西。笼统地讲“数学思维”,每个学过数学的人都会联想到以往的许多数学思维活动,产生一种生动直观的、但却一言难尽的感受。但是要继续追问数学思维的本质特点和规律性,追问数学思维的不同类型和作用,追问数学思维与其他思维活动的关系,那就不是谁都能回答的了。对数学思维的深刻理解,必须经历一



番深沉的思索。当然,这种思索不应该是枯燥无味的,它应该充满机智、幽默和创造的活力。“深沉”的含义在于不能浅尝辄止,而应该有一种深入事物内部穷追不舍的精神。

对“数学思维”的思索,首先需要进行适当的解剖。这就是我们为什么要讨论“数学与思维”而不是“数学思维”的原因。把“数学”与“思维”分开来考察,再来看两者间的内在联系,许多事情可以看得更清楚些,更准确些。数学的思维活动在许多方面与其他科学的思维活动类似,同时又有自身特点。过去人们往往只注意数学思维活动与其他科学思维活动的差异,而且有时把这种差异绝对化。问题恰恰就出在对共性的忽视上。过去人们常常强调数学思维具有“高度的抽象性”和“严密的逻辑性”。这是不错的。但数学思维同时还具有类似自然科学思维的“观察、实验、类比、归纳”等特点,甚至具有类似社会科学思维的“猜测、反驳、想象、直觉、美感”等特点。当思维的所有类型差不多在数学中都能找到类似物时,人们自然要想到,这究竟是怎么一回事呢?数学与思维是怎样一种关系呢?数学思维与人脑构造是怎样一种关系呢?人们的眼界势必要扩大到整个思维科学和脑科学领域,在这样一个背景下认识数学思维自身的特点。

恰好,现代思维科学和脑科学研究的新进展,为解决这方面问题提供了重要资料和线索。现在,人们知道,人的大脑的两个半球具有不同的功能。左半脑主要担负逻辑分析和推理的任务,右半脑主要担负形象思维和审美的任务。



左、右半脑在生理机制上互相联系、互相促进。一个半脑的发展明显有助于另一个半脑机能的改善。过去人们常常强调的数学思维的抽象性和逻辑性,是同左半脑的思维功能相联系的。而数学思维具有的“实验、猜测、想象、直觉、美感”等特点,是同右半脑的思维功能相联系的。因此,我们对数学与思维关系的探讨,就需要考虑到两个半脑思维的不同特点及其相互关系。在本书中,我们分别讨论了数学与“左脑思维”和“右脑思维”的关系,并以此为基础探讨了数学思维与左右脑的配合问题,通过这样进一步的解剖过程,就能对数学与思维的关系获得更深入的认识。

讨论数学与思维的关系,对于数学研究和数学教育都有十分重要的意义。近年来,国内外数学界都很注重对数学发现和创造过程中思维活动规律的研究。<sup>①</sup> 美国著名数学家 G·波利亚(G. Polya)所著的《怎样解题》、《数学的发现》、《数学与猜想》等书译成中文出版后,产生了广泛影响。英国数学哲学家 I·拉卡托斯(I. Lakatos)的《证明与反驳》一书,也使数学工作者深受触动,思路大开。这些著作实际上都是从不同角度讨论数学与右脑思维的关系,作为对以往人们过于注重数学与左脑思维关系的偏向的补偿。应该指出,以往人们对数学与左脑思维关系的研究也是不够深入的。对数学逻辑严密性的追求往往是不言而喻的自发行

---

<sup>①</sup> 本书所引文献出处均以当页脚注形式给出。第一次出现时注明文献刊出的期刊名称或出版单位以及出版时间和作者,以后再出现同一文献时,均只给出名称和页码,而不再注明版本和时间。



动,但却很少考虑数学左脑思维的一般特点、必要性和局限性。数学研究和数学教育常常被当成抽象晦涩、枯燥刻板的事情。G·波利亚和I·拉卡托斯等人的工作,给数学研究和数学教育带来了一股新鲜气息,在一定程度上恢复了数学思维生动、机智,充满创造活力的本来面目。数学界的这种思想变化表明,数学与思维的关系正在成为今后数学发展的一个焦点。这方面的研究有可能使数学研究和数学教育获得新的动力,出现新的景象。

在数学研究方面,数学与思维的关系历来是由数学家们自发地维系着的。当数学与思维的关系成为自觉的认识对象时,必然会大大提高数学研究的水平。数学工作者们可以通过不断的反思,不断调整自己的思维结构,训练自己的思维能力,用灵活的方法和高超的技巧解决历史遗留的难题,开拓新的研究方向。对于数学家来说,最重要的是有一个思维灵敏的大脑。任何重大的数学发现和创造都是数学家思维方式发生大变革的结果。如果数学家们能够比较自觉地把思维方式的变化规律,显然会焕发更多的聪明才智,获得更加丰硕的成果。

在数学教育方面,数学与思维的研究将促进数学课程和教学方法的改革。现在人们越来越多地讨论着已往数学教育中的某些弊端,诸如过分强调死记硬背大量规则,做大量经验性的练习,忽视思想内容和能力训练,等等。美国数学家A·拉克斯(A. Lax)和G·格罗特(G. Groat)曾指出:“当用记忆规则的教学铺平通往正确答案的道路时,学生就



没有贡献其创造力的余地。学生们看不出数学和思维有关系；他们把它与一堆需要记忆的公式和规则联系在一起。”<sup>①</sup>要克服这种倾向，必须从一般的意义上弄清楚数学与思维的关系，使数学教师和学生们都意识到忽视数学思维能力带来的危害。这样才能逐渐选择合适的教学内容、教学原则和方法，从小培养学生的创造性，使数学真正成为一门思维的艺术，在现实应用中发挥更大的作用。

对数学与思维关系的讨论，在我国数学教育改革和发展中有特殊重要的意义。应该看到，由于我国传统文化的影响，人们往往只是从工具的角度来理解数学的功能，强调其算法性质。数学教育中比较注重计算和应用，而对逻辑思维 and 创造能力的培养都不甚注意。换言之，由于传统文化的影响，数学与左脑思维和右脑思维的关系都未能得到深入研究。因此，我国的数学教育尽管也有相当的规模和实力，但获得世界一流的研究成果还为数不多，也没有形成若干有自己思想特色的学派。要想使我国的数学研究进入世界先进水平，必须在数学教育中打下坚实的思想基础。从现在起，就应该重视数学的思维功能，重视学生们思维能力的培养。这一点应该引起我国数学界足够的注意。

讨论数学与思维的关系，对于数学之外的很多学科领域也是很重要的。自古以来，特别是在欧洲文化思想的发

---

<sup>①</sup> L·A·斯蒂恩主编：《明日数学》，华中工学院出版社 1987 年版，第 90—91 页。



展过程中,学习数学一直有着训练逻辑思维的功能。古希腊的几何学中之所以强调“尺规作图”,目的正是在于把训练逻辑思维的功能尽力加以发挥。研究数学与思维的关系,有助于人们了解数学在培养逻辑思维能力方面的意义和作用,提高逻辑思维的水平。这对于自然科学和社会科学各领域的发展都是大有好处的。对数学与思维关系的探讨,还有助于思维科学的发展。数学思维的丰富内容为思维科学研究提供了大量生动素材,促使人们更深入地思考思维过程的一般规律,了解各种思维活动的本质特点及其相互关系。由此看来,非数学专业的科学工作者,也都能从数学与思维的讨论中有所收获,有所补益。

数学与思维的关系是一个大题目,而本书只是做了一些初步探讨,未必涉及数学与思维关系的所有层面。对于读者来说,本书是一部入门性质的书籍,力求适应不同文化知识结构的较广大的读者群,尽量写得深入浅出,通俗易懂,又不失哲理性和启发性,目的在于引起更多的读者的兴趣,与我们一起来重视和深入探讨数学与思维的关系。一般说来,具有一定数学史知识和高中以上文化知识的读者,读这本书大概是不会有困难的。但是要抓住这个课题深入钻研下去,我们大家都要付出更多的气力。愿本书成为对数学与思维进行广泛研究的新的开端。

## 一 数学与抽象



### 1.1 数学的对象与抽象思维

数学是抽象性极强的一门科学。数学的对象都是抽象思维的产物。研究数学对象与抽象思维的关系,是对数学与思维关系进行探讨的出发点。

“抽象”这个词,来源于拉丁文“abstractio”,原文含有“排除、抽出”的意思。所谓抽象思维,一般指抽取出同类事物的共同的、本质的属性或特征,舍弃其他非本质的属性或特征的思维过程。这里有两个条件:第一,抽象出来的本质属性或特征原来就存在于同类事物之中,抽象的过程只是把它分离了出来;第二,抽象出来的一定是事物的本质属性或特征,是决定其他非本质的属性或特征的东西。数学的抽象思维在很多情况下也具有这样的特点,但在另一些情



况下则不尽然。

有许多数学对象是依靠抽取的办法获得的。比如从三只鸟、三个苹果和三棵树这类具体事物中抽象出“三”这个数字概念,在全体偶数、全体整数、全体有理数、全体实数这些集合的性质中抽象出“基数”这个概念,等等。古语说:“有所得必有所失”。经过这样抽象获得的数学对象,在概念外延上更宽广一些,但在内涵上(或结构上)就贫乏软弱一些。我们不妨称这种抽象类型为“弱抽象”。举个稍微深一点的例子。如果我们考察欧氏空间内积具有的性质,把它的基本性质抽取出来作为内积公理,舍弃欧氏空间内积的其他性质和具体形式,这样就得到了抽象的“内积”概念,它包括一切满足内积公理的关系。具有内积的线性空间叫做内积空间。内积空间比欧氏空间广,但内积空间中的拓扑结构比欧氏空间弱。弱抽象简单地说就是减弱数学结构的抽象。

弱抽象的关键在于从数学对象的众多属性或特征中辨认出本质属性或特征,从貌似不同的同类数学对象中找出共同的东西。这种抽象思维的法则,可称为“特征分离概括化法则”。运用这种法则需要很强的思维技巧,灵活地变换思考问题的角度。试看下面两个图形:<sup>①</sup>

---

<sup>①</sup> 注:这里的图1至图4选自 P. J. Davis & R. Hersh: The Mathematical Experience, Birkhäuser, 1981, Chapter IV.