大學叢書

函數論

下册

竹內端三著
胡濬濟譯

商務印書館發行

書號 51503
基價 45·00

大學叢書

函數論

下册

竹內端三著
胡濬濟譯

商務印書館發行

目　　錄

第八章　多價函數

§55. 多價函數

解析函數 $f(z)$ 從一元 $P(z|a)$ 出發，逐次作解析接續，求任意一點 b 爲中心之元之際，不拘其徑路如何，常得同一之 $P(z|b)$，則 $f(z)$ 稱 z 之一價函數．若對於同一之 b 點得種種之 $P(z|b)$，則 $f(z)$ 稱 z 之多價函數．自本書之開端迄前章，吾人僅論一價函數．本章中將討論多價函數．

於多價函數 $f(z)$ 之中，對於 z 之一值，$f(z)$ 之值有兩個三個等等，因而稱 $f(z)$ 曰二價函數，三價函數等等．若 $f(z)$ 之值有無數，則稱無限多價函數．

於微積分學中論實數函數之際，對於實變數 x 之一值，$f(x)$ 之值有一個以上存在時，常稱 $f(x)$ 爲多價函數；便宜上常按價之個數分爲各個一價函數處理之．然於複數解析函數，則情形完全不同．單因 $f(z)$ 之值有一個以上，不能斷定 $f(z)$ 爲多價函數(參看例 2, 3, 4)．且多價函數，不能分爲若干個一價函數(參看例 1, 5)．

今設 z 爲變數，w 爲函數，舉各種函數之例於下：

例 1.　$w^2=z$.

今設 z 及 w 之極形式，按次爲

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta),\qquad w=R(\cos\Theta+i\sin\Theta),$$

則
$$R^2(\cos 2\Theta+i\sin 2\Theta)=r(\cos\theta+i\sin\theta).$$

因此，得下列關係:

$$R=\sqrt{r}, \qquad \Theta=\frac{\theta}{2}+n\pi, \qquad (n\ \text{整數}).$$

總之，因所取 n 之值不同，w 之值互異. 爲區別計，用 w_n 記號.

今試取

$$w_0=\sqrt{r}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right),$$

今 z 沿一閉曲線向正方向繞一週，仍歸出發之點時，若其曲線不包含原點於內部，則 θ 於繞一週之後仍歸原有之値，w_0 出仍歸 w_0 之値. 反之，若其曲線含原點於其內部，則 θ 變爲 $\theta+2\pi$，而 w_0 變爲 w_1.

若 z 對於同此徑路，幾度環繞，則最初之 w_0 按次變爲 $w_1, w_2, \cdots\cdots$ 等之値. 然此處顯見

$$w_0=w_2=w_4=\cdots\cdots, \qquad w_1=w_3=w_5=\cdots\cdots(=-w_0)$$

故 w 對於 z 之一値，有兩個不相同之値 ($\pm w_0$).

故從 $w^2=z$ 所規定之 w，爲 z 之二價函數. 用 $\sqrt{z}$ 之記號表之. (第 19 節).

注意. $\sqrt{z}$ 表 $\pm w_0$ 之中何者，不能決定. 何則，z 在數平面上自由變動時，w_0 與 $-w_0$ 如上述相互推移故也

若 z 限於正實變數，則

$$w_0=\sqrt{r}, \qquad w_1=-\sqrt{r},$$

此時 z 不能於原點之周圍繞一週，故兩者決不能互相推移. 此卽 $w^2=z$ 視爲實函數時，得分爲兩個一價函數

$$w=\sqrt{z} \qquad \text{與} \qquad w=-\sqrt{z}$$

之原由也.

例 2. $w^2=z^2$.

對於 z 之一値，w 採取二値，卽 z 與 $-z$，然此二値決不互相推移. 令 z 畫任意閉曲線復歸原位置時，z 與 $-z$ 顯見復歸最初之値.

故此時 w 非 z 之二價函數，可視爲表兩個一價函數者也.

注意. 從解析函數之定義 (第 42 節)，冪級數之一集合可視爲一個解析函數者，必須其級數，用直接或間接解析接續，得互相引導. 今

$$w=z, \qquad w=-z$$

二冪級數(僅有一項之簡單級數)完全各別,不能從一方引導得他方. 故 $w^2=z^2$ 實規定兩個解析函數.

例 3. $w^3-(4z^2-1)w+2z=0$.

左邊分解爲因數,則爲

$$(w+2z)(w^2-2zw+1)=0$$

故得

$$w=-2z \qquad 與 \qquad w=z+\sqrt{z^2-1}.$$

故所與方程式實規定 w 爲一個 z 之一價函數及一個二價函數者也.

例 4. $w^2=1+\cos z$.

此時 w 一見如 z 之二價函數,然後從三角法之公式形化之,則

$$w^2=2\cos^2\frac{z}{2},$$

故得

$$w=\sqrt{2}\cos\frac{z}{2} \qquad 與 \qquad w=-\sqrt{2}\cos\frac{z}{2}.$$

故 w 表 z 之兩個一價函數.

例 5. $$w=\int_1^z\frac{dz}{z}.$$

被積分函數 $\frac{1}{z}$, 於 $z=0$ 之點有唯一之奇點. 故所討論之積分之積分路不得通過原點如不通過原點其積分路無論如何變化(1及 z 點固定), w 之值不變, 因此, 命

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta),$$

便宜上假定取下列積分路.

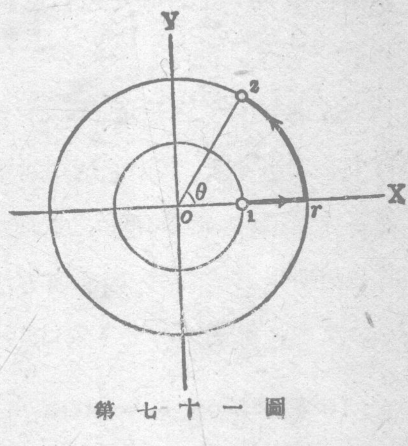
(1) 先沿實軸從 1 至 r,

$$\int_1^r\frac{dx}{x}=\log r.$$

(2) 再以原點爲中心, 其偏角從 0 變 θ, 則 r 有一定, 僅偏角變化. 故

$$dz=r(-\sin\theta+i\cos\theta)\,d\theta=izd\theta.$$

因此,



第七十一圖

$$\int_r^z \frac{dz}{z} = i\int_0^\theta d\theta = i\theta.$$

(1) 及 (2) 合併之，則得

$$\int_1^z \frac{dz}{z} = \log r + i\theta.$$

然若僅知 z 點之位置，則因 θ 之普通形式當爲 $\theta+2n\pi$ (n 整數)，故得

$$w = \log r + i(\theta+2n\pi).$$

(此即 (2) 式中之動點從 r 點幾度環繞圓周之後，復歸 z 之位置者相當.)

故 w 爲 z 之無限多價函數.

注意. $\displaystyle\int_1^z \frac{dz}{z} = \log z$ (參照第 18 節.)

最後吾人將證明關於無限多價函數之著名的 Poincaré-Volterra 氏之定理. 其定理爲:

於無限多價函數之中，以同一之變數值爲中心之一切元，作可計集合.

換句話說，雖在無限多價函數，對於 z 之一點，其一切函數值，吾人常得如 w_1, w_2,……等以自然數編號之記號表之而無遺漏. 證明之如下:

從函數 $f(z)$ 之一元 $P(z|a)$，逐次作解析接續，引至以任意一點 b 爲中心之元之際，其中途所用爲中心之點 a_1, a_2,……(其個數從第 42 節定理 2，常得視爲有限)之採取方法有無數. 而 $f(z)$ 爲多價函數時，其最後所得之 $P(z|b)$，因採取方法之互異，未必相同. 今設憑某組之 a_1, a_2,……，得 $P(z|b)$之一值; 若 a_1, a_2,……非皆爲有理數,* 則吾人得

---

*此處所謂有理數，指 $x+yi$ 而言，其 x 與 y 皆爲有理實數者.

以他組 $a'_1, a'_2, \cdots\cdots$ 代之，得同一之 $P(z|b)$，其一切中心 $a'_1, a'_2\cdots\cdots$ 爲有理數者．何則，若 a_1 非有理數，則採取一有理數 a'_1 與此無限逼近，且令適合下列二條件:

(i)　a'_1 在 $P(z|a_1)$ 之收斂圓內，

(ii)　a_2 在 $P(z|a'_1)$ 之收斂圓內．

則吾人用 $a'_1, a_2\cdots\cdots$ 代 $a_1, a_2, \cdots\cdots$ 顯見得同一之 $P(z|b)$．若 a_2 非有理數，依同樣方法，以 a_2' 代之．以下逐次代入，則結局得有理數 a'_1, $a'_2\cdots\cdots$ 之一組．

然從 $P(z|a)$ 引導至 $P(z|b)$ 之方法之數，決不多於作有限個（雖其數不定）有理數之一組之方法之數．然因有理數之全體作一可計集合（第一章之問題 6），故取有理數有限個，其排列之方法，亦必爲可計的無限．由此觀之，於無限多價函數 $f(z)$，在任意所與之點 b 上之一切 $P(z|b)$ 之集合，爲可計集合．

例題 1.　於本節例 2 之函數 $w^2=z^2$, $z=a$ 時與 $z=-a$ 比較之，則顯見 w 之二值互相替換．然則 w 爲 z 之二值函數乎？

例題 2.　問下列各函數有幾價？

(1)　$w^4=z^n(n=1, 2, 3, 4)$;　　(2)　$w^n=z^n$（n 爲自然數）;

(3)　$w^2=1+\sin z$;　　(4)　$w^2=z^2+az+1$（a 爲常數）．

例題 3.　a 爲常數時，

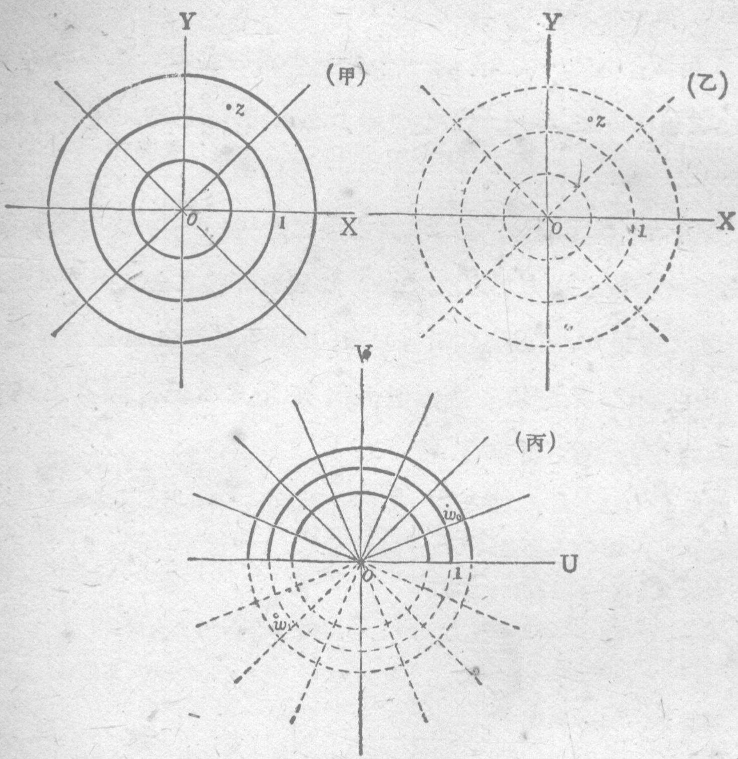
(1)　a^z,　　(2)　z^a,　　(3)　z^z,　　(4)　$\sqrt{e^z}$.

各爲 z 之幾價函數？

§ 56.　Riemann 氏之面

先討論前節之例 1 所採用之函數 $w=\sqrt{z}$ 之圖形表示法．

爲簡單起見，取 w 之一值 w_0，考 z 平面與 w 平面之對應. z 之偏角從 0 變至 2π 之際(甲圖)，w_0 在 w 平面之上半段(丙圖). z 於原點之周圍繞一週之後，其偏角更從 2π 變至 4π 時(乙圖) w_0 變爲 w_1，而在 w 平面之下半段(丙圖)，z 更繞第三週時，其對應之 w_2 再出現於 w



第七十二圖

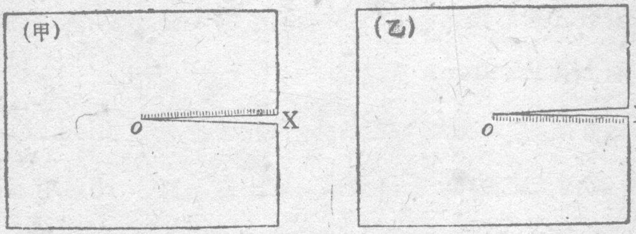
平面之上半段，蓋因 $w_2=w_0$ 故也. 故欲表示第三週之 z，無需另用新平面，仍用前述之甲圖可也. 通例，繞奇數次一週之際常用甲圖，繞偶數次一週之際常用乙圖，則此二頁平面與丙圖之一頁 w 平面上各點之

間，恰巧成立一對一之對應．

若僅用一頁（例如甲），則同一之點 z 旣與 w_0 復與 w_1 對應，故此對應爲一對二．若 z 每繞一週用一平面則其全體與丙之對應成無限對一．

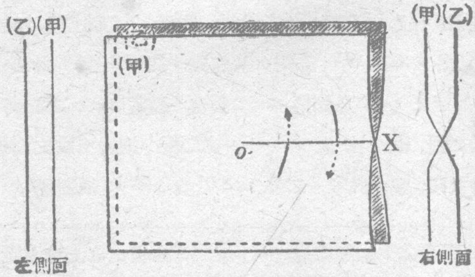
如是用二頁 z 平面，一頁 w 平面，則點 z 與點 w 之關係成一對一．然此處有不便之事，z 於原點之周圍每繞一週，必須從(甲)躍至(乙)或從(乙)躍至(甲)．此不便之點，吾人用下列方法芟除之．

今欲令點 z 於甲平面繞一週之後，自然移至乙平面，則令甲乙兩平面(例如)於實軸之正部分相連絡可也．詳言之，先將兩平面沿實軸之正部分截斷之(第七十三圖)，再將(甲)重疊於(乙)之上，於截斷線上，



第七十三圖

令甲之上緣與乙之下緣相連續，而同時甲之下緣與乙之上緣亦相銜接，如第七十四圖．故合成之面，於 OX 軸上交义，而一點於合成面上運



第七十四圖

動，過此交义線時，常依上記之方法連續，卽：

動點於甲乙之一面從 OX 之上(下)橫過 OX 時，於他面 OX 之下(上)出現，而

在同一平面內通過 OX 軸之反對方向，或移至他平面內之同側均絕對不可能．

換句話說，合成面之各頁*僅僅外觀上相交义，其各頁之實質，毫無因交义而攪亂，就一頁討論之，他頁之存在可以無視．

如是，用合成面，以其上之一點代表變數 z，則 z 與 w 之關係爲一對一且連續的．顯見其表示法極爲恰當．

多價函數之圖形表示，如下述(通例更爲複雜)，常用特殊連絡之合成面爲 z 面，稱 **Riemann 氏之面**．

從上例可推知，w 雖爲 z 之多價函數，以適當之 Riemann 氏面表示 z 點時，其面上之點 w，恰得視爲 z 之一價函數．此爲用 Riemann 氏面之第一目標．因此，從前一價函數所推知之諸結果，於適當制限之下，得推廣於多價函數．

*注意 1. Riemann 氏之面其各頁各成一數平面，而一切複數皆得以其上之點表示者也．例如前例之中 $z=3+4i$ 之點，旣在甲面上又在乙面上．惟其相異之處，在甲面上與 $w=\sqrt{3+4i}=2+i$ 對應，在乙面上與 $w=-(2+i)$ 對應．又如上述，甲乙兩面外觀上於 OX 相交，其實互爲獨立而各含有其 OX，非兩頁共有同一之 OX 也．故表正之實數值之點，於各面亦各有一個，例如甲之 $z=1$ 之點與 $w=1$ 對應，乙之 $z=1$ 之點與 $w=-1$ 之點對應．此時於 Riemann 氏之面，惟 $z=0$ 及 $z=-\infty$ 之二點（與交义線之兩端相當（卽下節稱爲分歧點者）於兩頁爲共同，按次與唯一之點 $w=0$ 及 $w=\infty$ 成對應．

---

*此處甲之上緣與乙之下緣連續爲一頁，甲之下緣與乙之上緣連續爲另一頁．但僅就 OX 之附近云耳，從合成面之全體考之，甲乙顯見各成一頁．