大學叢書

函數論

上冊

竹內端三著
胡濬濟譯

商務印書館發行

大學叢書

函數論

上册

竹內端三著

胡濬濟譯

商務印書館發行

原序

本書與著者曩日所刊行之高等微分學及高等積分學之程度相銜接,述關於複數函數之普遍理論並述橢圓函數之理論作其應用.

時至今日,函數之概念於數學中占重要之地位,已不待論.而於數學中所常用,所謂解析函數者,其深遠之本性,經視爲複變數之函數而研究之,方得闡明;此亦近代學者所不容疑之點也.所以不但專習純粹數學之士,卽有志於理化學工程學之學者,苟欲用微積分學以上之數理,不得不藉複數函數論爲階梯.一旦領悟複數活用之妙味,不但因此得明了初等函數之眞相,更進而欲自由使用橢圓函數,蓋亦非難事矣.本書之目的,實欲使讀者得達此境地也.

本書著者,以大正十一年以來,於東京帝國大學所講之函數論稿爲底稿,經幾次增删,而於卷末附以參考書及論文,以明斯學發達之大勢,又將數百例題及問題,分載於各節各章之末,以資讀者之練習.書中插入之圖一百十七幅,皆係著者自繪,而例題問題之中,屬於著者所創造者,亦不少.

最後,書坊裳華房,爲斯學計,以始終一貫之熱誠,贊助本書之刊行,著者對之,深表謝意.裳華房雖對於本書之印刷體裁,盡最善之努力,而本書之內容不能相侔,實著者學力淺陋所致,不勝遺憾.尙望諸大家不吝指正.

大正十五年三月　著者理學博士　竹內端三

目　　錄

函　數　論

第一章　緒論

§1. 有理數

正負整數與分數之全體及零總稱之曰**有理數**　有理數之全體成有大小次序之集合*, 各數之間得施用加減乘除四則算法. 今設 a, b, c 等表有理數, 其大小及關於四則之主要性質, 列舉如下:

(**大小**)　a 與 b 表示同一之有理數, 則以 $a=b$ 記之. 故必 $a=a$. 又 $a=b$, $b=c$, 則 $a=c$ 也.

[A]　a 若不等於 b (以 $a \neq b$ 記之), 則必 $a<b$ 或 $b<a$. ($a<b$ 或以 $b>a$ 記之, $b<a$ 或以 $a>b$ 記之).

[B]　$a<b$, 則 $a \neq b$.

[C]　$a<b$, $b<c$, 則 $a<c$.

兩個有理數 a, b 之間僅有下列三種關係

$$a>b, \quad a=b, \quad a<b$$

中之一種可成立, 觀上述性質之結果, 容易證明. 何則, 若 $a \neq b$, 則從 [A] 可知必 $a<b$ 或 $b<a$. 而此中任何一事均不能與 $a=b$ 並存觀 [B] 可知矣. 若 $a<b$ 且 $b<a$, 則由 [C] 可知 $a<a$, 由 [B] 可知 $a \neq a$, 其不合理也明甚. 故 a, b 兩數間, 僅限於 $a<b$, $a=b$, $a>b$ 之中唯一個關係得成立.

---

*此處所謂集合僅謂物件之聚集. 詳細當於第五節論之.

以上所用記號 $<, =, >$ 表示記號之左之數「小於」「等於」「大於」記號右邊之數. 上述三性質 [A], [B], [C] 不限於大小關係, 例如以「右」,「同位置」,「左」, 代「大」,「等」,「小」亦決無不合. 故各有理數以左右方向之一直線上之點代表之, 則各數間之大小關係, 以各代表點位置之左右觀之, 瞭如指掌矣.

(四則) [I] 兩個有理數 a, b 之間得施用加減乘除

$$a+b,\quad a-b,\quad a\times b,\quad a\div b,$$

各得一有理數. 但在除法中, b 須不等於零.

換句話說, 以零爲除數之除法摒棄之後, 有理數範圍內之四則算法爲普遍的.

[II] a 和 b 爲已知之數, 則

$$a+b,\quad a-b,\quad a\times b,\quad a\div b\quad (b\neq 0)$$

各得唯一之值.

換句話說, 有理數範圍內四則算法之結果, 爲唯一的決定也.

[III] 對易律 $$a+b=b+a,$$ $$a\times b=b\times a.$$

[IV] 結合律 $$a+b+c=a+(b+c),$$ $$a\times b\times c=a\times(b\times c).$$

[V] 配分律 $$a\times(b+c)=(a\times b)+(a\times c),$$ $$(b+c)\times a=(b\times a)+(c\times a).$$

[VI] 加法與減法各爲反算法, 乘法與除法亦各爲反算法. 即 $$a+b-b=a,\quad a-b+b=a,$$

$$a\times b\div b=a,\quad a\div b\times b=a.$$

[VII] 從 $a<b$, $a=b$, $a>b$, 按次得

$$a+c<b+c,\quad a+c=b+c,\quad a+c>b+c.$$

若 $c>0$, 與前述同樣, 從

$a<b$, $a=b$, $a>b$, 按次得

$$a\times c<b\times c,\quad a\times c=b\times c,\quad a\times c>b\times c.$$

若 $c<0$, 則

$$a\times c>b\times c,\quad a\times c=b\times c,\quad a\times c<b\times c.$$

若 $c=0$, 則

$$a\times c=b\times c=0.$$

從上述諸性質可推得種種恆等式及不等式. 吾人於初等代數學中熟知之矣.

吾人當本節結束之際, 注意下列一事.

假設 a 與 b 施用四則算法之結果得 c. 反之, 若僅知 c, 欲因之唯一的決定 a 及 b, 則不可能; 通常 a, b 之中一數與以任意之值, 則其餘一數亦即決定. 惟於下列之情形, a 與 b 有限制.

於 $a\times b=c$ 式中,

$c\neq 0$ 時, $a\neq 0$ 且 $b\neq 0$,

$c=0$ 時, $a=0$ 或 $b=0$.

$a\div b=c$ 式中,

無論 c 爲何數 $b\neq 0$.

若 $c=0$, 則 $a=0$.

例題. 試根據本節列舉之諸性質, 證明下列定理.

(1) $a<b$ 時, $a<\frac{a+b}{2}<b$.

(2) $a^2+b^2=0$ 時, $a=0$ 且 $b=0$.

§2. 有理數之稠密性

不相同任意二有理數之間至少有一個有理數. 例如 a, b 爲不相同二有理數, 則 $\frac{a+b}{2}$ 爲 a 與 b 之間一有理數 [前節之例題(1)]. 取 a 與 b 之間之一有理數 c, 則 a 與 c 之間及 c 與 b 之間至少各有一個有理數. 依同理反復推論之, 故知結局二相異有理數之間, 有無數有理數存在.

此性質約言之, 稱有理之全體成稠密之集合.

今設 a 爲一有理數, $x<a$ 之一切有理數 x 之集合名之曰 A_1, 則 A_1 之中無最大之數. 何則, 設 A_1 之最大之數爲 g, 則 g 與 a 之間應有有理數存在, 取其中一數 g', 則 $g<g'<a$. 卽 A_1 之中有大於 g 之有理數 g' 存在, 卽 g 不得爲 A_1 之最大數也. 故 A_1 爲無最大數之集合.

按同理 $a<x$ 之一切有理數 x 之集合名之曰 A_2, 則 A_2 之中無最小數.

若 A_1 之中加入 a 稱爲 $\overline{A}_1$, 則 $\overline{A}_1$ 以 a 爲其最大數. 以同法 A_2 之中加入 a 稱爲 $\overline{A}_2$, 則 $\overline{A}_2$ 以 a 爲其最小數.

取 A_1 與 $\overline{A}_2$ (或 $\overline{A}_1$ 與 A_2)一對集合考之, 有下列性質.

(1) 此一對集合含有一切有理數. 卽任意有理數必含於 A_1 或 $\overline{A}_2$ ($\overline{A}_1$ 或 A_2) 中之一也.

(2)　此一對集合皆決不空虛，即 A_1 與 $\overline{A}_2$ ($\overline{A}_1$ 與 A_2) 皆實在含有有理數也．換句話說，有理數全體，非含於 A_1 或 $\overline{A}_2$ ($\overline{A}_1$ 或 A_2) 之一方，實爲此二集合所分割也．

(3)　屬於集合一方 A_1 (或 $\overline{A}_1$) 之有理數，皆小於屬於他方 $\overline{A}_2$ (或 A_2) 之有理數．

有理數全體分爲二集合，兼有上述之性質，則此一對集合稱之曰有理數之切斷(或譯截斷)．此切斷以 $(A_1, \overline{A}_2)$ 或 $(\overline{A}_1, A_2)$ 之記號表之．

以某種方法有理數之切斷 (B_1, B_2)，就 B_1 之最大數與 B_2 之最小數存否討論之，不出下列三者．

(i)　B_1 有最大數而 B_2 無最小數，或 B_1 無最大數而 B_2 有最小數．

(ii)　B_1 有最大數同時 B_2 亦有最小數．

(iii)　B_1 無最大數 B_2 亦無最小數．

前舉之例 $(A_1, \overline{A}_2)$ 與 $(\overline{A}_1, A_2)$ 皆屬於 (i)，故 (i) 得實在存在．(ii) 不能實在存在．何則，設 B_1 之最大數爲 g，B_2 之最小數爲 l，則從切斷之性質 (3) 得 $g<l$．然有理數全體爲稠密之集合，故 g 與 l 之間，當有有理數存在，而此等有理數，既不屬於 B_1 又不屬於 B_2．即 B_1 與 B_2 不能含有有理數之全體，此與 $(B_1\ B_2)$ 爲有理數之切斷之假定相反．

更就 (iii) 考之，前例之中，取 A_1, A_2 作 (A_1, A_2)，則適與 (iii) 相同．然 A_1, A_2 之中，均不含 a，故 (A_1, A_2) 非有理數全體之切斷，以其缺 a 之一數也．若塡補所缺之一數 a，則實與 (i) 相同矣．由此觀之，若有理數之切斷，生 (iii) 項之狀況，則其中必有一間隙，可以插入一

新數，吾人填補此新數之後，其切斷之狀態與 (i) 同，亦可知矣.

然 (iii) 項之切斷實在得成立與否，亦以後必須解決之問題也.

例題. 從稠密性證明下列事項.

(1) 與已知有理數任何接近之有理數必存在.

(2) 絕對值任何小之有理數必存在.

§3. 無理數

今設 $x^2<2$ 之一切有理數 x 之集合爲 B_1，$x^2>2$ 之一切有理數 x 之集合設爲 B_2. (適合 $x^2=2$ 之有理數 x 不得存在，爲吾人已知之事實.) 則 (B_1, B_2) 作有理數之切斷，而前節之條件 (1), (2), (3) 皆得適合，容易證明.

然 B_1 不得有最大數之集合也. 何則，設 B_1 之中，取任意有理數 m，則 $2-m^2>0$，故適合下列不等式之正有理數 h 必存在[前節例題 (2)]，

$$h<m, \qquad h<\frac{3-m^2}{3m}.$$

然

$$(m+h)^2=m^2+(2m+h)h<m^2+3mh<2,$$

即 B_1 之中有較 m 更大之有理數 $m+h$ 存在也. 故 B_1 不得有最大數.

用同法，可證 B_2 不得有最小數. 由此觀之，切斷 (B_1, B_2) 與前節所舉之 (iii) 相當，此例表示稠密之有理數之間，尚有可以插入一新數之間隙也.

此種新數稱之曰**無理數**.

凡有理數之切斷 (B_1, B_2) 之中，B_1 無最大數，B_2 無最小數時，吾人常於其中得插入一無理數. 換句話說，無理數者，充填有理數與有

理數之間所存在之空隙之數也. 故欲表示一無理數, 卽以惹起此無理數的有理數之切斷表之. 例如切斷 (B_1, B_2) 之間可插入無理數設爲 β, 則以

$$\beta=(B_1, B_2)$$

記之.

若有理數做此記法而襲用前節之記號, 則可寫爲

$$a=(A_1, \overline{A}_2) \quad 或 \quad a=(\overline{A}_1, A_2)$$

兩者均可用. 然通常有理數之任意切斷常指一有理數或無理數而言. 其數稱之曰該切斷所定之數.

有理數與無理數總稱之曰實數. 有理數之切斷, 定一實數, 反之, 一實數常得以有理數切斷定之.

今述關於無理數之大小及四則算法之定義於下.

(大小) 無理數 β 從有理數之切斷 (B_1, B_2) 決定之際, 一有理數 a 因屬於 B_1 或 B_2 得決定

$$\beta>a \quad 或 \quad \beta<a.$$

無理數與有理數之間之大小因之決定.

今定無理數彼此之大小, 設

$$\beta=(B_1, B_2), \quad \gamma=(C_1, C_2)$$

爲二無理數, B_1 與 C_1 完全一致, 則 $\beta=\gamma$. 若 B_1 與 C_1 非完全一致, 屬於 B_1 之有理數, 有不屬於 C_1 者, 或屬於 C_1 之有理數, 有不屬於 B_1 者, 前者爲 $\beta>\gamma$, 後者爲 $\beta<\gamma$.

注意. 上述之 β, γ 切勿忘其爲無理數. 若 β, γ 爲有理數, 例如

$$\beta=(\overline{A}_1, A_2), \qquad \gamma=(A_1, \overline{A}_2),$$

屬於 $\overline{A}_1$ 之有理數有不屬於 A_1 者, 然非 $\beta>\gamma$, 實 $\beta=\gamma$ 也.

據此定義，則第 1 節所舉關於有理數之大小之性質 [A], [B], [C] 得適用於實數全體矣.

定理 1. 不相等二實數之間，有無數有理數存在.

設不等之二實數爲 α, β 而 $\alpha<\beta$.

若 α, β 均爲有理數，則從有理數之稠密性，本定理之成立，無待證明.

若 α 爲有理數，β 爲無理數，設定 β 之有理數之切斷爲 (B_1, B_2)，則 α 當屬於 B_1. 然 B_1 無最大之數，故 B_1 之中，必有有理數大於 α；設 b 爲其中之一數. 二有理數 α, b 之間有無數有理數，故 α, β 之間有無數有理數. α 爲無理數，β 爲有理數時，亦得用同法證之.

再設 α, β 均爲無理數，則自上述關於大小之定義，必有

$$\alpha<a<\beta$$

之有理數 a 存在. 然據上述證明 α, a 之間及 a, β 之間有無數有理數存在. 故 α, β 之間有無數有理數存在.

定理 2. 對於任意實數 α 必有

$$a_1<\alpha<a_2, \quad a_2-a_1<\varepsilon$$

之有理數 a_1, a_2 存在. 式中 ε 爲所與正有理數.

何則，取小於 $\dfrac{\varepsilon}{2}$ 之正有理數 ε'，作無窮數列

$$\cdots\cdots, -3\varepsilon', -2\varepsilon', -\varepsilon', 0, \varepsilon', 2\varepsilon', 3\varepsilon', 4\varepsilon', \cdots\cdots$$

則所與數 α 或與其中之一數合一，或在相鄰二數之間. 例如

$$n\varepsilon' \leqq \alpha < (n+1)\varepsilon'$$