

大學叢書

論 數 函

上 冊

竹內端三著
胡濬濟譯

商務印書館發行

大學叢書

函數論

上册

江苏工业学院图书馆
藏书章

商務印書館發行

原 序

本書與著者曩日所刊行之高等微分學及高等積分學之程度相銜接，述關於複數函數之普遍理論並述橢圓函數之理論作其應用。

時至今日，函數之概念於數學中占重要之地位，已不待論。而於數學中所常用，所謂解析函數者，其深遠之本性，經視為複變數之函數而研究之，方得闡明；此亦近代學者所不容疑之點也。所以不但專習純粹數學之士，即有志於理化學工程學之學者，苟欲用微積分學以上之數理，不得不藉複數函數論為階梯。一旦領悟複數活用之妙味，不但因此得明了初等函數之真相，更進而欲自由使用橢圓函數，蓋亦非難事矣。本書之目的，實欲使讀者得達此境地也。

本書著者，以大正十一年以來，於東京帝國大學所講之函數論稿為底稿，經幾次增刪，而於卷末附以參考書及論文，以明斯學發達之大勢，又將數百例題及問題，分載於各節各章之末，以資讀者之練習。書中插入之圖一百十七幅，皆係著者自繪，而例題問題之中，屬於著者所創造者，亦不少。

最後，書坊裳華房，為斯學計，以始終一貫之熱誠，贊助本書之刊行，著者對之，深表謝意。裳華房雖對於本書之印刷體裁，盡最善之努力，而本書之內容不能相伴，實著者學力淺陋所致，不勝遺憾。尚望諸大家不吝指正。

大正十五年三月 著者理學博士 竹內端三

目 錄

	頁數
第一章 緒論	1
1. 有理數	1
2. 有理數之稠密性	4
3. 無理數	6
4. 實數之連續性	12
5. 集合	14
6. 一直線上之點集合	18
7. 一平面上之點集合	23
第一章 問題	32
第二章 複數	36
8. 複數	36
9. 數平面	41
10. 變數及函數	44
11. 一次函數	50
12. 無限遠點	61
13. 數球面	64
14. 數平面上之點集合	67
第二章 問題	70
第三章 初等函數	75
15. 代數函數	75

	頁數
16. 指數函數	76
17. 三角函數	79
18. 對數函數	83
19. 冪	85
20. 反三角函數	89
21. 初等函數	90
第三章 問題	94
第四章 微分法	97
22. 極限值	97
23. 函數之連續性	100
24. 微係數	104
25. 函數之正則性	109
26. 關於正則函數之定理	114
27. 正則函數之特徵	121
第四章 問題	127
第五章 積分法	131
28. 定積分	131
29. 關於定積分之定理	136
30. 線積分	142
31. Cauchy 氏之定理	150
32. 實數積分之計算	162

	頁數
33. 正則函數之積分表示	169
34. 不定積分	174
35. 正則函數之導函數	178
第五章 問題	182
第六章 冪級數	187
36. 複數級數	187
37. 函數項之級數	191
38. 均勻收斂級數	194
39. 冪級數	198
40. Taylor 氏之展開	204
41. 一致之定理	209
42. 解析函數	214
43. 存在定理	219
44. 廣義之解析接續	228
45. Vitali 氏之定理	231
第六章 問題	237
第七章 奇點	243
46. 一價函數之奇點	243
47. Laurent 氏之展開	249
48. 關於無限遠點之規約	255
49. 關於極之定理	258

	頁數
50. 有理函數	269
51. Mittag-Leffler 氏之定理	275
52. 超越整函數	282
53. 補遺 {	(I) Mittag-Leffler 氏定理之擴張 286
	(II) 關於超越整函數之定理之擴張 288
	(III) 有任意自然界限之解析函數 289
54. Runge 氏之定理	290
第七章 問題	298
第八章 多價函數	303
55. 多價函數	303
56. Riemann 面	307
57. 分歧點	312
58. 代數函數	316
59. \sqrt{z} 及相類之函數	320
60. 橢圓無理函數	331
61. 代數函數之積分	339
62. 橢圓積分	344
第八章 問題	362
第九章 週期函數	367
63. 函數之週期性	367
64. Fourier 之級數	373

	頁數
65. 指數有理函數	379
66. 三角函數之部分分數式展開	385
67. Jacobi 之橢圓函數(實數變數)	392
68. Landen 之變換	400
69. Jacobi 之橢圓函數(複數變數)	407
第九章 問題	412
第十章 橢圓函數	419
70. 記號和規約	419
71. Liouville 之定理	421
72. \wp 函數	425
73. ζ 函數	434
74. σ 函數	437
75. 橢圓函數之表示式	445
76. \wp 函數及 ζ 函數之加法定理	448
77. 橢圓函數之通性	452
78. 有代數的加法定理之函數	454
79. $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 函數	459
80. σ 函數之加法定理	465
81. sn, cn, dn 函數	467
第十章 問題	477
第十一章 續橢圓函數	483

	頁數
82. 第二種橢圓函數	483
83. 第三種橢圓函數	485
84. θ 函數	488
85. Weierstrass 之諸函數	502
86. Jacobi 之諸函數	506
第十一章 問題	510
第十二章 等角寫照	517
87. 總論	517
88. 藉橢圓函數之寫照	525
89. 藉一次函數之寫照	534
90. Riemann 氏之定理	541
91. 調和函數	550
92. 母數函數及 Picard 之定理	555
第十二章 問題	562
參考書及論文	567
問題答數	577
學用語之英德日中文對照表	587
索引	593
I. 事項索引	593
II. 人名索引	600

函 數 論

第一章 緒論

§1. 有理數

正負整數與分數之全體及零總稱之曰有理數。有理數之全體成有大小次序之集合^{*}，各數之間得施用加減乘除四則算法。今設 a, b, c 等表有理數，其大小及關於四則之主要性質，列舉如下：

(大小) a 與 b 表示同一之有理數，則以 $a=b$ 記之。故必 $a=a$ 。又 $a=b, b=c$ ，則 $a=c$ 也。

[A] a 若不等於 b (以 $a \neq b$ 記之)，則必 $a < b$ 或 $b < a$ 。 ($a < b$ 或以 $b > a$ 記之， $b < a$ 或以 $a > b$ 記之)。

[B] $a < b$ ，則 $a \neq b$ 。

[C] $a < b, b < c$ ，則 $a < c$ 。

兩個有理數 a, b 之間僅有下列三種關係

$$a > b, \quad a = b, \quad a < b$$

中之一種可成立，觀上述性質之結果，容易證明。何則，若 $a \neq b$ ，則從 [A] 可知必 $a < b$ 或 $b < a$ 。而此中任何一事均不能與 $a = b$ 並存觀 [B] 可知矣。若 $a < b$ 且 $b < a$ ，則由 [C] 可知 $a < a$ ，由 [B] 可知 $a \neq a$ ，其不合理也明甚。故 a, b 兩數間，僅限於 $a < b, a = b, a > b$ 之中唯一個關係得成立。

^{*} 此處所謂集合僅謂物件之聚集。詳細當於第五節論之。

以上所用記號 $<$, $=$, $>$ 表示記號之左之數「小於」「等於」「大於」記號右邊之數。上述三性質 [A], [B], [C] 不限於大小關係，例如以「右」，「同位置」，「左」，代「大」，「等」，「小」亦決無不合。故各有理數以左右方向之一直線上之點代表之，則各數間之大小關係，以各代表點位置之左右觀之，瞭如指掌矣。

(四則) [I] 兩個有理數 a, b 之間得施用加減乘除

$$a+b, a-b, a \times b, a \div b,$$

各得一有理數。但在除法中， b 須不等於零。

換句話說，以零為除數之除法摒棄之後，有理數範圍內之四則算法為普遍的。

[II] a 和 b 為已知之數，則

$$a+b, a-b, a \times b, a \div b \quad (b \neq 0)$$

各得唯一之值。

換句話說，有理數範圍內四則算法之結果，為唯一的決定也。

[III] 對易律

$$a+b=b+a,$$

$$a \times b=b \times a.$$

[IV] 縮合律

$$a+b+c=a+(b+c),$$

$$a \times b \times c=a \times (b \times c).$$

[V] 配分律

$$a \times (b+c)=(a \times b)+(a \times c),$$

$$(b+c) \times a=(b \times a)+(c \times a).$$

[VI] 加法與減法各為反算法，乘法與除法亦各為反算法。

即

$$a+b-b=a, \quad a-b+b=a,$$

$$a \times b \div b = a, \quad a \div b \times b = a.$$

[VII] 從 $a < b$, $a = b$, $a > b$, 按次得

$$a + c < b + c, \quad a + c = b + c, \quad a + c > b + c.$$

若 $c > 0$, 與前述同樣, 從

$a < b$, $a = b$, $a > b$, 按次得

$$a \times c < b \times c, \quad a \times c = b \times c, \quad a \times c > b \times c.$$

若 $c < 0$, 則

$$a \times c > b \times c, \quad a \times c = b \times c, \quad a \times c < b \times c.$$

若 $c = 0$, 則

$$a \times c = b \times c = 0.$$

從上述諸性質可推得種種恆等式及不等式。吾人於初等代數學中熟知之矣。

吾人當本節結束之際, 注意下列一事。

假設 a 與 b 施用四則算法之結果得 c 。反之, 若僅知 c , 欲因之唯一的決定 a 及 b , 則不可能; 通常 a, b 之中一數與以任意之值, 則其餘一數亦即決定。惟於下列之情形, a 與 b 有限制。

於 $a \times b = c$ 式中,

$$c \neq 0 \text{ 時, } a \neq 0 \text{ 且 } b \neq 0,$$

$$c = 0 \text{ 時, } a = 0 \text{ 或 } b = 0.$$

$a \div b = c$ 式中,

$$\text{無論 } c \text{ 爲何數 } b \neq 0.$$

$$\text{若 } c = 0, \text{ 則 } a = 0.$$

例題. 試根據本節列舉之諸性質, 證明下列定理.

(1) $a < b$ 時, $a < \frac{a+b}{2} < b$.

(2) $a^2 + b^2 = 0$ 時, $a = 0$ 且 $b = 0$.

§ 2. 有理數之稠密性

不相同任意二有理數之間至少有一個有理數. 例如 a, b 為不相同二有理數, 則 $\frac{a+b}{2}$ 為 a 與 b 之間一有理數 [前節之例題(1)]. 取 a 與 b 之間之一有理數 c , 則 a 與 c 之間及 c 與 b 之間至少各有一個有理數. 依同理反復推論之, 故知結局二相異有理數之間, 有無數有理數存在.

此性質約言之, 稱有理之全體成稠密之集合.

今設 a 為一有理數, $x < a$ 之一切有理數 x 之集合名之曰 A_1 , 則 A_1 之中無最大之數. 何則, 設 A_1 之最大之數為 g , 則 g 與 a 之間應有有理數存在, 取其中一數 g' , 則 $g < g' < a$. 即 A_1 之中有大於 g 之有理數 g' 存在, 即 g 不得為 A_1 之最大數也. 故 A_1 為無最大數之集合.

按同理 $a < x$ 之一切有理數 x 之集合名之曰 A_2 , 則 A_2 之中無最小數.

若 A_1 之中加入 a 稱為 \bar{A}_1 , 則 \bar{A}_1 以 a 為其最大數. 以同法 A_2 之中加入 a 稱為 \bar{A}_2 , 則 \bar{A}_2 以 a 為其最小數.

取 A_1 與 \bar{A}_2 (或 \bar{A}_1 與 A_2) 一對集合考之, 有下列性質.

(1) 此一對集合含有一切有理數. 即任意有理數必含於 A_1 或 \bar{A}_2 (\bar{A}_1 或 A_2) 中之一也.

(2) 此一對集合皆決不空虛，即 A_1 與 \bar{A}_2 (\bar{A}_1 與 A_2) 皆實在含有有理數也。換句話說，有理數全體，非含於 A_1 或 \bar{A}_2 (\bar{A}_1 或 A_2) 之一方，實爲此二集合所分割也。

(3) 屬於集合一方 A_1 (或 \bar{A}_1) 之有理數，皆小於屬於他方 \bar{A}_2 (或 A_2) 之有理數。

有理數全體分爲二集合，兼有上述之性質，則此一對集合稱之曰有理數之切斷(或譯截斷)。此切斷以 (A_1, \bar{A}_2) 或 (\bar{A}_1, A_2) 之記號表之。

以某種方法有理數之切斷 (B_1, B_2) ，就 B_1 之最大數與 B_2 之最小數存否討論之，不出下列三者。

(i) B_1 有最大數而 B_2 無最小數，或 B_1 無最大數而 B_2 有最小數。

(ii) B_1 有最大數同時 B_2 亦有最小數。

(iii) B_1 無最大數 B_2 亦無最小數。

前舉之例 (A_1, \bar{A}_2) 與 (\bar{A}_1, A_2) 皆屬於(i)，故(i)得實在存在。(ii)不能實在存在。何則，設 B_1 之最大數爲 g ， B_2 之最小數爲 l ，則從切斷之性質(3)得 $g < l$ 。然有理數全體爲稠密之集合，故 g 與 l 之間，當有有理數存在，而此等有理數，既不屬於 B_1 又不屬於 B_2 。即 B_1 與 B_2 不能含有有理數之全體，此與 (B_1, B_2) 爲有理數之切斷之假定相反。

更就(iii)考之，前例之中，取 A_1, A_2 作 (A_1, A_2) ，則適與(iii)相同。然 A_1, A_2 之中，均不含 a ，故 (A_1, A_2) 非有理數全體之切斷，以其缺 a 之一數也。若填補所缺之一數 a ，則實與(i)相同矣。由此觀之，若有有理數之切斷，生(iii)項之狀況，則其中必有一間隙，可以插入一

新數，吾人填補此新數之後，其切斷之狀態與 (i) 同，亦可知矣。

然 (iii) 項之切斷實在得成立與否，亦以後必須解決之問題也。

例題。從稠密性證明下列事項。

(1) 與已知有理數任何接近之有理數必存在。

(2) 絕對值任何小之有理數必存在。

§3. 無理數

今設 $x^2 < 2$ 之一切有理數 x 之集合為 B_1 ， $x^2 > 2$ 之一切有理數 x 之集合設為 B_2 。（適合 $x^2 = 2$ 之有理數 x 不得存在，為吾人已知之事實。）則 (B_1, B_2) 作有理數之切斷，而前節之條件 (1), (2), (3) 皆得適合，容易證明。

然 B_1 不得有最大數之集合也。何則，設 B_1 之中，取任意有理數 m ，則 $2 - m^2 > 0$ ，故適合下列不等式之正有理數 h 必存在 [前節例題 (2)]，

$$h < m, \quad h < \frac{3 - m^2}{3m}.$$

然

$$(m + h)^2 = m^2 + (2m + h)h < m^2 + 3mh < 2,$$

即 B_1 之中有較 m 更大之有理數 $m + h$ 存在也。故 B_1 不得有最大數。

用同法，可證 B_2 不得有最小數。由此觀之，切斷 (B_1, B_2) 與前節所舉之 (iii) 相當，此例表示稠密之有理數之間，尚有可以插入一新數之間隙也。

此種新數稱之曰無理數。

凡有理數之切斷 (B_1, B_2) 之中， B_1 無最大數， B_2 無最小數時，吾人常於其中得插入一無理數。換句話說，無理數者，充填有理數與有

理數之間所存在之空隙之數也。故欲表示一無理數，即以惹起此無理數的有理數之切斷表之。例如切斷 (B_1, B_2) 之間可插入無理數設為 β ，則以

$$\beta = (B_1, B_2)$$

記之。

若有理數做此記法而襲用前節之記號，則可寫為

$$a = (A_1, \bar{A}_2) \quad \text{或} \quad a = (\bar{A}_1, A_2)$$

兩者均可用。然通常有理數之任意切斷常指一有理數或無理數而言。其數稱之曰該切斷所定之數。

有理數與無理數總稱之曰實數。有理數之切斷，定一實數，反之，一實數常得以有理數切斷定之。

今述關於無理數之大小及四則算法之定義於下。

(大小) 無理數 β 從有理數之切斷 (B_1, B_2) 決定之際，一有理數 a 因屬於 B_1 或 B_2 得決定

$$\beta > a \quad \text{或} \quad \beta < a.$$

無理數與有理數之間之大小因之決定。

今定無理數彼此之大小，設

$$\beta = (B_1, B_2), \quad \gamma = (C_1, C_2)$$

為二無理數， B_1 與 C_1 完全一致，則 $\beta = \gamma$ 。若 B_1 與 C_1 非完全一致，屬於 B_1 之有理數，有不屬於 C_1 者，或屬於 C_1 之有理數，有不屬於 B_1 者，前者為 $\beta > \gamma$ ，後者為 $\beta < \gamma$ 。

注意。上述之 β, γ 切勿忘其為無理數。若 β, γ 為有理數，例如

$$\beta = (\bar{A}_1, \bar{A}_2), \quad \gamma = (A_1, \bar{A}_2),$$

屬於 \bar{A}_1 之有理數有不屬於 A_1 者，然非 $\beta > \gamma$ ，實 $\beta = \gamma$ 也。

據此定義，則第 1 節所舉關於有理數之大小之性質 [A], [B], [C] 得適用於實數全體矣。

定理 1. 不相等二實數之間，有無數有理數存在。

設不等之二實數為 a, β 而 $a < \beta$ 。

若 a, β 均為有理數，則從有理數之稠密性，本定理之成立，無待證明。

若 a 為有理數， β 為無理數，設定 β 之有理數之切斷為 (B_1, B_2) ，則 a 當屬於 B_1 。然 B_1 無最大之數，故 B_1 之中，必有有理數大於 a ；設 b 為其中之一數。二有理數 a, b 之間有無數有理數，故 a, β 之間有無數有理數。 a 為無理數， β 為有理數時，亦得用同法證之。

再設 a, β 均為無理數，則自上述關於大小之定義，必有

$$a < a < \beta$$

之有理數 a 存在。然據上述證明 a, a 之間及 a, β 之間有無數有理數存在。故 a, β 之間有無數有理數存在。

定理 2. 對於任意實數 a 必有

$$a_1 < a < a_2, \quad a_2 - a_1 < \varepsilon$$

之有理數 a_1, a_2 存在。式中 ε 為所與正有理數。

何則，取小於 $\frac{\varepsilon}{2}$ 之正有理數 ε' ，作無窮數列

$$\dots, -3\varepsilon', -2\varepsilon', -\varepsilon', 0, \varepsilon', 2\varepsilon', 3\varepsilon', 4\varepsilon', \dots$$

則所與數 a 或與其中之一數合一，或在相鄰二數之間。例如

$$n\varepsilon' \leq a < (n+1)\varepsilon'$$