新世纪高等院校精品教材

SHUXUE WULI FANGCHENG

数学物理方程

李胜宏 陈仲慈 潘祖梁 编著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

新世纪高等院校精品教材

数学物理方程

李胜宏　陈仲慈　潘祖梁　编著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学物理方程／李胜宏，陈仲慈，潘祖梁编著．—杭州：浙江大学出版社，2008.1
ISBN 978-7-308-05667-0

Ⅰ.数… Ⅱ.①李…②陈…③潘… Ⅲ.数学物理方程 Ⅳ.O175.24

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 177444 号

数学物理方程

李胜宏　陈仲慈　潘祖梁　编著

责任编辑　徐素君
封面设计　刘依群
出版发行　浙江大学出版社
（杭州市天目山路 148 号　邮政编码 310028）
（E-mail：zupress@mail.hz.zj.cn）
（网址：http://www.zjupress.com
http://www.press.zju.edu.cn）
电话：0571—88925592，88273066（传真）
排　　版　浙江大学出版社电脑排版中心
印　　刷　杭州浙大同力教育彩印有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16
印　　张　8.5
字　　数　218 千
版 印 次　2008 年 1 月第 1 版　2008 年 1 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-308-05667-0
定　　价　15.00 元

浙江大学出版社发行部邮购电话(0571)88072522

前　　言

本书是在浙江大学出版社出版的《工程中的偏微分方程》基础上修改而成的。

2006年，浙江大学公共基础课程指导委员会对全校公共基础课程进行了重新审定，将原有的“常微和偏微分方程”分为“常微分方程”和“偏微分方程”两门课程，它们均被列为大类课程，并对教学学时进行了调整。

本书就是根据新的教学安排，并结合作者的多年教学经验，以及参考使用过《工程中的偏微分方程》师生的意见，在整体上保持原书所具有的风格和特色的基础上，对其内容进行了重新安排和改写；对例题选讲以及习题配备也进行了调整，使之更加符合现代教学实际。编写时突出方法和应用，力求写得通俗易懂、深入浅出，由于大纲规定的学时较少，不同专业在使用时可灵活选取内容，我们希望通过本次修改更能适应非数学专业的各理、工专业的教学要求。

在本书的编写过程中，得到了“常微分方程”和“偏微分方程”课程负责人薛儒英老师和贾厚玉老师的大力支持。他们仔细阅读了全书的手稿，根据他们使用的情况和教学经验，并综合其他教师和学生的使用情况，提出了许多建设性意见，使得本书增色不少。对于他们所付出的辛勤劳动和认真负责的精神表示感谢和敬佩。同时，感谢所有对本书修订过程给予帮助的老师和学生。

由于我们的教学经验和水平有限，书中不当之处在所难免，希望读者给我们反馈意见，以便在进一步修订时改正，使得本书日臻完善。

编著者

2008年元月

目　　录

第1章　方程的导出和定解问题

第2章　行波法

第3章　分离变量法和特殊函数

第4章 积分变换法

第5章 Green 函数法

第 1 章　方程的导出和定解问题

在这一章里，我们将通过弦振动、膜振动、热传导等物理模型，说明如何从实际问题导出数学物理方程，并相应地提出定解条件和定解问题等概念．它们将是本课程所介绍的理论与方法的主要研究对象．另外，为了使读者更好了解数学物理方程的基本理论和定解问题的求解方法，我们将在§1.3 中介绍二阶线性方程的分类和叠加原理．

§1.1　方程的导出

常微分方程中的未知函数都是单元函数，如质点的位移、电路中电流、电压等物理量均是时间 t 的函数，这些物理量的变化规律在数学上的表示就是常微分方程．如挂在弹簧上的物体在重力和弹性力的作用下，其运动方程为

$$\frac{d^2 s}{dt^2}+\frac{g}{a}s=g$$

这里 a 和 g 都是已知的常数，$s=s(t)$ 是未知函数，表示 t 时刻物体离开平衡位置的位移．

但在科学研究及工程技术中还有许多物理量不仅与时间 t 有关，还与空间的位置 (x,y,z) 有关．如声波在介质中的传播，电磁波的电场强度和磁感应强度随空间和时间的变化，物体内的温度分布等．研究这些物理量的变化规律时，就会得到含有未知函数及其偏导数的关系式，即偏微分方程，又称**数学物理方程**．下面我们以几个典型方程的推导为例，说明如何从实际的研究对象出发，抓住主要因素，利用有关的物理定律，如牛顿第二定律、能量守恒定律、质量守恒定律等，建立起偏微分方程．

例 1　弦的微小横振动

弓在乐器的弦上来回拉动时，接触的只是一小段．但弦是拉紧的，各小段之间有一种相互作用力，力学上称为张力．若弦是柔软的，则张力沿着切线方向作用．在张力的作用下，一小段弦的振动就会引起邻近小段的振动，这种振动的传播现象称为**波**．现在来研究弦的微小横振动，如图 1-1 所示．

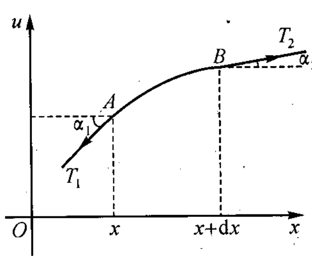

图 1-1

取弦的平衡位置为 x 轴．所谓横振动是指弦上各点的振动发生在同一平面内，且与 x 轴垂直．$u=u(x,t)$ 表示横坐标为 x 的点在 t 时刻离开平衡位置的位移．我们取弦上的任一小段 AB 来分析．因 dx 很小，AB 段的重量与所受的张力相比可忽略不计．AB 段无纵向(x 轴方向)运动，故有

$$T_2\cos\alpha_2-T_1\cos\alpha_1=0 \tag{1.1.1}$$

考虑的是微小的横振动，不妨认为在振动过程中，每一小段的弦几乎没有伸长，即 $ds\approx dx$. 而 $ds=\sqrt{1+u_x^2}\,dx$，可见在微小横振动的情况下，$|u_x|$ 与 1 相比，可忽略不计. 且不妨认为 $\alpha_1\approx 0,\alpha_2\approx 0,\cos\alpha_1\approx 1,\sin\alpha_1\approx\tan\alpha_1=u_x|_x,\sin\alpha_2\approx\tan\alpha_2=u_x|_{x+\Delta x}$. 由牛顿第二定律，得横向的运动方程

$$T_2\sin\alpha_2-T_1\sin\alpha_1=(\rho\Delta x)u_{tt} \tag{1.1.2}$$

其中 ρ 为线密度. 由式(1.1.1)得 $T_1=T_2$，前已假定 $ds\approx dx$，由虎克定律知张力 T 与时间 t 无关，故张力 T 为常数，记为 T_0. 将式(1.1.2)改写为：

$$T_0(u_x|_{x+\Delta x}-u_x|_x)=(\rho\Delta x)u_{tt}$$

利用微分中值定理，令 $\Delta x\to 0$，得

$$T_0u_{xx}=\rho u_{tt}$$

记 $a^2=T_0/\rho$，就有弦的微小横振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.1.3}$$

其中空间变量只出现 x，该方程又称为**一维波动方程**.

若弦在振动过程中还受到外力作用，且作用在单位长度弦上的横向力为 $F(x,t)$，则在(1.1.2)左边加上一项 $F(x,t)dx$，得

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t) \tag{1.1.4}$$

其中 $f(x,t)=F(x,t)/\rho$，称为**弦的强迫振动方程**.

例 2 膜的微小横振动

与例 1 的情形类似，我们假设膜是柔软且有弹性的，膜的重量远比膜的张力为小，膜的位移任一处的切线斜率与 1 相比可忽略不计. 若取膜的平衡位置为 xOy 平面(见图 1-2)，我们只考虑膜的横向(u 轴方向)的微小横振动. 在这些条件下，膜上各点所受的张力为常数，记单位长度所受的张力为 T.

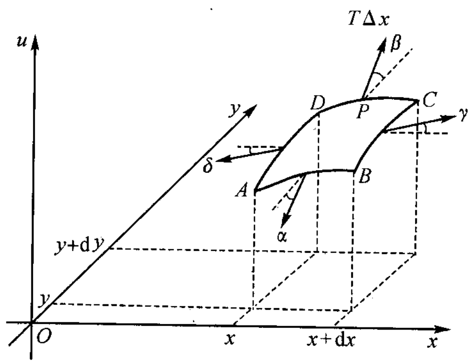

图 1-2

设 t 时刻，膜上(x,y)处的位移是 $u=u(x,y,t)$. 在膜上任取一小片 ΔS，分析它在横向的受力情况，如图 1-2，ΔS 边缘$\overset{\frown}{CD}$受邻近膜的张力是 $T\Delta x$，张力的方向落在曲面的切平面上且与$\overset{\frown}{CD}$的切线垂直，因为考虑膜的微小横振动，边缘$\overset{\frown}{CD}$的形变较小，不妨认为$\overset{\frown}{CD}$上 P 点(它在 x-y 平面的投影为$(x_2,y+\Delta y)$)的切线与 x 轴平行，设 P 点处所受的张力与 y 轴正向的夹角为β，则沿$\overset{\frown}{CD}$所受张力在 u 方向的分力为 $T\Delta x\sin\beta$，对其他边缘所受的张力可类似地分析，故 ΔS 上所受张力沿 u 方向的分力为

$$T\Delta x\sin\beta-T\Delta x\sin\alpha-T\Delta y\sin\delta+T\Delta y\sin\gamma$$

因为是小振动，故有

$$\sin\alpha\approx\tan\alpha=u_y(x_1,y,t)$$

$$\sin\beta \approx \tan\beta = u_y(x_2, y+\Delta y, t)$$

$$\sin\delta \approx \tan\delta = u_x(x, y_1, t)$$

$$\sin r \approx \tan r = u_x(x+\Delta x, y_2, t)$$

其中 x_1 及 $x_2 \in (x, x+\Delta x)$，y_1 及 $y_2 \in (y, y+\Delta y)$.

由牛顿第二定律，得横向的运动方程为

$$T\Delta x[u_y(x_2, y+\Delta y, t) - u_y(x_1, y, t)] + T\Delta y[u_x(x+\Delta x, y_2, t) - u_x(x, y_1, t)] = \rho\Delta x\Delta y u_{tt}$$

其中 ρ 为面密度，当膜均匀时，ρ 为常数. 将上式除以 $\rho\Delta x\Delta y$，利用微分中值定理，令 $\Delta x, \Delta y \to 0$，记 $a^2 = T/\rho$，得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right] \tag{1.1.5}$$

即

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy})$$

称为**二维波动方程**. 若膜还受到横向外力作用，且设单位面积所受的外力为 $F(x, y, t)$，则得膜的受迫振动方程

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + f(x, y, t) \tag{1.1.6}$$

其中 $f(x, y, t) = F(x, y, t)/\rho$，称为**方程的自由项**(或非齐次项). 若考察声波或电磁波在空间传播时，我们就会得到三维的波动方程

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + f(x, y, z, t) \tag{1.1.7}$$

或

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) \tag{1.1.8}$$

若记 $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = \nabla^2 u = \triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$，$\nabla^2$ 或 $\triangle$ 称为 Laplace 算子. 则一般的波动方程为

$$u_{tt} = a^2\nabla^2 u + f(P, t) \tag{1.1.9}$$

其中 P 表示区域内任一点的坐标 (x, y, z).

例 3 一维扩散方程

当物质浓度不均匀时，物质就会从浓度高的地方流向浓度低的地方，形成扩散现象. 考虑一横截面面积为 s 长为 l 的细管，取细管所在的直线为 x 轴，管的两端位于 $x=0$ 和 $x=l$ 处，当 $t=0$ 时，$x=l$ 端细管封闭，管外浓度为 u_0 的气体自 $x=0$ 处向管内扩散，求管内气体浓度的变化规律. 设 $u(x, t)$ 表示截面在 x 处，在 t 时刻的气体浓度. 建立扩散方程就是推导 $u(x, t)$ 应满足的偏微分方程，推导的依据是物理上的扩散定律和质量守恒定律.

扩散定律指出：扩散流强度(单位时间通过单位横截面的物质)q 与物质浓度的梯度成正比，方向相反，即

$$q = -k\frac{\partial u}{\partial x}$$

其中 $k > 0$ 称为扩散系数，负号表示物质流的方向与浓度梯度方向相反.

与例 1,2 类似，我们利用微元分析法来推导方程. 在细管中任取一小段 $[x, x+\Delta x]$，考虑任一小段时间段 $[t, t+\Delta t]$ 内细管里气体质量的变化. 此时间段内净流入量为

$$-k\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_x\cdot s\Delta t-\left(-k\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x+\Delta x}\right)\cdot s\cdot\Delta t=A$$

同一时间段内,小段$[x,x+\Delta x]$细管里增加的气体质量为

$$[u(x,t+\Delta t)-u(x,t)]\cdot s\cdot\Delta x=B$$

由质量守恒定律,$A=B$,即

$$[u(x,t+\Delta t)-u(x,t)]\cdot s\cdot\Delta x=\left[k\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x+\Delta x}-k\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_x\right]\cdot s\cdot\Delta t$$

故

$$\frac{u(x,t+\Delta t)-u(x,t)}{\Delta t}=\frac{k\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x+\Delta x}-k\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_x}{\Delta x}$$

令 $\Delta x\to 0,\Delta t\to 0$,得

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

记 $k=a^2$ 有

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

或

$$u_t=a^2u_{xx}$$

此即内部没有源(汇)的一维扩散方程.

这里用的是微元分析法,质量守恒采用微分形式,若在有限时间段内,在有限区域中分析问题,质量守恒或热量守恒就会采用积分形式,详见下面的例 4.这也告诉我们,不同情况下物理定律的数学表示会有不同的形式,但其实质是一样的.

例 4 热传导方程

混凝土在冷却过程中会产生温度应力,应力过大就会产生裂缝,为防止裂缝就要计算温度应力的分布情况.通过确定温度场,得到温度梯度,从而算出温度应力.工程技术上还有不少传热问题都归结为研究物体的温度分布.下面我们根据热传导的 Fourier 定律和热量守恒定律来推导温度 $u(x,y,z,t)$所满足的偏微分方程.在物体内任取一面元 ΔS,其外法线方向记为 $\boldsymbol{n}$,指向温度升高的方向,如图 1-3.由热传导的 Fourier 定律,在 Δt 内流经 ΔS 的热量为

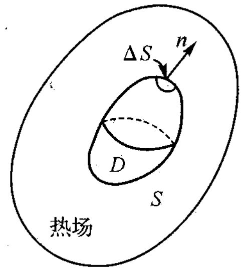

图 1-3

$$\Delta Q=-k\frac{\partial u}{\partial n}\Delta S\Delta t$$

其中 k 是(x,y,z)处的热传导系数.设物体均匀且各向同性,这时 k 为正的常数.等式右边的负号表示热流的方向与温度梯度方向相反,因为热流总是由温度高的一侧流向温度低的一侧.

在物体 G 中任意划出一个封闭曲面 S,S 的外法线方向为 $\boldsymbol{n}$,则从 t_1 到 t_2 时间内流入的热量为

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} (\iint_S k\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S)\mathrm{d}t$$

记 S 所围的区域为 D，P 表示 D 内任一点的坐标 (x,y,z)，则在同一时间内，D 内升高温度所需的热量为

$$Q_2 = \iiint_D c\rho[u(P,t_2) - u(P,t_1)]\mathrm{d}V$$

$$= \int_{t_1}^{t_2}\iiint_D c\rho u_t \mathrm{d}V\mathrm{d}t$$

其中 c 是比热，ρ 是体密度，当物体均匀时，它们均为常数. 若物体内没有热源或热汇，由热量守恒定律得

$$\int_{t_1}^{t_2}\iint_S k\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2}\iiint_D c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}V\mathrm{d}t \tag{1.1.10}$$

对左边的面积分用奥氏公式，有

$$\int_{t_1}^{t_2}[\iiint_D (c\rho\frac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u)\mathrm{d}V]\mathrm{d}t = 0$$

由时间区间 $[t_1,t_2]$ 及区域 D 的任意性及被积函数的连续性，得

$$u_t = a^2\Delta u \tag{1.1.11}$$

其中 $a^2 = k/c\rho$. 上式称为**三维的热传导方程**. 若 D 内有热源，设热源密度即单位时间内、单位体积发出的热量为 $F(x,y,z,t)$，则在式(1.1.10)左边应加上一项，记 $f(x,y,z,t) = F(x,y,z,t)/c\rho$，得

$$u_t = a^2\Delta u + f(x,y,z,t) \tag{1.1.12}$$

式(1.1.11)和式(1.1.12)统称为**热传导方程**. 在无热源的热传导问题中，经过相当长时间以后，各点的温度随时间的推移而趋于稳定，称为温度分布趋于稳恒状态，这时 $u_t = 0$，方程为

$$\Delta u = 0 \tag{1.1.13}$$

上式称为 **Laplace 方程**，又称为调和方程. 类似地若热源与时间 t 无关，且温度分布达到稳恒状态时，就有

$$\Delta u = f(x,y,z) \tag{1.1.14}$$

上式称为 **Poisson 方程**. 如果我们考虑一条长为 l 的细杆，侧面绝热，这时 $u = u(x,t)$，$u_y = u_z = 0$，得一维的热传导方程

$$u_t = a^2 u_{xx} \tag{1.1.15}$$

或

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t) \tag{1.1.16}$$

从上述的几个例子看出，推导数理方程实质上就是找物理规律的数学表示. 与推导常微分方程类似，要建立适当的坐标系，明确哪一些是自变量，哪一个是因变量，即我们所研究的物理量 u. 然后从所研究的系统中划出任意一小块，根据物理定律，着重分析这一小块与邻近小块之间的相互作用(抓住主要作用，略去次要因素)，以及这种相互作用怎样在一个短时间内影响物理量 u，把这种影响用式子表示出来，经整理、化简就可得到

数理方程.这也就是通常所说的建立数学模型(不限于数理方程一种形式)的工作.当然建立数理方程的途径不只这里介绍的一种.例如,弦的微小横振动可以看成一个变分问题,利用力学上的 **Hamilton 原理**导出与式(1.1.4)一样的方程.这里不再详细讨论.

应当强调指出,虽然我们这里只对几个具体的物理问题推导出方程(1.1.4)、(1.1.6)、(1.1.12)及(1.1.14),但这些方程所反映的物理规律决不限于这几个具体问题,它们具有广泛的代表性.例如物质扩散时浓度的变化规律,长海峡的潮汐波的运动,土壤力学中的渗透方程等都具有热传导方程的形式.稳定的浓度分布,静电场的电位,流体的势及弹性理论中的调和位势等均满足 Laplace 方程;空间中的声波,导体中的电磁波及杆的扭转等均满足波动方程.总之,许多不同物理过程的变化规律,可以用同一数理方程来描述.这就使得我们能够抓住几个基本的方程进行深入的讨论,而所得的结果可以作不同的物理解释.

偏微分方程的一般形式为

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n,u,u_{x_1},\cdots,u_{x_1x_2},\cdots)=0 \tag{1.1.17}$$

其中 $u=u(x_1,\cdots,x_n)$是未知函数,F 为其变元的已知函数.方程中出现的未知函数的最高阶导数的阶数称为**方程的阶**.若 F 对 u 及其各阶偏导数来说是线性函数,则称该方程是**线性方程**.

n 个自变量二阶线性方程的一般形式为

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{i=1}^{n} b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+cu=f \tag{1.1.18}$$

其中 a_{ij},b_i,c,f 均为区域 $G\in\mathbf{R}^n$ 中的已知函数.在线性方程中,不含 u 及其偏导数的项称为**自由项**.如式(1.1.18)中的 $f=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.若 $f\equiv 0$,方程(1.1.18)称为**线性齐次方程**,否则称为**线性非齐次方程**.若 u 及其各阶偏导数的系数均是常数,称为**常系数的线性方程**.如(1.1.18),$a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$,$b_i(i=1,2,\cdots,n)$,c 均为常数时便是常系数方程.这样前面导出的几个典型方程

波动方程

$$u_{tt}=a^2\Delta u$$

或

$$u_{tt}=a^2\Delta u+f$$

热传导方程

$$u_t=a^2\Delta u$$

或

$$u_t=a^2\Delta u+f$$

调和方程

$$\Delta u=0 \qquad \text{(Laplace 方程)}$$

或

$$\Delta u=f \qquad \text{(Poisson 方程)}$$

它们都是二阶线性常系数方程.

若给出一个函数 $u=u(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,将它及其各阶偏导数代入(1.1.17),使其在 $\mathbf{R}^n$ 中的某一区域 G 内成为自变量的恒等式,则称 $u=u(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是方程(1.1.17)的**解**.为区别近代发展起来的广义解的概念,我们把这种解称为**经典解**.若研究的物理模型中未知函数不止一个,它们应满足的关系式也不止一个,这样就得到所谓偏微分方程组.对于偏微分方程组,类似有阶,齐次、非齐次,线性、非线性等概念,这里不再详述.

不同的方程，描述的物理规律不一样. 如热传导是不可逆的，而声波的传播是可逆的. 可以想象，方程解的性质也有很大差别. 为反映这种差别和进行系统研究的需要，在数学上将方程及方程组进行分类. §1.3 节将讨论二阶线性方程的分类. 我们将会看到波动方程，热传导方程及 Laplace 方程分别是双曲型，抛物型及椭圆型方程的典型代表.

§1.2 定解条件和定解问题

在常微分方程中，为确定一个具体的运动规律，除方程之外，还要加上一些附加条件，构成所谓初值问题或边值问题. 对于偏微分方程也是如此. 方程是反映某一类物理过程的共同规律. 实际中提出的物理模型都有特定的"环境"和"起始状态". 如弦的微小振动，有两端固定和一端固定、另一端按已知规律在振动，这两种不同"环境"下所对应的振动规律 $u(x,t)$ 显然是不一样的. 同样的弦，用薄的刀背敲一下，使它振动发出的声音就刺耳. 而用手指弹拨使之振动发出声音就和谐，这种特定"环境"和"初始状态"的数学表示就是"**边界条件**"和"**初始条件**".

先看边界条件，以细杆的热传导为例. 设细杆的长度为 l，侧面绝热，内部没有热源，这时杆内的温度分布 $u(x,t)$ 满足一维热传导方程(1.1.15). 在区域的边界(现在是 $x=0,x=l$ 两个端点)上，$u(x,t)$ 所应满足的物理条件通常有下列三种：

(1)杆在 $x=0$ 处保持与介质一样的温度 u_0，在 $x=l$ 处保持与另一种介质一样的温度 u_1，这样的"环境"用数学式子表示就是

$$u(0,t)=u_0$$
$$u(l,t)=u_1$$

更一般的形式为

$$u|_{x=0}\equiv u(0,t)=f_1(t) \tag{1.2.1a}$$
$$u|_{x=l}\equiv u(l,t)=f_2(t) \tag{1.2.1b}$$

即未知函数在边界上的值是已知的，通常称为**第Ⅰ类边界条件**.

(2)杆在 $x=l$ 处"绝热"，由"绝热"这个条件不能推断该端点 u 的值，但"绝热"意味着该端点与周围介质没有热量交换，即该端点的热流强度为零. 热流强度与温度梯度成正比. 在 $x=l$ 处，"区域"$[0,l]$的外法向就是 x 轴的正向，故有

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l}=0$$

一般若单位时间内流经端点界面的热量已知，则有

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{x=l}=g(t) \tag{1.2.2}$$

从数学上看，相当于未知函数沿"界面"外法向的方向导数已知，称这种条件为**第Ⅱ类边界条件**.

(3)杆的一端处于"自由冷却"状态. 从"自由冷却"这个物理条件既不能推出"界面"上的 u 的值，也不能推出 u_n 的值. 但"自由冷却"意味着在"界面"上细杆与介质有热量传递. 由牛顿冷却定律，流经"界面"的热流强度 $q=-k\dfrac{\partial u}{\partial n}$ 与"界面"和介质的温度差成正

比,即

$$-k\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{x=l}=h(u|_{x=l}-m(t))$$

或

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}+\mu u\right)\Big|_{x=l}=f(t) \tag{1.2.3}$$

其中 $\mu=h/k$, $f(t)=hm(t)/k$, $k(k>0)$是细杆的导热系数;$h(h>0)$是热交换系数;$m(t)$表示介质的温度,是 t 的已知函数.从数学上看,此时未知函数 u 及其外法向方向导数的线性组合在"界面"上是已知的,称为**第Ⅲ类边界条件**.

对于弦的振动方程,端点所受的"约束"状态通常也有这样三类.如一端"固定",表示 $x=l$ 处,位移 $u(x,t)$总是零,即

$$u|_{x=l}=0$$

一端"自由",表示这一端的张力为零.即

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l}=0$$

"一端与弹性支座相连",表示这一端沿位移方向的张力 $T\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l}$应等于弹性支座的恢复力 $-ku|_{x=l}$,即

$$T\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l}=-ku|_{x=l}$$

或

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}+hu\right)\Big|_{x=l}=0$$

其中 k 为弹性系数,$h=k/T$

对于二维或三维空间的物理模型,类似地可写出各类边界条件.如 $\mathbf{R}^3$ 中区域 G 的边界面记为 S,则第Ⅲ类边界条件是

$$\left(h\frac{\partial u}{\partial n}+ku\right)\Big|_s=f(P,t)$$

其中 P 为 S 上的动点,$f(P,t)$是其变量的已知函数.在热传导问题中,当物体均匀且各向同性时,h,k 为正的常数.若 $f(P,t)\equiv 0$,称边界条件是**齐次的**,否则称为**非齐次边界条件**.

再谈一下**初始条件**.所谓初始条件是指整个被研究系统的某些必要的初始状态.例如一条两端固定的长为 l 的弦,在$\frac{l}{3}$处将弦横向提高 h,然后放松让它自由振动,如图 1-4.初始时刻就是放松的那一瞬间,初始状态就是这一瞬间整个弦的位移和速度.现在的初始速度 $u_t|_{t=0}=0$.如果将初始位移写成 $u|_{t=0}=h$,那就错了.因为它只代表 $x=\frac{l}{3}$处的初始位移,而不是整根弦在 $t=0$ 时的位移,正确的写法为

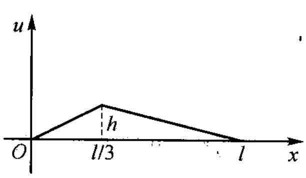

图 1-4

$$u|_{t=0}=\begin{cases}\dfrac{3h}{l}x & \left(0\leqslant x\leqslant \dfrac{l}{3}\right)\\ \dfrac{3h}{2l}(l-x) & \left(\dfrac{l}{3}<x\leqslant l\right)\end{cases} \tag{1.2.4}$$

初始条件的建立完全取决于系统在初始时刻的物理描述.有时需经一些简单的计算,才能写出相关的初始条件.比如:弦的两端固定,在弦上 $x=c$ 处($0<c<l$)用横向力 F_0($F_0\ll T$)将弦往上拉,达到平衡后放手,写出相应的初始条件.设在 $x=c$ 处当拉力 F_0 与张力平衡时弦的高度为 h($h\ll l$),如图 1-5 所示,利用 $\sin\alpha\approx\tan\alpha=\dfrac{h}{c}$,$\sin\beta\approx\tan\beta=\dfrac{h}{l-c}$,由力的平衡得

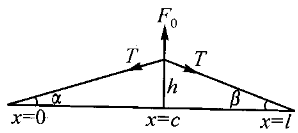

图 1-5

$$F_0=T\sin\alpha+T\sin\beta=T\left(\frac{h}{c}+\frac{h}{l-c}\right)=\frac{hlT}{c(l-c)}$$

故

$$h=\frac{F_0c(l-c)}{Tl}$$

利用(1.2.4)得

$$u|_{t=0}=\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{F_0(l-c)}{Tl}x & 0\leqslant x<c\\ \dfrac{F_0c}{Tl}(l-x) & c\leqslant x\leqslant l\end{cases}$$

由题意 $u_t|_{t=0}=0$

对波动方程,初始条件有两个:$u|_{t=0}=\varphi(x)$,$u_t|_{t=0}=\psi(x)$,分别代表初始位移和初始速度.热传导方程初始条件只有一个,一维情况:$u|_{t=0}=\varphi(x)$,三维情况:$u|_{t=0}=\varphi(x,y,z)$,表示在初始时刻区域内的温度分布.对于调和方程或 Poisson 方程,其物理量 $u(x,y,z)$ 与时间 t 无关,这时就无需提初始条件了.一般,当研究的物理量与时间 t 有关时,相应的偏微分方程又称为发展方程,这意味着不仅要研究物理量在空间的分布状况,还要研究该物理量随着时间的发展而产生的变化状况.与常微分方程类似,发展方程中对 t 的最高阶偏导数的阶数为 n 的话,附加的初始条件有($n-1$)个.

初始条件,边界条件统称为**定解条件**.对于具体的物理模型,方程和定解条件一起才构成问题的完整提法.如弦的微小横振动,两端固定,初始位移是 $\varphi(x)$,初始速度是 $\psi(x)$.求弦上任一点 x 在振动开始后任一时刻 t 的位移 $u(x,t)$,则问题的数学表示为

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx} & (1.2.5\text{a})\\ u|_{x=0}=0,\quad u|_{x=l}=0 & (1.2.5\text{b})\\ u|_{t=0}=\varphi(x),u_t|_{t=0}=\psi(x) & (1.2.5\text{c})\end{cases}$$

它称之为**定解问题**.各种不同形式的定解问题是以后各章讨论的主要对象.

对于描述稳恒过程的 Laplace 方程(或 Poisson 方程)来说,u 与 t 无关,这时没有必要考虑所谓“起始状态”了.边界条件加上方程就构成了定解问题,称其为**边值问题**.这时边界条件中的 $f(P)$ 当然与 t 无关.通常将上述的三类边界条件加上方程构成的定解问题分别称为:**第一边值问题**(Dirichlet 问题),**第二边值问题**(Neumann 问题)和**第三边值问**

题(Robin 问题). 边值问题考虑的区域可以是有限的,如球内,也可以是无限的,例如球外. 故有 Dirichlet 内问题和 Dirichlet 外问题之分. 当考虑的区域是无限时,按问题的实际意义(例如将 u 理解为静电位),通常要求 $\lim\limits_{p\to\infty}u(P)=0$,它称为**自然的边界条件**.

如果物体的体积很大,而我们只考虑物体内部的物理量在较短时间内的变化规律,这时,边界上的影响还达不到内部,我们就把区域当无界区域来处理,而不提边界条件. 这种由初始条件和方程组成的定解问题称为**初值问题**,又叫 Cauchy 问题,例如

$$\begin{cases} u_t=a^2u_{xx}(-\infty<x<+\infty,t>0)\\ u|_{t=0}=f(x)(-\infty<x<+\infty)\end{cases}$$

前面提到的既有边界条件又有初始条件的定解问题就称为**混合问题**,例如式(1.2.5).

定解问题是具体的物理模型的数学抽象,到底应加怎样的定解条件才算合适? 这个问题不能单从定解条件,而应从整个定解问题来考虑. 从问题的实际意义来看,定解问题既然是具体物理模型的抽象,它的解应该存在,唯一,且对定解条件是连续依赖的. 所谓连续依赖指的是定解条件的误差比较小时,相应的解误差也应该比较小. 这些就是数学上所讲的解的存在性,唯一性和连续依赖性,总称为**定解问题的适定性**. 由于学时的限制,也由于本书侧重于求解定解问题的常用方法及其应用,因此对定解问题适定性的内容不作详细讨论. 在得到解的表达式后,利用这个表达式,分析解的物理意义,与实际情况对照,基本上符合实际上观察到的物理现象的话,我们就认为这个解是可信的.

§1.3 二阶线性方程的分类与叠加原理

在§1.1 节中我们从实际问题出发,推导并建立了热传导方程、波动方程和 Laplace 等方程,同时指出它们分别是抛物型、双曲型和椭圆型三类方程的典型代表. 波动方程描述波(声波、电波、光波、水波等等)在空间的传播,对时间 t 具有可逆性. 热传导(扩散)方程描述在空间中不同的点在不同时刻的温度(浓度)的分布状况,热量(物质)总是从温度(浓度)高的地方向温度(浓度)低的地方传递,具有不可逆性. 调和方程(Laplace 方程),Poisson 方程描述稳定的某种物理状态或过程. 可见这三种方程描述的物理现象有着本质的不同. 我们讨论方程的分类实质上就是要从数学上来揭示这三种方程的差异. 由于它们是三种不同类型方程的典型代表,对于它们的深入研究,使得我们有可能将所得结果推广到同属一种类型的其他方程上去. 这一节就来讨论二阶线性方程的分类问题. 我们以两个自变量的二阶线性方程为主,对于 n 个自变量($n\geqslant 3$)的情况给出相应的定义和例子.

设有二阶线性方程

$$au_{xx}+2bu_{xy}+cu_{yy}+du_x+eu_y+fu=g \tag{1.3.1}$$

其中系数都是(x,y)的光滑函数且 a,b,c 不同时为零. 在解析几何中,x-y 平面上的二次曲线方程的一般形式为

$$ax^2+2bxy+cy^2+dx+ey=f$$

通过适当的坐标变换可将上式化简为椭圆、双曲线和抛物线的标准方程. 对于方程

(1.3.1),我们也希望找到适当的自变量变换

$$\begin{cases}\xi=\xi(x,y)\\ \eta=\eta(x,y)\end{cases}\tag{1.3.2}$$

将它化简,得到所谓标准型并进行分类.

设变换(1.3.2)的 Jacobi 行列式

$$J=\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}\neq 0$$

由隐函数存在定理,变换(1.3.2)是可逆的,从(1.3.2)可解出 $x=x(\xi,\eta)$, $y=y(\xi,\eta)$. 将 u 看成(ξ,η)的函数,利用复合函数求导法则,得

$$\begin{cases}u_x=u_\xi\xi_x+u_\eta\eta_x\\ u_y=u_\xi\xi_y+u_\eta\eta_y\\ u_{xx}=u_{\xi\xi}\xi_x^2+2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x+u_{\eta\eta}\eta_x^2+u_\xi\xi_{xx}+u_\eta\eta_{xx}\\ u_{xy}=u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y+u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y+u_\xi\xi_{xy}+u_\eta\eta_{xy}\\ u_{yy}=u_{\xi\xi}\xi_y^2+2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y+u_{\eta\eta}\eta_y^2+u_\xi\xi_{yy}+u_\eta\eta_{yy}\end{cases}$$

将它们代入(1.3.1)得

$$a_1u_{\xi\xi}+2b_1u_{\xi\eta}+c_1u_{\eta\eta}+d_1u_\xi+e_1u_\eta+f_1u=g_1\tag{1.3.4}$$

其中

$$\begin{cases}a_1=a\xi_x^2+2b\xi_x\xi_y+c\xi_y^2\\ b_1=a\xi_x\eta_x+b(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+c\xi_y\eta_y\\ c_1=a\eta_x^2+2b\eta_x\eta_y+c\eta_y^2\\ d_1=a\xi_{xx}+2b\xi_{xy}+c\xi_{yy}+d\xi_x+e\xi_y\\ e_1=a\eta_{xx}+2b\eta_{xy}+c\eta_{yy}+d\eta_x+e\eta_y\\ f_1=f\\ g_1=g\end{cases}\tag{1.3.5}$$

可见变换后的方程(1.3.4)仍是线性方程.由(1.3.5)知,若取 $\xi(x,y)$和 $\eta(x,y)$满足

$$\begin{aligned}&a\xi_x^2+2b\xi_x\xi_y+c\xi_y^2=0\\ &a\eta_x^2+2b\eta_x\eta_y+c\eta_y^2=0\end{aligned}\tag{1.3.6}$$

则方程(1.3.4)中的系数 $a_1=c_1=0$,达到了化简的目的.当一阶偏微分方程

$$a\xi_x^2+2b\xi_x\xi_y+c\xi_y^2=0\tag{1.3.7}$$

有两个线性无关的解时,将它们取为 $\xi(x,y)$, $\eta(x,y)$就行了.将式(1.3.7)改写为

$$a\left(\frac{\xi_x}{\xi_y}\right)^2+2b\,\frac{\xi_x}{\xi_\eta}+c=0\tag{1.3.8}$$

令

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{-\xi_x}{\xi_y}\tag{1.3.9}$$

则沿曲线 $\xi=$常数,有 $\mathrm{d}\xi=\xi_x\mathrm{d}x+\xi_y\mathrm{d}y=0$.将式(1.3.9)代入式(1.3.8)

$$a\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2-2b\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+c=0\tag{1.3.10}$$