函數論

克諾普 著
吳大任
陳已同 譯

商務印書館出版

函　數　論

K. Knopp 著
吳大任
陳已同 譯

诺普 K.

中華教育文化基金
董事會編譯委員會 編輯
商務印書館出版

函數論

Funktionentheorie

(51502)

原著者 K. Knopp
譯述者 吳大任 陳巳同
編輯者 中華教育文化基金董事會編譯委員會
出版者 商務印書館 上海河南中路二一一號
發行者 中國圖書發行公司 三聯中華商務開明聯營聯合組織 北京絨線胡同六十六號
發行所 三聯書店 中華書局 商務印書館 開明書店 聯營書店 各地分店
印刷者 商務印書館印刷廠

1947年2月初版
1951年3月3版
定價人民幣15,000元

(滬)2500-4000

目　　錄

第　一　卷

解析函數普遍理論的基礎

第　一　編

基　本　概　念

第一章　平面內之點組 ……………………………………… 1–18

§ 1.　點與數 …………………………………………………… 1

§ 2.　點組與數組 ……………………………………………… 3

§ 3.　實數的綿續性公理 ……………………………………… 4

§ 4.　直線上的點組　點組的上界與下界 …………………… 6

§ 5.　凝聚點　上限與下限　限 ……………………………… 7

§ 6.　平面內的點組 …………………………………………… 11

§ 7.　路與域 …………………………………………………… 16

第二章　含一個複變數的函數 ……………………………… 19–26

§ 8.　最普遍的含一個複變數的(單值)函數 ……………… 19

§ 9.　綿續性 …………………………………………………… 20

§ 10.　可導微性 ………………………………………………… 22

第　二　編

關於積分的定理

第三章　綿續函數之積分 …………………………………… 27–37

§ 11.　定限積分的定義 ………………………………………… 27

§ 12. 定限積分之存在的證明 …………………… 28
§ 13. 定限積分之計算 …………………… 31
§ 14. 幾個簡單的關於積分的定理 …………………… 35
第四章 科犀積分定理 …………………… 38-46
§ 15. 定理之敍述 …………………… 38
§ 16. 主要定理的證明 …………………… 39
§ 17. 簡單的推論與擴充 …………………… 43
第五章 科犀的幾個積分公式 …………………… 47-51
§ 18. 主要公式 …………………… 47
§ 19. 關於各級導微函數的積分公式 …………………… 48

第 三 編

級數 解析函數之展爲級數

第六章 變項級數 …………………… 53-61
§ 20. 收斂域 …………………… 53
§ 21. 齊收斂性 …………………… 56
§ 22. 解析函數的齊收斂級數 …………………… 58
第七章 解析函數之展爲冪級數 …………………… 62-70
§ 23. 展爲冪級數之可能性的證明 …………………… 62
§ 24. 幾種推論 …………………… 66
第八章 解析開拓與解析函數之完全的定義 …………………… 71-81
§ 25. 解析開拓原理 …………………… 71
§ 26. 所謂的初等函數 …………………… 74
§ 27. 利用冪級數的開拓及解析函數之完全的定義 …………………… 75
§ 28. 多值函數的幾個例 …………………… 79
第九章 超越整函數 …………………… 82-85
§ 29. 定義 …………………… 82

§ 30. 整函數對於大的 $|z|$ 的性質 ……………………………… 82

第　四　編

關　於　奇　點

第十章　羅朗展開式 …………………………………… 87-91
§ 31. 展開式 ………………………………………………… 87
§ 32. 解說與例證 …………………………………………… 89
第十一章　各種不同的奇點 ……………………………… 92-102
§ 33. 本性奇點與非本性奇點或極點 ……………………… 92
§ 34. 解析函數在無窮遠處的性質 ………………………… 95
§ 35. 殘數定理 ……………………………………………… 97
§ 36. 有理函數 ……………………………………………… 100

第　二　卷

緒論 ……………………………………………………… 103-104

第　一　編

單　值　函　數

第一章　整函數 …………………………………………… 105-123
§ 1. 外氏乘積定理 ………………………………………… 105
§ 2 外氏乘積定理的證明 ………………………………… 109
§ 3. 外氏乘積定理的幾個例 ……………………………… 118
第二章　半純函數 ………………………………………… 124-136
§ 4. 米萊二氏分項分數定理 ……………………………… 124
§ 5. 米萊二氏定理的證明 ………………………………… 127
§ 6. 米萊二氏定理的幾個例 ……………………………… 129

第三章　週期函數 ………………………………… 137-157

§ 7.　週期解析函數………………………………………… 137

§ 8.　單週期函數………………………………………… 141

§ 9.　雙週期函數　橢圓函數…………………………… 146

第　二　編

多　值　函　數

第四章　根與對數 ………………………………… 195-170

§ 10.　多值函數與黎曼面初論…………………………… 159

§ 11.　$\sqrt[p]{z}$ 與 $\log z$ 的黎曼面 ………………………… 162

§ 12.　函數 $w=\sqrt{(z-a_1)(z-a_2)\cdots\cdots(z-a_n)}$ 的黎曼面…… 162

第五章　代數函數 ………………………………… 171-180

§ 13.　問題之敍述………………………………………… 171

§ 14.　根在小處的解析特性……………………………… 172

§ 15.　代數函數…………………………………………… 175

第六章　解析結構 ………………………………… 181-187

§ 16.　單徵商解析函數…………………………………… 181

§ 17.　黎曼面……………………………………………… 183

§ 18.　解析結構…………………………………………… 185

德中名詞對照表 ………………………………… 189-193

人名索引 ………………………………………………… 194

內容索引 ………………………………………… 194-199

第一編

基本概念

第一章　平面內之點組

§ 1. 點與數

我們假定讀者對於普通複數已經熟悉，能够作複數的運算，並且知道如何將全部複數與一個平面內的點，作一宗一一對應關係：就是說，我們先在平面上立一個直角坐標，然後令每一個複數 $z=x+iy$（x 與 y 都是實數）與平面上一點相對應，這一點的橫坐標等於 z 的實部 x，縱坐標等於 z 的虛部 y.❶ 這樣，每一數的確與唯一的一點相對應，反之，每一點也與唯一的一數相對應．因此，我們用"點"與"數"兩名詞時，他們的意義，可以作爲完全相等，不怕發生誤會．例如我們以後便可以說"點：$\sqrt{3}$"，或"兩數間的距離"或以 z_1, z_2, z_3 爲頂點的三角形"等等．

若 r 與 ϕ 是 z 點的極坐標，則 r 就稱爲 z 的絕對值(absolut Betrag) ϕ 爲 z 的角(*arcus*)，用符號表示：$|z|=r$，$\operatorname{arc} z=\phi$.

點與數旣如此相當，我們卽有以下簡單的事實，這些事實值得特別的列舉出來：

(a) 一個點 z 與原點間的距離 $=|z|$；兩點 z_1, z_2, 間的距離 $=|z_1-z_2|=|z_2-z_1|$；並且以下的關係總是正確：

$$|z_1\pm z_2|\leqq|z_1|+|z_2|, \qquad |z_1\pm z_2|\geqq|z_1|-|z_2|.$$

(b) $|z|=1$ 表示以 O 點爲中心而半徑等於 1 的圓周〔卽所謂么圓(Einheitskreis)〕，就是說一切具有 $|z|=1$ 的特性的數 z，是這圓周上的

---

❶ 用符號表示：$x=R(z)$，$y=I(z)=R\left(\frac{z}{i}\right)$．我們有時也將 iy（不是 y 自己）當作 z 的虛部；但上下文總使誤會不至於發生．

點，反之亦然．

(c)　同樣，$|z-z_0|<r$ 代表以 z_0 爲中心而半徑等於 r 的圓面的點．但圓周（圓的邊界）不在內．

(d)　同樣 $|z+4i|\leqq 3$ 代表以 $-4i$ 爲中心而半徑等於 3 的圓面的點，圓的邊界在內．

(e)　同樣，$|z-z_1|>R$ 代表在以 z_1 爲中心而半徑等於 R 的圓之外的 z 平面部分．

(f)　同樣，$R(z)>0$ 代表"右"半平面，就是說，有了直角坐標之後，在虛軸右方的 z 平面部分，但邊界不在內．

(g)　同樣，$0<r<|z-z_0|<R$ 代表一個圓環的內部，這圓環的邊界是以 z_0 爲中心而半徑等於 r 與 R 的兩個圓．

(h)　若 ζ 之值爲固定的，而 z' 爲祇受 $|z'|<\varepsilon$ 的限制的任意一點，則如(c)條，$\zeta+z'$ 代表以 ζ 爲心，而半徑等於 ε 的圓面；因爲我們若令 $\zeta+z'=z$，即得

$$|z'|=|z-\zeta|<\varepsilon.$$

我們或者簡單的說 $\zeta+z'$ 代表點 ζ 的"一個鄰域"(*Umgebung*)．

一個圓的外部(參看e條)我們也可以稱之爲"無窮遠點(*Unendliche* 的鄰域"．因爲從以下的討論，我們即可相信"無窮遠點"確可作爲一個點，作爲"$z=\infty$ 點"：

令

$$z'=\frac{1}{z}\qquad 或 \qquad z=\frac{1}{z'}$$

則在么圓外的每一點 z（就是說，具有 $|z|>1$ 的特性的每一點 z）顯然相當於此圓內唯一的一點 z'，因爲若 $|z|>1$ 即得 $|z'|=\dfrac{1}{|z|}<1$．反之，在么圓內的每一點 z'，也相當於圓外唯一的一點 z．祇有圓內的 $z'=0$ 點沒有圓外的 z 點與他相當．但是因爲一切與 0 點很近的 z' 點相當於很遠的 z 點，[1] 並且凡 z' 點若趨近 0 點，則與他相當的 z 點便趨向無窮遠，所以我們可以說，$z'=0$ 點與 $z=\infty$ 點，彼此相當．——這祇能看作純粹爲方便起見所設的一種假定，但在函數論裏，這假定給我們的便利很

[1] 因爲當 $|z'|$ 很小的時候，$|z|=1:|z'|$ 就很大．

多.❶

但是除事先聲明者外，我們暫時總不用字母 z 來代表 ∞ 點.

習題：以下各式所代表之軌迹爲何？

(α) $\left|\frac{z-1}{z+1}\right|=1$,　(β) $\left|\frac{z-1}{z+1}\right|=2$,　(γ) $\left|\frac{z}{z+1}\right|=a(>0)$,

(δ) $R(z^2)=$　(ε) $I(z^2)=4$,　(ξ) $|z^2-1|=a(>0)$

若將以上各式中的等號換作 $<,>,\leqq$ 或 $\geqq$ 號，則他們所代表的區域又爲何？

§ 2. 點組與數組

我們若按照任意一個標準，在全部複數內選出有盡多個或無盡多個數，這些數就構成一個數組(*Zahlenmenge*)，其相當的點，就構成一個點組(*Punktmenge*)．"點組"與"數組"兩名詞的意義，我們也可以看作完全相同．若如此一組 M 的定義(那特殊的標準)有如下的性質則我們認爲 M 是已知或已經確定；這性質是：每一點 z 祇能或屬於 M 或不屬於 M.

以下是這種組的簡單的例：

M_1：一切的數 $z=x+iy$，其中 x,y 爲整數．根據明顯的原因，我們稱這組的點爲平面上的網點(*Gitterpunkt*)。

M_2：全部實數.

M_3：一切的數 $\frac{1}{n}$，$n=1,2,3\cdots\cdots$，就是說，$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots\cdots$諸數.

M_4：一切的數 $1\pm\frac{1}{n}$，$n=1,2,3,\cdots\cdots$.

M_5：一切的數 $\frac{1+i}{n}$，$n=1,2,3,\cdots\cdots$.

M_6：一切的數 $z=\frac{1}{m}+\frac{i}{n}$ 其中 m 與 n 爲任何正整數.

M_7：全部的數 $z=x+iy$，其中 x 與 y 爲有理數，同時 $1\leqq|z|\leqq2$(這些數是在一個圓環內)

M_8 至 M_{12}：§1，(b) 至 (f) 諸關係所確定的點組，等等.

若一組中的數〔組的"元"(*Element*)〕可以按次序排列，就是說，若他們可以排成第一個，第二個，……，第 n 個，……，或可以用 $z_1,z_2,\cdots\cdots z_n,\cdots\cdots$來表示，使每一個元有一個固定的位置，則我們稱此組爲可枚舉

❶ 爲幫助我們明瞭起見，我們可以想像這平面在無窮遠處是閉合的．我們在一個平面上放一個球面，使他們的切點在0點(南極)上．然後把平面圍着球面彎過來，使平面上所有的很遠的點都聚在球的北極附近〔球極投影(Stereographishe Abbildung)〕．從平面上0點出發的半線於是變成球面上的緯線，平面在『無窮遠處』成爲閉合的，球面上的北極(在球面上，這簡直是一個實在的點)就是平面上的『無窮遠點(點∞)』的代表.——當我們這樣用一個球面上的點代表複數時，我們就稱這球面爲(複)數球面(Zahlenkugel)

的（*Abzählbar*）.

M_3, M_5 兩組顯然是可枚舉的；M_4 亦然，我們祇要把他的數，按以下的次序排列．就可以看出來。

$$0,\ 2,\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{4}{3},\ \cdots\cdots,\ 1-\frac{1}{n},\ 1+\frac{1}{n},\ \cdots\cdots,$$

M_1 也是可枚舉的，這可以說明如下：　我們畫一套的正方形，每個以 0 點爲中心，四邊兩兩平行於兩軸，其邊長則依序爲 2, 4, 6, 8 等．　現在我們就可以把一切的網點排列起來：以 0 爲起點，先排最近於 0 點的正方形四邊上的點，然後由內至外，把一個個正方形四邊上的點排下去．每一正方形上的點，排列方法不一，例如我們可以從那上面的正實數起，沿着正向（就是與鐘針轉動的方向相反）排下去．　這樣所得的網點的敍列，開始幾項如下：

$$0,\ 1,\ 1+i,\ i,\ -1+i,\ -1,\ -1-i,\ -i,\ 1-i,\ 2,\ 2+i,\ 2+2i,\cdots\cdots$$

如此則每一個網點在敍列中有一個完全固定的位置．　同樣，我們可以證明 M_6 是可枚舉的．

全部（不可約的）命分實數 $\frac{p}{q}$ 也是可枚舉的，因爲我們總可以假定分數 $\frac{p}{q}$ 的分母是正數，再令這數與網點 $p+qi$ 相對應這結果初看時，似乎有矛盾，因爲全部分數是不能按大小排列的，而且在任何兩個命分實數之間，總還可以加入任何多個別的命分數．

反之，全部在一段曲線或在一片曲面內的數所構成的組是不可枚舉的．　這事實的證明我們在此處祇能從略。　但從此可知 M_2 與自 M_8 至 M_{12} 諸組皆不可枚舉．

在繼續討論這問題之前，我們還須把一個關於實數的基本事實，在下節內解釋明白。

習題：　M_6, M_7 爲可枚舉的．　試將他們各用一種方法排列起來（就是說，把組內所有的數排列成第一個第二個，……）．

§ 3.　實數的綿續性公理

關於實數的理論，我們假設讀者也已熟悉．　但是我們要在其中舉出一個定理；因爲這定理對於以後的討論，有基本的重要性．　這定理可以當作實數論一個最初的公理（這樣他就無須證明的），也可以當作從別的（但涵義相同的）公理推出來的一個定理，這都視各人的觀點而異．　無論如何，在實數論裏的這個定理，總是相當於在幾何裏的直線的綿續性，所以我們或稱之爲實數的綿續性公理（Stetigkeitsaxiom）或稱之爲實數的綿續性定理（Stetigkeitssatz）或完全性定理（Vollständigkeitssatz）.

設全部的實數（在一條直線上全部的點），依照任意一個標準分爲適合以下諸條件的 A, B 二股．

1.　兩股確皆含有實數．

2.　每一實數或屬於 A 或屬於 B ．

3. A股中的每一數 a 小於 B 股中的每一數 b.

例如令一切適合條件 $a^3\leqq 4$ 的實數 a 屬於 A, 而一切適合條件 $b^3>4$ 的實數 b 屬於 B, 卽得一個具以上特性的分股.

這種分一切實數爲兩股的實例,我們以後常常遇到.

從以上三個假定, 立刻可以推得以下的結果: 若 a 屬於 A 而 $a'<a$, 則 a' 亦屬於 A; 同樣,若 b 屬於 B 而 $b'>b$, 則 b' 亦屬於 B.

以上所述的全部實數的分股,習慣上亦稱爲實數統 (Bereich)的**迭氏分割(Dedikindscher Schnitt)**. 關於這種迭氏分割有以下的一個基本的

定理: 實數統中每一個迭氏分割確定唯一的一個實數 s〔"割數" (Schnittzahl)〕,此實數 s 具有以下的性質:每數 $a\leqq s$,每數 $b\geqq s$.

由我們直覺的看來,這定理就是說: 若我們想像一直條上所有的點,都染上白色(A 股)或藍色(B 股), 並且是如此染法: (1) 兩種顏色的點的確都存在, (2) 每一點都染上顏色, (3) 每一白點都在每一藍點之左,則兩色必在一個一定的處所相遇,而這處所的左方都是白的,右方都是藍的. 我們這定理的要點, 就是說在那個處所, 的確有一點在, 或者說,這處所可以用一個在實數統內的數來代表.

割數 s 本身可屬於 A 亦可屬於 B, 視分股的標準而定;但在 s 下的每數必屬於 A, 在 s 上的每數必屬於 B.

從這個定理, 我們還要推出另一個定理. 就內容說, 後一個定理與前一個定理根本上並無差別,但在應用時,後者常常比較方便.

設有一敍列的節(Intervall) $J_1, J_2, \cdots\cdots, J_n, \cdots\cdots$, 每一個都含在他前面一個之內(就是說: 每一個都含所有在他以後的) 並設這些 J 的長 $l_1, l_2, \cdots\cdots l_n, \cdots\cdots$ 隨着 n 的增加而減小, 終於小於無論多小的已給正數, ❶ 我們稱如此的一個敍列的節爲一個節套❷ (*Intervallschachtelung*), 關於節套,有

套定理(Einschachtelungssatz): 已給一個節套,則恆有一點而且祗有一點,屬於此節套中所有的節.❸

證: 最先我們很容易看出來, 不能有兩個不同的點 s 與 s', 都屬於

❶ 簡單的說:節長 l_n 趨於 0.

❷ 因缺乏較好譯名,暫稱節套——譯者.

❸ 關於這一點,我們說他是被節套所確定; 節套中的節, 逐漸縮到這一點——節的兩端,作爲也屬於節.

所有的節；因爲否則所有的節的長，至小必等於 s 與 s' 間的正距離，但同時 l_n 又必須隨着 n 的增加而終於減小到比任何小的已給正數還小.

其次，假若 a_n 與 b_n 爲 J_n 的左端與右端，則從假設得

$$a_n \leqq a_{n+1} < b_{n+1} \leqq b_n, \qquad (n=1,2,3,\cdots\cdots)$$

我們現在分全部實數爲如下的二股：

A：　所有的節的左端 a_n，及每個在某一個 a_n 左方的點.

B：　一切其餘的點（特殊的，所有的節的右端 b_n 都屬於此股）.

我們可以立刻看出，這樣的分股，適合迭氏分割的三個條件．若 s 爲此分割所確定的割數，則關係 $a_n \leqq s \leqq b_n$ 總是正確的，就是說，s 的確屬於節套中所有的節.

§ 4.　直線上的點組．點組的上界與下界．

現在回到組的普通的討論，我們先更仔細的考察點組 M 所有的點都在一條直線上的特款．　爲簡單起見，我們選實軸爲那條直線；如此則一切屬於 M 的元都是實數——反之亦然.

M_2, M_3, M_4, 皆爲如是的"實點組" (Reelle Punktmenge)

設 M 爲任意一個實點組．若我們能在實軸上找到一個有限長的節，例如從 $-G$ 至 $+G(G>0)$，使一切屬於 M 的點都含在這節內，換言之，使組中每個元 x 皆適合

$$-G \leqq x \leqq +G \qquad \text{或} \qquad |x| \leqq G,$$

則我們稱此組爲有欄的(*Beschränkt*)．例如 M_3 與 M_4 都是有欄組，而 M_2 顯然是無欄的．　有些點組，祇在某一方有欄；例如全部正整數所成的組，祇在左方（下方）有欄，全部負數所成的組，祇在右方（上方）有欄．他們在其他一方都是無欄的.

每一個數，若不小於組中任何的數，稱爲上欄 (*Obere Schranke*)，若不大於組中任何的數，則稱爲下欄(*Untere Schranke*)．一個上欄顯然可以用任何一個比他大的來代替，而一個下欄可以用任何一個比他小的來代替.

由此可以證明，對於有下欄的一組，必有一數 a 在，具有下列二條件：

1.　a 的左方，不復有組內的數，或者說，設 x 代表組內任意一點，則沒有一個 $x<a$.

2. 至少有一個 $x<\alpha+\varepsilon$, 其中 ε 爲任意小的正數，或者說，α 本身還是一個下欄，但比他大的任意一數卽不復爲下欄；也可以說，α 是一切下欄中之最大者。

α 稱爲點組 M 的"下界"(Die Untere Grenze)． 現在我們有

定理 1: 每一個有下欄的組有一個一定的下界 α．

對於點組 M_4, $\alpha=0$; 對於點組 M_3 也是 $\alpha=0$, 因爲沒有一個 $\frac{1}{n}$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ 是 <0, 但無論我們選正數之如何的小，至少有一個 $\frac{1}{n}$（其實有無盡多個）$<0+\varepsilon$． ——最後的一例，同時指出一個組的下界，不必屬於本組．

證明下界 α 的存在： 我們依下法分一切實數爲 A, B 二股．

若 a 爲一實數而組中沒有一個 $x\leqq a$, 則令 a 屬於 A。反之，若 b 爲一實數而至少有一個 $x\leqq b$, 則令 b 屬於 B．

這分股法已適合條件(1), §3; 因爲這組 M 是有下欄的． 其次，從 A, B 的定義，這分股法又適合條件(2)． 最後，$b\leqq a$ 的關係永不可能；因爲至少有一個 $x\leqq b$, 這樣的 x 也將 $\leqq a$, 與 A 股的定義衝突．

從這分割按 §3 所得的割數 α, 照本節的定義，恰爲點組 M 的下界．因爲假使有一個 $x<\alpha$, 則 x 也將小於介乎 x 與 α 間的任何一數． 這個數旣 $<\alpha$, 便是屬於 A 的一數 a． 但一個 $x<a$ 是不可能的．

在另一方面，對於任意一個 $\varepsilon>0$, $\alpha+\varepsilon$ 恆屬於 B, 故至少有一個 $x<\alpha+\varepsilon$． 我們的證明於是完成．

同樣一組的"上界"(die obere Grenze)，爲具以下兩性質的數 β．

1. 沒有一個 $x>\beta$．

2. 無論我們選 ε 如何小，至少有一個 $x>\beta-\varepsilon$, ——我們證明:

定理 2: 每一個有上欄的組有一個一定的上界 β．

於是一個有上下欄的組，有一個一定的上界與一個一定的下界．

【附註】 在此節的證明中，我們特別要嚴格的區別"$<$"與"$\leqq$"及"$>$"與"$\geqq$"．

§ 5. 凝聚點． 上限與下限． 限．

若 ξ 爲任意一實數，ϵ 爲任意一個（小的）正量，則節 $\xi-\varepsilon\cdots\cdots\cdots\xi+\varepsilon$ 稱爲 ξ 點之鄰域（參看 §1, h）． 我們立以下的定義:

"一點 ξ 稱爲一個點組的凝聚點 (Häufungspunkt)，若在 ξ 的任意一個（無論多小的）鄰域內，仍有無盡多個屬於該組的點" 於此，ξ 本身不必屬於此組． 組 M_3 的一個凝聚點爲 $0, M_4$ 的一個凝聚點爲 1． 我們

有下面重要的

播外二氏定理(Bolzano-Weierstrass sche satz): 每一個有欄的無盡點組(卽無盡多個點所構成的)至少有一個凝聚點.

證: 我們再將全部實數分爲二股.

若 a 的左方並無屬於組的點, 或最多祇有有盡多個屬於組的點, 亦卽,若最多有有盡多個 $x<a$, 則令 a 屬於 A 股.

若 b 的左方有無盡多個屬於組的點,亦卽,若有無盡多個 $x<b$, 則令 b 屬於 B 股.

我們立刻可以看出, 這個分股法適合 §3 內條件(1)至(3),故確定一個割數 λ. 但照上面所說,則 $\lambda-\varepsilon$ 屬於A,而在 $\lambda-\varepsilon$ 的左方,最多祇有有盡多個屬於組的點 x. 在另一方面 $\lambda+\varepsilon$ 屬於 B, 而在 $\lambda+\varepsilon$ 的左方有無盡多個屬於組的點 x. 故在 $\lambda-\varepsilon$ 與 $\lambda+\varepsilon$ 之間, 必有無盡多個 x, 就是說, λ 是組 M 的一個凝聚點,於是凝聚點的存在已經證明.

因爲在 $\lambda-\varepsilon$ 的左方祇有有盡多個 x,所以在那裏一定不再有凝聚點,於是簡直在 λ 的左方都不會再有凝聚點,那就是說, λ 是組的左方最遠的(最小的)凝聚點,因此 λ 稱爲凝聚點的下界(*Untere Häufungogrenze*). 或簡稱之爲**下限**(**Unterer Limes** 或 Limes inferior 簡寫爲 lim inf 或 $\underline{\lim}$).

完全同樣的,我們可以證明,組 M 有一個右方最遠的(最大的)凝聚點 μ, 這一點 μ 稱爲組的**上限**(**Oberer Limes** 或 Limes superior; 簡寫爲: lim sup 或 $\overline{\lim}$). 這上限可以用以下兩條件確定:

在 $\mu+\varepsilon$ 的右方最多祇有有盡多個 x.

在 $\mu-\varepsilon$ 的右方有無盡多個 x.

很明顯的 $\lambda\leqq\mu$. λ 與 μ 本身也不必爲組中之元. 他們合稱爲組 M 的主限(*Hauptlimites*).

對於組 M_4, $\lambda=\mu=1$; 對於組 M_3, $\lambda=\mu=0$, 對於全部正的眞分數所成的組, $\lambda=0$, $\mu=1$.

若一組無下欄, 我們有時也說, 他的下限 $\lambda=-\infty$ (並且他的下界 α 也 $=-\infty$); 同樣,若一組無上欄,我們說 $\beta=M=+\infty$.

若 $\lambda=\mu$ (當然皆 $\neq\pm\infty$), 則簡稱此點爲點組的限(**Limes**)(簡寫作 lim). 此時這點就是組中唯一的凝聚點, 我們用 l 來代表他. 一組的限可用以下的特性來確定: 在 $l-\varepsilon$ 的左方與在 $l+\varepsilon$ 的右方,至多有有

盡多個 x, 而在二者之間有無盡多個 x.

以上諸定義與定理, 對於直線上任意一個點組, 都可適用. 特殊的, 他自然也適用於可枚舉的組. 在此特款, 我們將其中的點排成一個任意的（但一經排好, 便是固定的）排列 $x_1, x_2, \cdots\cdots x_n \cdots\cdots$,〔這樣的排定之後, 我們稱 M 爲點敍列（*Punktfolge*）或數敍列（*Zahlenfolge*）; 點敍列或數敍列中. 同一個數可以出現多次, 甚至於無盡多次❶〕. 對於點敍列. 以上的定義, 成爲下狀:

下（上）界: $\alpha(\beta)$. 設有一個指數 n, 使 x_n 適合條件

$$x_n < \alpha \ (>\beta);$$

而對於任意一個 $\varepsilon>0$, 至少有一個指數 n, 使 x_n 適合條件

$$x_n < \alpha + \varepsilon \ (>\beta - \varepsilon)$$

$\underline{\lim}(\overline{\lim})$　對於任意選定的一個 $\varepsilon>0$, 從某一個固定的, 但與 ε 有關的 n 起, ❷ 所有的

$$x_n > \lambda - \varepsilon (< \mu + \varepsilon);$$

而且有無盡多個指數 n（或者: 如按次序考察下去, 總還有指數 n）使

$$x_n < \lambda + \varepsilon (> \mu - \varepsilon),$$

lim:　從某一個指數 n 起, x_n 適合條件

$$l - \varepsilon < x_n < l + \varepsilon.$$

最後三款, 我們寫作

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \lambda, \qquad \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \mu, \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = l.$$

〔讀如: 當 n 趨於 ∞ 時, x_n 的（下）,（上）, 限等於……〕. 最後一款, 我們也可縮寫如下:

$$x_n \to l \text{（讀如 } x_n \text{ 趨於 } l\text{）}.$$

必要時更明白的說出, 當 $n\to\infty$ 時 $x_n \to l$. 這樣寫法, 用來特別方便. 於是我們說, 數敍列 x_n 向 l 收斂或趨於限值 l.

最後而又最重要的一款, 還可以用許多別的方法來說明; 若 ε 已隨意

❶ 一個點（或數）敍列可以祇含有盡多個不同的點（或數）—— 譯者.

❷ 簡單的說: 對於所有適合條件 $n \geqq n_0$ 的 n, 爲清楚起見, 我們也可以明白的表示 n_0 與所選的 ε 有關係, 而將這條件寫作 $n \geqq n_0 = n_0(\varepsilon)$ 此外, 因爲我們總可以用每個比 n_0 大的數代替 n_0, 我們也可以用條件 $n > n_0$ 來代替 $n \geqq n_0$ 而條件內的涵義沒有因此變更.

選定，則對於所有適合條件 $n \geqq n_1(\varepsilon)$ 的 n，以下的關係成立：

$$l-\frac{1}{2}\varepsilon<x_n<l+\frac{1}{2}\varepsilon.$$

或

$$-l-\frac{1}{2}\varepsilon<-x_n<-l+\frac{1}{2}\varepsilon,$$

故對於所有適合 $p \geqq 0$ 的 p，及所有適合 $n \geqq n_1(\varepsilon)$ 的 n，

$$l-\frac{1}{2}\varepsilon<x_{n+p}<l+\frac{1}{2}\varepsilon.$$

最後，將兩式相加，卽得以下關係：

$$-\varepsilon<x_{n+p}-x_n<+\varepsilon$$

或更簡單些

$$|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon,$$

就是說，隨意選定 $\varepsilon>0$ 後，一切的 x_n 點，其指數大於某一個特殊的數 $n_1(\varepsilon)$ 者，彼此間的距離，最大不過 ε。

對於限值的存在，這條件不但是必要，而且是充分。就是說，我們有以下的

定理 2： 數敍列 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ 有限值（或說，對於這數敍列，其當然存在的兩數 λ 與 μ 相等）的充要條件是：選定 $\varepsilon>0$ 後，必有一數 $n_1=n_1(\varepsilon)$，使對於所有適合 $n \geqq n_1$ 的 n 及所有適合 $p \geqq 0$ 的 p，以下關係成立：

(1) $$|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$$

我們祇須更證這條件是充分的

先從(1)，知一切點 x 所構成的組爲有欄的，次選 $\varepsilon=1$，由題設得一個相當於此 ε 的 n_1，使凡 $n>n_1$ 時。

$$|x_n-x_{n_1}|<1$$

於是

$$|x_n|<|x_{n_1}|+1.$$

故諸數 $|x_1|, |x_2|, \cdots\cdots |x_{n_1-1}|, |x_{n_1}|+1$ 中的最大者，卽是此組的一個欄。

因此，由前一個定理，我們知道凝聚點 λ 與 μ 的存在。但此時 λ 必等於 μ，因爲若 $\lambda<\mu$，我們就可以選 $\varepsilon=\frac{1}{3}(\mu-\lambda)$。從 λ 與 μ 的定義我