KNOWLEDGE TREE

2009 知识树考研

全国硕士研究生入学统一考试

考研数学 数学四

10年真题点评

文登培训学校策划

陈文灯 / 主 编
陈启浩 / 副主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

2009 知识树考研

全国硕士研究生入学统一考试

考研数学 数学四

10年真题点评

陈文灯 / 主　编
陈启浩 / 副主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

数学10年真题点评. 4 / 陈文灯主编. —2版. —北京:
北京理工大学出版社,2008.3(2008.4重印)
(知识树考研)
ISBN 978-7-5640-0714-0

Ⅰ. 数...　Ⅱ. 陈...　Ⅲ. 高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料　Ⅳ. O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第024486号

出版发行 / 北京理工大学出版社
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街5号
邮　　编 / 100081
电　　话 /(010)68914775(办公室)　68944990(批销中心)　68911084(读者服务部)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 北京国马印刷厂
开　　本 / 787毫米×1092毫米　1/16
印　　张 / 12.75
字　　数 / 290千字
版　　次 / 2008年3月第2版　　2008年4月第7次印刷
定　　价 / 19.80元

前　言

一年一度的硕士研究生入学统一考试已经举行了十几届，积累了近百份数学试卷，这既是众多命题专家智慧和劳动的结晶，也是广大考研学子的宝贵财富。

历届的考研真题，除其内容外，还包含诸多有价值的信息，例如试题的形式、涵盖面、难度及试题所蕴涵的规律性。为了使考生在考研真题中汲取更多知识、掌握更多解题方法，我们将1998年～2008年全国硕士研究生入学统一考试数学试题作了精心的解析，编写成《考研数学·10年真题点评》系列丛书，奉献给广大考研朋友，书中对每道真题通过“分析”、“详解”和“评注”三部分进行点评。在“分析”中用简明语言给出解题思路；在“详解”中用简捷、新颖方法给出详细解答；在“评注”中强调与真题有关的知识点及题解中使用的技巧。

我们希望读者在使用本书时，不要轻易地翻阅真题的解答，只有当百思不得其解时才查阅解答；而且每做完一道真题，应回过头来仔细阅读书中有关这道真题的分析、详解和评注，进行比对和总结。如果能如此下功夫做完最近十年的数学考研真题，读完全书，我们深信读者在考研数学的基本概念和基本理论的理解上，在计算方法和计算技巧的掌握上都将获得一个飞跃，而且在解题能力和应考水平上也将有一个较大幅度的提高，从而更加从容地面对研究生入学考试。

这套系列丛书自去年问世以来，深得广大考研学子的喜爱。今年在此基础上，作了认真的修订，增加了新的内容(如写了附录)，使得它更适合广大考研朋友复习时使用。

由于成书时间仓促，书中疏漏之处在所难免，恳请广大读者和同仁指正。

编　者

2008年1月

目　录

近 10 年真题集

近10年真题分析、详解及评注

2007 年全国硕士研究生入学统一考试
数学四试题

一、选择题（本题共 10 小题，每小题 4 分，满分 40 分，在每小题给的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后括号内）

(1) 当 $x \to 0^+$ 时，与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是

(A) $1 - e^{\sqrt{x}}$.　　(B) $\ln(1+\sqrt{x})$.　　(C) $\sqrt{1+\sqrt{x}} - 1$.　　(D) $1-\cos\sqrt{x}$.　　【　】

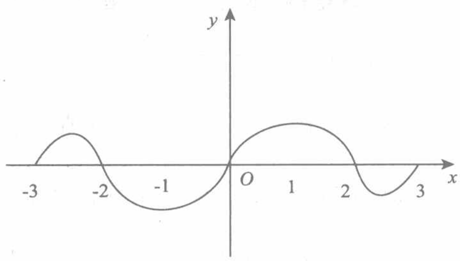
(2) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，下列命题错误的是

(A) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$.　　(B) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$.

(C) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在.　　(D) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在.

【　】

(3) 如图，连续函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-3,-2]$，$[2,3]$ 上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周，在区间 $[-2,0]$，$[0,2]$ 上的图形分别是直径为 2 的下、上半圆周，设 $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$，则下列结论正确的是



(A) $F(3) = -\dfrac{3}{4}F(-2)$

(B) $F(3) = \dfrac{5}{4}F(2)$

(C) $F(-3) = \dfrac{3}{4}F(2)$

(D) $F(-3) = -\dfrac{5}{4}F(-2)$　　【　】

(4) 设函数 $f(x,y)$ 连续，则二次积分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}dx\int_{\sin x}^{1}f(x,y)\,dy$ 等于

(A) $\int_0^1 dy\int_{\pi+\arcsin y}^{\pi} f(x,y)\,dx$.　　(B) $\int_0^1 dy\int_{\pi-\arcsin y}^{\pi} f(x,y)\,dx$.

(C) $\int_0^1 dy\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi+\arcsin y} f(x,y)\,dx$.　　(D) $\int_0^1 dy\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\arcsin y} f(x,y)\,dx$.　　【　】

(5) 设某商品的需求函数 $Q=160-2P$，其中 Q、P 分别表示需求量和价格，如果该商品需求弹性的绝对值等于 1，则商品的价格是

(A) 10.　　(B) 20.　　(C) 30.　　(D) 40.　　【　】

(6) 曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)$ 的渐近线的条数为

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.　　【　】

(7) 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，则下列向量组线性相关的是

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$.　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-2\boldsymbol{\alpha}_1$.　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+2\boldsymbol{\alpha}_1$.　　【　】

(8) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$

(A) 合同，且相似.　　(B) 合同，但不相似.

(C) 不合同，但相似.　　(D) 既不合同，也不相似.　　【　】

(9) 某人向同一目标独立重复射击，每次射击命中目标的概率为 $p(0<p<1)$，则此人第 4 次射击恰好第 2 次命中目标的概率为

(A) $3p(1-p)^2$.　　(B) $6p(1-p)^2$.

(C) $3p^2(1-p)^2$.　　(D) $6p^2(1-p)^2$.　　【　】

(10) 设随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布，且 X 与 Y 不相关，$f_X(x)$，$f_Y(y)$ 分别表示 X,Y 的概率密度，则在 $Y=y$ 的条件下，X 的条件概率密度 $f_{X|Y}(x\mid y)$ 为

(A) $f_X(x)$.　　(B) $f_Y(y)$.

(C) $f_X(x)f_Y(y)$.　　(D) $\dfrac{f_X(x)}{f_Y(y)}$.　　【　】

二、填空题(本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.)

(11) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}(\sin x+\cos x)=$ ________.

(12) 设函数 $y=\dfrac{1}{2x+3}$，则 $y^{(n)}(0)=$ ________.

(13) 设 $f(u,v)$ 是二元可微函数，$z=f\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{x}{y}\right)$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ________.

(14) 微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{x}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y}{x}\right)^3$ 满足 $y\Big|_{x=1}=1$ 的特解为 $y=$ ________.

(15) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^3$ 的秩为________.

(16) 在区间 $(0,1)$ 中随机地取两个数，则这两个数之差的绝对值小于 $\dfrac{1}{2}$ 的概率为________.

三、解答题(本题共 8 小题，满分 86 分，请将解答写在答题纸指定位置上，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(17)(本题满分 10 分)

设函数 $y=y(x)$ 由方程 $y\ln y-x+y=0$ 确定，试判断曲线 $y=y(x)$ 在点 $(1,1)$ 附近的凹凸性.

(18)(本题满分 11 分)

设二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}x^2, & |x|+|y|<1,\\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & 1\leqslant|x|+|y|\leqslant 2.\end{cases}$$

计算二重积分$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\,\big|\,|x|+|y|\leqslant 2\}$.

(19)(本题满分 11 分)

设函数 $f(x),g(x)$ 在$[a,b]$上连续，在(a,b)内二阶可导且存在相等的最大值. 又 $f(a)=g(a),f(b)=g(b)$. 证明：

(Ⅰ)存在 $\eta\in(a,b)$，使得 $f(\eta)=g(\eta)$；

(Ⅱ)存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

(20)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 具有连续的一阶导数，且满足 $f(x)=\int_0^x(x^2-t^2)f'(t)\mathrm{d}t+x^2$，求 $f(x)$ 的表达式.

(21)(本题满分 11 分)

设线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0,\\ x_1+2x_2+ax_3=0,\\ x_1+4x_2+a^2x_3=0\end{cases}\qquad①$$

与方程

$$x_1+2x_2+x_3=a-1\qquad②$$

有公共解，求 a 的值及所有公共解.

(22)(本题满分 11 分)

设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-2$，$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_1 的一个特征向量. 记 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^5-4\boldsymbol{A}^3+\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

(Ⅰ)验证 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量，并求 $\boldsymbol{B}$ 的全部特征值与特征向量；

(Ⅱ)求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

(23)(本题满分 11 分)

设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2-x-y, & 0<x<1,0<y<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

(Ⅰ)求 $P\{X>2Y\}$；

(Ⅱ)求 $Z=X+Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

(24)(本题满分 11 分)设随机变量 X 与 Y 独立同分布，且 X 的概率分布为

X	1	2
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

记 $U=\max\{X,Y\},V=\min\{X,Y\}$.

(Ⅰ)求(U,V)的概率分布；

(Ⅱ)求 U 与 V 的协方差 $\mathrm{Cov}(U,V)$.

2006年全国硕士研究生入学统一考试
数学四试题

一、填空题:1 ~ 6 小题,每小题 4 分,共 24 分,把答案填在题中横线上.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n} =$ ________.

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 的某邻域内可导,且 $f'(x)=e^{f(x)}$,$f(2)=1$. 则 $f'''(2)=$ ________.

(3) 设函数 $f(u)$ 可微,且 $f'(0)=\dfrac{1}{2}$,则 $z=f(4x^2-y^2)$ 在点 $(1,2)$ 处的全微分 $dz|_{(1,2)}=$ ________.

(4) 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为二维列向量,矩阵 $\boldsymbol{A}=(2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)$,$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)$. 若行列式 $|\boldsymbol{A}|=6$,则 $|\boldsymbol{B}|=$ ________.

(5) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{E}$ 为二阶单位矩阵,矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$,则 $\boldsymbol{B}=$ ________.

(6) 设随机变量 X 与 Y 相互独立,且均服从区间 $[0,3]$ 上的均匀分布,则 $P\{\max\{X,Y\}\leqslant 1\}=$ ________.

二、选择题:7 ~ 14 小题,每小题 4 分,共 32 分. 每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.

(7) 设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数,且 $f'(x)>0$,$f''(x)>0$,Δx 为自变量 x 在点 x_0 处的增量,Δy 与 dy 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分,若 $\Delta x>0$,则

(A) $0<dy<\Delta y$.　　(B) $0<\Delta y<dy$.

(C) $\Delta y<dy<0$.　　(D) $dy<\Delta y<0$.　　【　】

(8) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,且 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h^2)}{h^2}=1$,则

(A) $f(0)=0$ 且 $f'_-(0)$ 存在.　　(B) $f(0)=1$ 且 $f'_-(0)$ 存在.

(C) $f(0)=0$ 且 $f'_+(0)$ 存在.　　(D) $f(0)=1$ 且 $f'_+(0)$ 存在.　　【　】

(9) 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,且 $f(x)\leqslant g(x)$,则对任何 $c\in(0,1)$,

(A) $\int_{\frac{1}{2}}^{c} f(t)dt \geqslant \int_{\frac{1}{2}}^{c} g(t)dt$.　　(B) $\int_{\frac{1}{2}}^{c} f(t)dt \leqslant \int_{\frac{1}{2}}^{c} g(t)dt$.

(C) $\int_{c}^{1} f(t)dt \geqslant \int_{c}^{1} g(t)dt$.　　(D) $\int_{c}^{1} f(t)dt \leqslant \int_{c}^{1} g(t)dt$.　　【　】

(10) 设非齐次线性微分方程 $y'+P(x)y=Q(x)$ 有两个不同的解 $y_1(x)$,$y_2(x)$,C 为任意常数,则该方程的通解是

(A) $C[y_1(x)-y_2(x)]$.　　(B) $y_1(x)+C[y_1(x)-y_2(x)]$.

(C) $C[y_1(x)+y_2(x)]$.　　(D) $y_1(x)+C[y_1(x)+y_2(x)]$.　　【　】

(11) 设 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 均为可微函数,且 $\varphi'_y(x,y)\neq 0$,已知 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的一个极值点,下列选项正确的是

(A) 若 $f'_x(x_0,y_0)=0$,则 $f'_y(x_0,y_0)=0$.

(B) 若 $f'_x(x_0,y_0)=0$，则 $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$.

(C) 若 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$，则 $f'_y(x_0,y_0)=0$.

(D) 若 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$，则 $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$. 【　】

(12) 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 行加到第 1 行得 $\boldsymbol{B}$，再将 $\boldsymbol{B}$ 的第 1 列的 -1 倍加到第 2 列得 $\boldsymbol{C}$，记 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则

(A) $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$.　　(B) $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1}$.

(C) $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$.　　(D) $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$. 【　】

(13) 设 A、B 为两个随机事件，且 $P(B)>0$，$P(A\mid B)=1$，则必有

(A) $P(A\cup B)>P(A)$.　　(B) $P(A\cup B)>P(B)$.

(C) $P(A\cup B)=P(A)$.　　(D) $P(A\cup B)=P(B)$. 【　】

(14) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$，随机变量 Y 服从正态分布 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$，且 $P\{|X-\mu_1|<1\}>P\{|Y-\mu_2|<1\}$，则必有

(A) $\sigma_1<\sigma_2$.　　(B) $\sigma_1>\sigma_2$.

(C) $\mu_1<\mu_2$.　　(D) $\mu_1>\mu_2$. 【　】

三、解答题：15 ～ 23 小题，共 94 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

(15)（本题满分 7 分）

设 $f(x,y)=\dfrac{y}{1+xy}-\dfrac{1-y\sin\frac{\pi x}{y}}{\arctan x}$，$x>0$，$y>0$. 求

（Ⅰ）$g(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}f(x,y)$；

（Ⅱ）$\lim\limits_{x\to0^+}g(x)$.

(16)（本题满分 7 分）

计算二重积分 $\iint\limits_D\sqrt{y^2-xy}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由直线 $y=x$，$y=1$，$x=0$ 所围成的平面区域.

(17)（本题满分 10 分）

证明：当 $0<a<b<\pi$ 时，

$$b\sin b+2\cos b+\pi b>a\sin a+2\cos a+\pi a.$$

(18)（本题满分 8 分）

在 xOy 坐标平面上，连续曲线 L 过点 $M(1,0)$，其上任意点 $P(x,y)(x\neq0)$ 处的切线斜率与直线 OP 的斜率之差等于 ax（常数 $a>0$）.

（Ⅰ）求 L 的方程；

（Ⅱ）当 L 与直线 $y=ax$ 所围成平面图形的面积为 $\dfrac{8}{3}$ 时，确定 a 的值.

(19)（本题满分 10 分）

试确定常数 A,B,C 的值，使得

$\mathrm{e}^x(1+Bx+Cx^2)=1+Ax+0(x^3)$，

其中 $0(x^3)$ 是当 $x\to0$ 时比 x^3 高阶的无穷小.

(20)(本题满分 13 分)

设四维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1+a,1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,2+a,2,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,3,3+a,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(4,4,4,4+a)^{\mathrm{T}}$，问 a 为何值时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关？当 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关时，求其一个极大线性无关组，并将其余向量用该极大线性无关组线性表出.

(21)(本题满分 13 分)

设三阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和均为 3，向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,2,-1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的两个解.

(Ⅰ)求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量；

(Ⅱ)求正交矩阵 Q 和对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，使得 $Q^{\mathrm{T}}AQ=\boldsymbol{\Lambda}$；

(Ⅲ)求 $\boldsymbol{A}$ 及 $(\boldsymbol{A}-\frac{3}{2}\boldsymbol{E})^6$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为三阶单位矩阵.

(22)(本题满分 13 分)

设二维随机变量 (X,Y) 的概率分布为

X	-1	0	1
-1	a	0	0.2
0	0.1	b	0.2
1	0	0.1	c

其中 a,b,c 为常数，且 X 的数学期望 $E(X)=-0.2$，$P\{Y\leqslant 0\mid X\leqslant 0\}=0.5$，记 $Z=X+Y$. 求

(Ⅰ)a,b,c 的值；

(Ⅱ)Z 的概率分布；

(Ⅲ)$P\{X=Z\}$.

(23)(本题满分 13 分)

设随机变量 X 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & -1<x<0,\\ \frac{1}{4}, & 0\leqslant x<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

令 $Y=X^2$，$F(x,y)$ 为二维随机变量 (X,Y) 的分布函数. 求

(Ⅰ)Y 的概率密度 $f_Y(y)$；

(Ⅱ)$\mathrm{Cov}(X,Y)$；

(Ⅲ)$F(-\frac{1}{2},4)$.

2005年全国硕士研究生入学统一考试
数学四试题

一、填空题(本题共6小题,每小题4分,满分24分.把答案填在题中横线上)

(1) 极限$\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{2x}{x^2+1}=$ ________.

(2) 微分方程 $xy'+y=0$ 满足初始条件 $y(1)=2$ 的特解为________.

(3) 设二元函数 $z=xe^{x+y}+(x+1)\ln(1+y)$,则 $dz|_{(1,0)}=$ ________.

(4) 设行向量组 $(2,1,1,1),(2,1,a,a),(3,2,1,a),(4,3,2,1)$ 线性相关,且 $a\neq1$,则 a = ________.

(5) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均为三维列向量,记三阶矩阵

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1\quad \boldsymbol{\alpha}_2\quad \boldsymbol{\alpha}_3),\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3\quad \boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3\quad \boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3).$$

如果 $|\boldsymbol{A}|=1$,那么 $|\boldsymbol{B}|=$ ________.

(6) 从数1,2,3,4中任取一个数,记为 X,再从 $1,\cdots,X$ 中任取一个数,记为 Y,则 $P\{Y=2\}=$ ________.

二、选择题(本题共8小题,每小题4分,满分32分.在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(7) 当 a 取下列哪个值时,函数 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-a$ 恰有两个不同的零点.

(A)2. (B)4. (C)6. (D)8. 【 】

(8) 设 $I_1=\iint\limits_D\cos\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma$,$I_2=\iint\limits_D\cos(x^2+y^2)\,d\sigma$,$I_3=\iint\limits_D\cos(x^2+y^2)^2\,d\sigma$,其中 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant1\}$,则

(A)$I_3>I_2>I_1$. (B)$I_1>I_2>I_3$.

(C)$I_2>I_1>I_3$. (D)$I_3>I_1>I_2$. 【 】

(9) 下列结论中正确的是

(A) $\int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x(x+1)}$与$\int_0^1\dfrac{dx}{x(x+1)}$ 都收敛.

(B) $\int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x(x+1)}$与$\int_0^1\dfrac{dx}{x(x+1)}$ 都发散.

(C) $\int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x(x+1)}$发散,$\int_0^1\dfrac{dx}{x(x+1)}$ 收敛.

(D) $\int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x(x+1)}$收敛,$\int_0^1\dfrac{dx}{x(x+1)}$ 发散. 【 】

(10) 设 $f(x)=x\sin x+\cos x$,下列命题中正确的是

(A)$f(0)$ 是极大值,$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$是极小值. (B)$f(0)$ 是极小值,$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$是极大值.

(C)f(0)是极大值，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$也是极大值.　　(D)f(0)是极小值，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$也是极小值.

【　】

(11)以下四个命题中，正确的是

(A)若 $f'(x)$在(0,1)内连续，则 $f(x)$在(0,1)内有界.

(B)若 $f(x)$在(0,1)内连续，则 $f(x)$在(0,1)内有界.

(C)若 $f'(x)$在(0,1)内有界，则 $f(x)$在(0,1)内有界.

(D)若 $f(x)$在(0,1)内有界，则 $f'(x)$在(0,1)内有界.　【　】

(12)设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均为 n 阶矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，若 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB}$，$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{CA}$，则 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}$ 为

(A)$\boldsymbol{E}$.　(B)$-\boldsymbol{E}$.　(C)$\boldsymbol{A}$.　(D)$-\boldsymbol{A}$.　【　】

(13)设二给随机变量(X,Y)的概率分布为

X \ Y	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

若随机事件$\{X=0\}$与$\{X+Y=1\}$相互独立，则　【　】

(A)$a=0.2,b=0.3$.　(B)$a=0.1,b=0.4$.

(C)$a=0.3,b=0.2$　(D)$a=0.4,b=0.1$.

(14)设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 为独立同分布的随机变量列，且均服从参数为 $\lambda(\lambda>1)$的指数分布，记 $\Phi(x)$为标准正态分布函数，则　【　】

(A)$\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n\lambda}{\lambda\sqrt{n}}\leqslant x\right\}=\Phi(x)$.　(B)$\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}\leqslant x\right\}=\Phi(x)$.

(C)$\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\dfrac{\lambda\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n}{\sqrt{n}}\leqslant x\right\}=\Phi(x)$.　(D)$\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-\lambda}{\sqrt{n\lambda}}\leqslant x\right\}=\Phi(x)$.

三、(本题共 9 小题，满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(15)(本题满分 8 分)

求$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+x}{1-e^{-x}}-\dfrac{1}{x}\right)$.

(16)(本题满分 8 分)

设 $f(u)$具有二阶连续导数，且 $g(x,y)=f\left(\dfrac{y}{x}\right)+yf\left(\dfrac{x}{y}\right)$，求 $x^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}-y^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

(17)(本题满分 9 分)

计算二重积分$\iint\limits_D|x^2+y^2-1|\,d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant1,0\leqslant y\leqslant1\}$.

(18 分)(本题满分 9 分)

求 $f(x,y)=x^2-y^2+2$ 在椭圆域 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+\dfrac{y^2}{4}\leqslant1\right\}$上的最大值和最小值.

(19)(本题满分 8 分)

设 $f(x),g(x)$ 在 $[0,1]$ 上的导数连续,且 $f(0)=0,f'(x)\geqslant 0,g'(x)\geqslant 0$. 证明:对任何 $a\in[0,1]$,有

$$\int_0^a g(x)f'(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x\geqslant f(a)g(1).$$

(20)(本题满分 13 分)

已知齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=0,\\2x_1+3x_2+5x_3=0,\\x_1+x_2+ax_3=0,\end{cases}\tag{1}$$

和

$$\begin{cases}x_1+bx_2+cx_3=0,\\2x_1+b^2x_2+(c+1)x_3=0\end{cases}\tag{2}$$

同解,求 a,b,c 的值.

(21)(本题满分 13 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是线性无关的三维列向量,且满足

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3.$$

(Ⅰ)求矩阵 $\boldsymbol{B}$,使得 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{B}$;

(Ⅱ)求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值;

(Ⅲ)求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵.

(22)(本题满分 13 分)

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,0<y<2x,\\0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求:(Ⅰ)(X,Y) 的边缘概率密度 $f_X(x),f_Y(y)$;

(Ⅱ)$Z=2X-Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$;

(Ⅲ)$P\left\{Y\leqslant\frac{1}{2}\,\middle|\,X\leqslant\frac{1}{2}\right\}$.

(23)(本题满分 13 分)

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>2)$ 为独立同分布的随机变量,且均服从 $N(0,1)$,记 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i,Y_i=X_i-\overline{X},i=1,2,\cdots,n$. 求:

(Ⅰ)求 Y_i 的方差 $DY_i,i=1,2,\cdots,n$;

(Ⅱ)求 Y_1 与 Y_n 的协方差 $\mathrm{Cov}(Y_1,Y_n)$;

(Ⅲ)$P\{Y_1+Y_n\leqslant 0\}$.

2004 年全国硕士研究生入学统一考试
数学四试题

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分. 把答案填在题中横线上)

(1)若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{e^{x}-a}(\cos x-b)=5$,则 $a=$________,$b=$________.

(2)设 $y=\arctan e^{x}-\ln\sqrt{\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}$,则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1}=$________.

(3)设 $f(x)=\begin{cases} xe^{x^{2}}, & -\dfrac{1}{2}\leqslant x<\dfrac{1}{2}, \\ -1, & x\geqslant\dfrac{1}{2}, \end{cases}$ 则 $\int_{\frac{1}{2}}^{2}f(x-1)dx=$________.

(4)设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$,其中 $\boldsymbol{P}$ 为三阶可逆矩阵,则 $\boldsymbol{B}^{2004}-2\boldsymbol{A}^{2}=$________.

(5)设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{3\times 3}$ 是实正交矩阵,且 $a_{11}=1$,$\boldsymbol{b}=(1,0,0)^{T}$,则线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解是________.

(6)设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布,则 $P\{X>\sqrt{DX}\}=$________.

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(7)函数 $f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^{2}}$ 在下列哪个区间内有界.

(A)$(-1,0)$　　(B)$(0,1)$　　(C)$(1,2)$　　(D)$(2,3)$　　【　】

(8)设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义,且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$,$g(x)=\begin{cases} f\left(\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$ 则

(A)$x=0$ 必是 $g(x)$ 的第一类间断点.

(B)$x=0$ 必是 $g(x)$ 的第二类间断点.

(C)$x=0$ 必是 $g(x)$ 的连续点.

(D)$g(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性与 a 的取值有关.　　【　】

(9)设 $f(x)=|x(1-x)|$,则

(A)$x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点,但 $(0,0)$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(B)$x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点,但 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(C)$x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点,且 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(D)$x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点,且 $(0,0)$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.　　【　】

(10)设 $f(x)=\begin{cases} 1, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -1, & x<0, \end{cases}$ $F(x)=\int_{0}^{x}f(t)dt$,则

(A)$F(x)$在$x=0$点不连续.

(B)$F(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续,在$x=0$点不可导.

(C)$F(x)$在$(-\infty,+\infty)$内可导,且满足$F'(x)=f(x)$.

(D)$F(x)$在$(-\infty,+\infty)$内可导,但不一定满足$F'(x)=f(x)$. 【　】

(11)设$f'(x)$在$[a,b]$上连续,且$f'(a)>0$,$f'(b)<0$,则下列结论中**错误**的是

(A)至少存在一点$x_0\in(a,b)$,使得$f(x_0)>f(a)$.

(B)至少存在一点$x_0\in(a,b)$,使得$f(x_0)>f(b)$.

(C)至少存在一点$x_0\in(a,b)$,使得$f'(x_0)=0$.

(D)至少存在一点$x_0\in(a,b)$,使得$f(x_0)=0$. 【　】

(12)设n阶矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$等价,则必有

(A)当$|\boldsymbol{A}|=a(a\neq0)$时,$|\boldsymbol{B}|=a$.　　(B)当$|\boldsymbol{A}|=a(a\neq0)$时,$|\boldsymbol{B}|=-a$.

(C)当$|\boldsymbol{A}|\neq0$时,$|\boldsymbol{B}|=0$.　　(D)当$|\boldsymbol{A}|=0$时,$|\boldsymbol{B}|=0$. 【　】

(13)设随机变量X服从正态分布$N(0,1)$,对给定的$\alpha\in(0,1)$,数u_α满足$P\{X>u_\alpha\}=\alpha$,若$P\{|X|<x\}=\alpha$,则x等于

(A)$u_{\frac{\alpha}{2}}$.　　(B)$u_{\frac{1-\alpha}{2}}$.　　(C)$u_{1-\frac{\alpha}{2}}$.　　(D)$u_{1-\alpha}$. 【　】

(14)设随机变量$X_1,X_2,\cdots,X_n(n>1)$独立同分布,且其方差为$\sigma^2>0$.令随机变量$Y=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$,则

(A)$D(X_1+Y)=\frac{n+2}{n}\sigma^2$.　　(B)$D(X_1-Y)=\frac{n+1}{n}\sigma^2$.

(C)$\mathrm{cov}(X_1,Y)=\frac{\sigma^2}{n}$.　　(D)$\mathrm{cov}(X_1,Y)=\sigma^2$. 【　】

三、解答题(本题共9小题,满分94分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

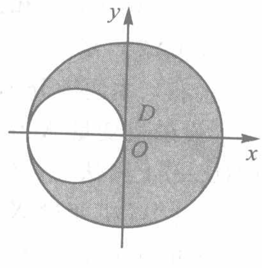
(15)(本题满分8分)

求$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin^2x}-\frac{\cos^2x}{x^2}\right)$.

(16)(本题满分8分)

求$\iint\limits_D(\sqrt{x^2+y^2}+y)\mathrm{d}\sigma$,

其中D是由圆$x^2+y^2=4$和$(x+1)^2+y^2=1$所围成的平面区域(如右图).



(17)(本题满分8分)

设$f(u,v)$具有连续偏导数,且满足

$$f'_u(u,v)+f'_v(u,v)=uv.$$

求$y(x)=\mathrm{e}^{-2x}f(x,x)$所满足的一阶微分方程,并求其通解.

(18)(本题满分9分)

设某商品的需求函数为$Q=100-5P$,其中价格$P\in(0,20)$,Q为需求量.

(Ⅰ)求需求量对价格的弹性$E_d(E_d>0)$;

(Ⅱ)推导$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}=Q(1-E_d)$(其中$R$为收益),并用弹性$E_d$说明价格在何范围内变化时,降低价格反而使收益增加.