2001

按最新大纲编写

全国硕士研究生入学统一考试

数学最后冲刺

——标准化全真模拟试卷精解

理工类

（修订本）

Shuxue

·刘斌 编著

北京出版社

2001

全国硕士研究生入学统一考试

数学最后冲刺

——标准化全真模拟试卷精解

理工类

刘 斌 编著

北 京 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

全国硕士研究生入学统一考试数学最后冲刺:理工类/刘斌编著.
-北京:北京出版社,2000.7
ISBN 7-200-03820-2

Ⅰ.全… Ⅱ.刘… Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 35376 号

全国硕士研究生入学统一考试数学最后冲刺(理工类)

QUANGUO SHUOSHI YANJIUSHENG RUXUE TONGYI
KAOSHI SHUXUE ZUIHOU CHONGCI

刘 斌 编著

*

北京出版社出版
(北京北三环中路 6 号)
邮政编码:100011
北京出版社出版集团总发行
新 华 书 店 经 销
北京建筑工业印刷厂印刷

*

787×1092 毫米 16 开本 36 印张(总) 888 千字(总)
2000 年 7 月第 1 次修订 2000 年 7 月第 1 次印刷
印数 1—5000 册

ISBN 7-200-03820-2/G·1255
共 2 册 定价:46.00 元(每册 23.00 元)

前　言

为了帮助广大考生在临考前的较短时间内全面检查复习效果，巩固复习成果，作者特意编写了2001年《全国硕士研究生入学统一考试数学最后冲刺》(理工类)一书，以满足广大考生考前实战热身、强化提高的需要。

本书是以中华人民共和国教育部最新制订的《2001年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》为依据，在参考了众多考研辅导资料的基础上精心编写的。选编的每类十二套全真模拟试题，选题覆盖面广，重点类型突出，特别注重对综合性试题、应用性试题和证明题等有关重点内容的选择，题目难易适度，符合实际考试要求。每套试题均附有参考答案，特别是对填空题和选择题全部给出了详细的解答。

针对近年考研命题趋势，编者根据多年考研辅导所积累的经验，就重点、难点、热点问题，如中值定理有关命题的证明、不等式的证明和高等数学、线性代数、概率统计三部分知识相互交叉命题，精心新编了一部分试题，比如把高等数学中空间解析几何与线性代数中的相关知识通过线性方程组或向量组的线性相关性联系起来的问题；把矩阵的实特征值与概率统计中的随机变量联系起来的问题；把高等数学中的极值问题与概率统计中的期望与方差和估计量的有效性等联系起来的问题，等等。由于这方面的题型是近年来考研命题的重要趋势之一，相信读者通过演练，能够更加全面系统地掌握所需知识，迅速提高综合解题能力。

鉴于一般复习考试用书很少编写专门的综合应试指导，本书在这方面作了一点尝试。对填空题、选择题与综合解答题进行分类解析指导，揭示相关的解题技巧。这部分内容有相当部分是编者在近年考研辅导中的经验总结，读者可作参考。需要指出的是，应试技巧是重要的但并不是万能的，关键还在于对基础知识、基本概念和基本技能的把握。

本书数学一与数学二的模拟试题基本不重复，无论是报考数学一还是数学二的学生，两类试题均可作为考前练习之用。另外，除个别特别优秀的历年试题外，本书尽量不选已考试题，这主要是为了便于读者通过练习能真正检验自己的复习效果。

本书在编写过程中参考了众多的相关教材和辅导资料，在此向有关的作者、编者表示衷心的感谢！

由于时间仓促和编者水平所限，书中难免有疏漏和不妥之处，恳请广大读者、同行和专家赐教。

编　者

于北京

目　录

第一部分　应试要点

一、考试要求、典型题型与重要结论

(Ⅰ)高等数学

(一)函数、极限、连续

考试要求

1. 理解函数的概念,掌握函数的表示方法.

2. 了解函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性.

3. 理解复合函数的概念,了解反函数及隐函数的概念.

4. 掌握基本初等函数的性质及其图形.

5. 会建立简单应用问题中的函数关系式.

6. 理解极限的概念,理解函数左、右极限的概念,以及极限存在与左右极限之间的关系.

7. 掌握极限的性质及四则运算法则.

8. 掌握极限存在的两个准则,并会利用它们求极限,掌握利用两个重要极限求极限的方法.

9. 理解无穷小、无穷大以及无穷小的阶的概念,会用等价无穷小求极限.

10. 理解函数连续性的概念,会判别函数间断点的类型.

11. 了解初等函数的连续性和闭区间上连续函数的性质(最大值、最小值定理和介值定理),并会应用这些性质.

说明

本部分的重点内容是极限,既要准确理解极限的概念和极限存在的充要条件,又要能熟练掌握常用的求极限方法和技巧,正确求解各种类型的极限问题.在考试中常用的求极限方法有:

1. 利用极限的四则运算法则;

2. 利用连续性;

3. 利用两个重要极限;

4. 利用等价无穷小替换(往往可使运算过程简化);

5. 利用洛必塔法则;

6. 利用夹逼定理;

7. 先利用“单调有界数列必有极限”准则证明数列的极限存在,再利用关系式求出极限;

8. 利用定积分的定义;

9. 利用泰勒公式等等.

当然,典型的考题往往需要综合运用以上多种方法求解.

讨论函数的连续性是通过极限工具进行的，所以连续性的问题本质上仍是求极限，因此这部分也是重点内容.

无穷小量阶的比较是一类特殊的极限问题，也是重点内容之一.

在函数概念这一部分内容中，重点是复合函数和分段函数以及函数记号的运算.

典型题型

1. 直接求给定式子的极限或已知函数的极限值反过来确定式中的参数；

2. 综合极限存在准则（"夹逼定理"和"单调有界数列必有极限"）和利用定积分定义等方法求极限；

3. 讨论函数的连续性，判断间断点的类型；

4. 无穷小的比较；

5. 讨论连续函数在给定区间的零点或方程在给定区间有无实根；

6. 求分段函数和复合函数等等.

重要结论

这里所指的重要结论是平时特别容易忽视，或考试中经常需要用到的一些公式、定理及其相关结论. 没有罗列的，要么考生一般比较熟悉，要么很少用到，但并非不重要. 我们列出的结论，主要是为考前备忘之用.

1. 无穷小量乘有界变量仍为无穷小量.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$，$\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}$ 极限不存在，或 $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$，$\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$ 极限不存在. 当表达式中出现此种式子时，一般不直接用洛必塔法则求极限.

3. 当 $x\to+\infty$ 时，以下各函数趋向于无穷大的快慢次序（从慢到快）依次为

$$\ln x, x, x^{\mu}(\mu>1), a^{x}(a>1);$$

当 $n\to\infty$ 时，以下各变量趋向于无穷大的快慢次序（从慢到快）依次为

$$\ln n, n, n^{\mu}(\mu>1), a^{n}(a>1), n!, n^{n}.$$

4. 当 $x\to 0$ 时，常用的等价无穷小：

$\sin x\sim x$，$\arcsin x\sim x$

$\tan x\sim x$，$\arctan x\sim x$

$\ln(1+x)\sim x$，$e^{x}-1\sim x$

$(1+x)^{\frac{1}{n}}-1\sim\dfrac{x}{n}$

$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^{2}$

5. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1$，$\lim\limits_{x\to x_0}[1+\alpha(x)]^{\frac{1}{\alpha(x)}}=e$

6. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}$ [1^{∞}，0^{0}，∞^{0} 型]

$$=\lim_{x\to x_0}e^{g(x)\ln f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\ln f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\ln f(x)}{\frac{1}{g(x)}}}$$

特别还有$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}[1^{\infty}\text{ 型}] = \lim\limits_{x\to x_0}\left\{[1+(f(x)-1)]^{\frac{1}{f(x)-1}}\right\}^{g(x)\cdot(f(x)-1)}$

$= e^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)(f(x)-1)}$

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(a+\frac{b-a}{n}i)\frac{1}{n} = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

特别$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n})\cdot\frac{1}{n} = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

(二) 一元函数微分学

考试要求

1. 理解导数和微分的概念,理解导数的几何意义,会求平面曲线的切线方程和法线方程,会用导数描述一些物理量,理解函数的可导性与连续性之间的关系.

2. 掌握导数的四则运算法则和复合函数的求导法,掌握基本初等函数的导数公式,了解微分的四则运算法则和一阶微分形式的不变性,了解微分在近似计算中的应用.

3. 了解高阶导数的概念,会求简单函数的 n 阶导数.

4. 会求分段函数的一阶、二阶导数.

5. 会求隐函数和由参数方程所确定的函数的一阶、二阶导数,会求反函数的导数.

6. 理解并会用罗尔定理、拉格朗日中值定理和泰勒定理.

7. 了解并会用柯西中值定理.

8. 理解函数的极值概念,掌握用导数判断函数的单调性和求函数极值的方法,掌握函数最大值和最小值的求法及其简单应用.

9. 会用导数判断函数图形的凹凸性,会求函数图形的拐点,会求水平、铅直和斜渐近线,会描述函数的图象.

10. 掌握用洛必塔法则求未定式极限的方法.

11. 了解曲率和曲率半径的概念,会计算曲率和曲率半径,会求两曲线的交角.

12. 了解求方程近似解的二分法和切线法.

说明

在这部分内容中,数学二不要求"会求两曲线的交角".

一元函数微分学在微积分中占有极重要的位置,应重点掌握的内容包括:

1. 导数与微分的定义,特别要会利用导数定义讨论分段函数在分段点的可导性,可导与连续的关系.

2. 求导运算,在掌握了基本的运算规则后,重点内容是复合函数的求导、隐函数求导、参数方程求导和抽象函数求导.

3. 中值定理,包括罗尔定理、拉格朗日中值定理和柯西中值定理及其应用.高等数学部分难度大、技巧性强的题大都与此三个定理有关,这类证明题的关键是构造辅助函数,常用的方法有:参数变易法,不定积分法,常数 k 值法,微分方程法等等.

4. 导数应用,重点是利用导数研究函数的性态(包括函数的单调性与极值,函数图形的凹

凸性与拐点，渐近线).

典型题型

1. 计算题　求给定函数的导数或微分(包括高阶导数)，包括隐函数和由参数方程确定的函数求导. 其中重点是复合函数求导，以及由此引申出来的所谓抽象函数求导(复合函数：$y = f(u), u = \varphi(x)$ 中，f 或 φ 未知)、变限定积分求导.

2. 证明题　利用罗尔定理、拉格朗日中值定理、柯西中值定理证明有关命题和不等式，或讨论方程在给定区间内的根的个数等.

此类题的证明，经常要构造辅助函数，要求读者掌握常用的构造辅助函数的方法和技巧，既能从题目所给条件进行分析、变形和推导，逐步引出所需的辅助函数，也能从所需证明的结论出发"逆推"出所要构造的辅助函数. 此外，在证明中还经常用到函数的单调性判断和连续函数的介值定理等.

3. 几何、物理方面的极值与最值问题.

4. 利用导数研究函数性态和描绘函数图象等等.

重要结论

1. 导数定义式

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{t \to x_0} \frac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0} = \cdots\cdots$$

2. $f(x)$ 在 x_0 处可导 $\Longleftrightarrow f_-'(x_0) = f_+'(x_0)$.

3. 可导的偶(奇)函数，其导函数为奇(偶)函数.

4. 拉格朗日中值定理的几种等价形式.

1° $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$　(ξ 在 a 与 b 之间)

2° $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$　(ξ 在 a 与 b 之间)

3° $f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0)$　(ξ 在 x_0 与 x 之间)

4° $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(\xi)\Delta x$　(ξ 在 x_0 与 $x_0 + \Delta x$ 之间)

5° $f(b) - f(a) = f'(a + \theta(b - a))(b - a)$　$(0 < \theta < 1)$

6° $f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x + \theta\Delta x)\Delta x$　$(0 < \theta < 1)$

7° $\Delta y = f'(x + \theta\Delta x)\Delta x$　$(0 < \theta < 1)$

5. 罗尔定理、拉格朗日中值定理、柯西中值定理和泰勒定理之间的关系

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{罗尔定理}\\ f'(\xi)=0\end{array}} \xrightleftharpoons[f(a)=f(b)]{\text{推广}} \boxed{\begin{array}{l}\text{拉格朗日中值定理}\\ \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)\end{array}} \xrightleftharpoons[g(x)=x]{\text{推广}} \boxed{\begin{array}{l}\text{柯西中值定理}\\ \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\end{array}}$$

推广 $\downarrow$ $n=0$ $\uparrow$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{泰勒定理}\\ f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)\end{array}}$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ （ξ 在 x_0 与 x 之间）

（三）一元函数积分学

考试要求

1．理解原函数概念，理解不定积分和定积分的概念，理解定积分中值定理．

2．掌握不定积分的基本公式，掌握不定积分和定积分的性质及换元积分法与分部积分法．

3．会求有理函数、三角函数的有理式和简单无理函数的积分．

4．理解变上限定积分作为其上限的函数及其求导定理，掌握牛顿—莱布尼兹公式．

5．了解广义积分的概念并会计算广义积分．

6．了解定积分的近似计算法．

7．掌握用定积分表达和计算一些几何量与物理量（平面图形的面积、平面曲线的弧长、旋转体的体积及侧面积、平行截面面积为已知的立体体积、变力作功、引力、压力和函数平均值等）．

说明

这一部分考试内容，对数学一、二的考试要求是相同的．

本部分重点内容包括：

1．三法一表，不定积分与定积分的直接积分法、换元积分法和分部积分法以及基本积分公式表．

2．定积分的概念及其应用（求极限以及几何、物理上的应用）．

3．变上限积分及其导数公式．

典型题型

1．计算题　计算不定积分、定积分及广义积分．注意对被积函数含有绝对值、平方根式的情形，计算不定积分与定积分时的异同．

2．与变上限积分有关的问题　变上限积分实质上是一种特殊形式的函数，因此所有对函数讨论的问题：求极限、求导、求极值、比较无穷小量的阶等等，对变上限的定积分都是适用的．不过，在求导时，被积函数中除积分变量外，不能含有自变量 x，若有，应首先设法通过变量代换等把 x 换到积分限上或积分号外再求导．

3. 关于积分中值定理的证明题.

4. 定积分应用问题.

重要结论

1. 积分可加性

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

对于被积函数为分段函数或含有绝对值的函数经常需要利用此公式;对于与积分有关的不等式与等式证明,也经常利用此公式变形.

2. 变限积分求导

$$\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\mathrm{d}t\right)' = f[b(x)]b'(x) - f[a(x)]a'(x)$$

3. 对称区间上的积分

1° 设 $f(x)$ 在 $[-l,l]$ 上连续,则 $\int_{-l}^{l} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^l [f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x$

2° 若 $f(x)$ 为连续奇函数,则 $\int_{-l}^{l} f(x)\mathrm{d}x = 0$

3° 若 $f(x)$ 为连续的偶函数,则 $\int_{-l}^{l} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^l f(x)\mathrm{d}x$

4. 设 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数,则

$$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\mathrm{d}x$$

(四) 向量代数和空间解析几何

考试要求

1. 理解空间直角坐标系,理解向量的概念及其表示.

2. 掌握向量的运算(线性运算、数量积、向量积、混合积),了解两个向量垂直、平行的条件.

3. 掌握单位向量、方向数与方向余弦、向量的坐标表达式以及用坐标表达式进行向量运算的方法.

4. 掌握平面方程和直线方程及其求法,会利用平面、直线的相互关系(平行、垂直、相交等)解决有关问题.

5. 理解曲面方程的概念,了解常用二次曲面的方程及其图形,会求以坐标轴为旋转轴的旋转曲面及母线平行于坐标轴的柱面方程.

6. 了解空间曲线的参数方程和一般方程.

7. 了解空间曲线在坐标平面上的投影,并会求其方程.

说明

这一部分内容只适用数学一,数学二不作要求.

本部分内容的重点是向量概念及其三种典型运算:数量积、矢量积与混合积,其余知识如

平面、直线方程及其位置关系等本质上都是向量之间的运算问题.

另外,考虑到向量运算的特殊性,在进行具体运算,比如解向量方程时,应当注意:由于向量没有除法运算,所以在方程中不能除以一个非零向量;向量的"乘法"有数量积与向量积之分,所以不能笼统说两边同乘以一个非零向量;由于向量积不满足交换律,因此,当方程两边需要叉乘一个非零向量时,还应说明是左叉乘还是右叉乘.

典型题型

1. 求向量的数量积、向量积.
2. 求直线与平面的方程.
3. 判断空间直线与平面的位置关系.
4. 求旋转曲面的方程.

重要结论

1. 与向量 $\vec{a}$ 同方向的单位向量为

$$\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}\vec{i} + \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}\vec{j} + \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}\vec{k}$$
$$= \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k}$$

2. 向量 $\vec{a}$ 在向量 $\vec{b}$ 上的投影为 $\vec{a}\cdot\vec{b}^0 = \frac{1}{|\vec{b}|}\vec{a}\cdot\vec{b}$

3. 设 $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$,$\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$,$\vec{c} = \{x_3, y_3, z_3\}$,则 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 的混合积为

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

若 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面,则其混合积 $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = 0$.

(五) 多元函数微分学

考试要求

1. 理解多元函数的概念.
2. 了解二元函数的极限与连续性的概念以及有界闭域上连续函数的性质.
3. 理解偏导数和全微分的概念,了解全微分存在的必要条件和充分条件以及全微分在近似计算中的应用.
4. 理解方向导数与梯度的概念并掌握其计算方法.
5. 掌握复合函数一阶、二阶偏导数的求法.
6. 会求隐函数(包括由方程组确定的隐函数)的偏导数.
7. 了解曲线的切线和法平面及曲面的切平面和法线的概念,会求它们的方程.
8. 了解二元函数的二阶泰勒公式.
9. 理解多元函数极值和条件极值的概念,掌握多元函数极值存在的必要条件,了解二元

函数极值存在的充分条件,会求二元函数的极值,会用拉格朗日乘数法求条件极值,会求简单多元函数的最大值和最小值并会解决一些简单的应用问题.

说明

数学二不考查这部分内容.

偏导数的概念及其求法是本部分的重点内容.至于求全微分、方向导数、梯度、多元函数的极值等都与偏导数的计算有关.偏导数的计算包括隐函数的偏导数和复合函数的一、二阶偏导数.

典型题型

1. 求二元、三元函数的偏导数、全微分.

2. 求复合函数的二阶偏导数,求隐函数的一阶、二阶偏导数.

3. 求二元、三元函数的方向导数和梯度.

4. 求空间曲线的切线与法平面方程,求曲面的切平面和法线方程.

5. 多元函数的极值在几何、物理上的应用.

重要结论

1. 二元函数在一点连续、可导(两个偏导数存在与可微的关系):

$$\boxed{f(x,y)\text{ 在 }(x_0,y_0)\text{ 可微}} \Rightarrow \boxed{f(x,y)\text{ 在 }(x_0,y_0)\text{ 连续}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{f(x,y)\text{ 在 }(x_0,y_0)\text{ 偏导存在}}$$

2. 函数 $z = f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 处的梯度

$$\mathrm{grad} f(x,y) = \left\{\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right\}$$

梯度的模为方向导数的最大值 $|\mathrm{grad} f(x,y)| = \sqrt{(\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2}$.

3. 若空间曲线 Γ 以参数方程

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

给出,则 Γ 上点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$(对应 $t = t_0$) 处的切线方程为

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}$$

法平面方程为

$$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0.$$

4. 若曲面 $\sum$ 以一般式方程 $F(x,y,z) = 0$ 给出时,过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的切平面方程为

$$F'_x(x_0,y_0,z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0,y_0,z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0,y_0,z_0)(z - z_0) = 0$$

法线方程为

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}.$$

(六)多元函数积分学

考试要求

1. 理解二重积分、三重积分的概念,了解重积分的性质,了解二重积分的中值定理.

2. 掌握二重积分(直角坐标、极坐标)的计算方法,会计算三重积分(直角坐标、柱面坐标、球面坐标).

3. 理解两类曲线积分的概念,了解两类曲线积分的性质及两类曲线积分的关系.

4. 掌握计算两类曲线积分的方法.

5. 掌握格林公式并会运用平面曲线积分与路径无关的条件,会求全微分的原函数.

6. 了解两类曲面积分的概念、性质及两类曲面积分的关系,掌握计算两类曲面积分的方法,了解高斯公式、斯托克斯公式,会用高斯公式计算曲面积分.

7. 了解散度与旋度的概念,并会计算.

8. 会用重积分、曲线积分及曲面积分求一些几何量与物理量(平面图形的面积、体积、曲面面积、弧长、质量、重心、转动惯量、引力、功及流量等).

说明

本部分内容对数学二不作要求.

重点内容为:

1. 二重积分对直角坐标与极坐标的计算,即化为二次积分;三重积分对直角坐标、柱面坐标、球面坐标的计算,即化为三次积分.

2. 曲线积分和曲面积分计算.

3. 格林公式以及平面上曲线积分与路径无关的充要条件,并会利用它们计算曲线积分.

4. 高斯公式与斯托克斯公式.

5. 散度与旋度的概念及计算.

6. 重积分与曲线、曲面积分在几何上与物理上的应用.

典型题型

1. 二、三重积分对各种坐标的计算.

2. 第一类曲线积分与第一类曲面积分计算.

3. 第二类曲线积分的计算.

对于平面上的第二类曲线积分,其计算方法通常有:1° 利用参数方程化为定积分;2° 利用格林公式;3° 选择适当路径法.

对于空间中的第二类曲线积分,其计算方法通常有:1° 利用参数方程化为定积分;2° 利用斯托克斯公式.

4. 第二类曲面积分的计算,其方法有:1° 直接投影法;2° 利用高斯公式;3° 投影转换法.

5. 梯度、散度、旋度的综合计算.

重要结论

1. 如果积分域 D 关于 x 轴对称，$f(x,y)$ 为 y 的奇偶函数，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\begin{cases}0, & f\text{ 关于 }y\text{ 为奇函数，即 }f(x,-y)=-f(x,y)\\ 2\iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma, & f\text{ 关于 }y\text{ 为偶函数，即 }f(x,-y)=f(x,y)\end{cases}$$

D_1 为 D 在上半平面部分.

2. 如果 D 关于 y 轴对称，$f(x,y)$ 为 x 的奇偶函数，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\begin{cases}0, & f\text{ 关于 }x\text{ 为奇函数，即 }f(-x,y)=-f(x,y)\\ 2\iint_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma, & f\text{ 关于 }x\text{ 为偶函数，即 }f(-x,y)=f(x,y)\end{cases}$$

D_2 为 D 在右半平面部分.

3. 如果 D 关于原点对称，$f(x,y)$ 同时为 x,y 的奇偶函数，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\begin{cases}0, & f\text{ 关于 }x,y\text{ 为奇函数，即 }f(-x,-y)=-f(x,y)\\ 2\iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma, & f\text{ 关于 }x,y\text{ 为偶函数，即 }f(-x,-y)=f(x,y)\end{cases}$$

D_1 为 D 在上半平面部分.

4. 投影转换法.

设曲面 $\sum$ 的方程为 $z=f(x,y)$，则

$$\iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{\Sigma}(-f'_x\cdot P-f'_yQ+R)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

注：若曲面 $\sum$ 在 xy 平面上投影为一个简单区域，则用上述方法比较简便.

（七）无穷级数

考试要求

1. 理解常数项级数收敛、发散以及收敛级数的和的概念，掌握级数的基本性质和收敛的必要条件.

2. 掌握几何级数与 p 级数的收敛性.

3. 会用正项级数的比较审敛法、比值审敛法和根值审敛法，掌握正项级数的比值审敛法.

4. 会用交错级数的莱布尼兹定理.

5. 了解无穷级数绝对收敛与条件收敛的概念，以及绝对收敛与条件收敛的关系.

6. 了解函数项级数的收敛域及和函数的概念.

7. 掌握幂级数的收敛半径、收敛区间及收敛域的求法.

8. 了解幂级数在其收敛区间内的一些基本性质. 会求一些幂级数在收敛区间内的和函数，并会由此求出某些数项级数的和.

9. 了解函数展开为泰勒级数的充分必要条件.

10. 掌握 e^x、$\sin x$、$\cos x$、$\ln(1+x)$ 和 $(1+x)^a$ 的麦克劳林展开式,会用它们将一些简单函数间接展开成幂级数.

11. 了解幂级数在近似计算上的简单应用.

12. 了解傅里叶级数的概念和函数展开为傅里叶级数的狄利克雷定理,会将定义在 $[-l,l]$ 上的函数展开为傅里叶级数,会将定义在 $[0,l]$ 上的函数展开为正弦级数与余弦级数,会写出傅里叶级数的和表达式.

说明

本部分内容数学二不作要求.

重点内容是:判断数项级数的敛散性.其他考查内容包括:1° 求幂级数的收敛半径、收敛区间(开区间)、收敛域;2° 将函数展开成幂级数;3° 求某些数项级数的和或某些幂级数的和函数;4° 傅里叶级数及其收敛定理.

关于求幂级数的收敛域,首先求出收敛半径,得到收敛区间,再考虑两个端点的收敛性,从而求得收敛域,在求收敛半径时,若用

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho, R = \dfrac{1}{\rho}$ 时,注意此时的级数是形如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的标准形式.若为形如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 的幂级数,此时 x 的取值范围为 $|x-x_0| < R$,再考虑端点 $x = x_0 \pm R$,得到最终的收敛域.

关于将已知函数展开为幂级数,考试要求中,事实上只需要掌握间接展开法.所谓间接法,是根据幂级数展开的惟一性,将要展开的函数通过代数运算、变量置换、逐项求导、逐项积分等手段化成已知幂级数展开式的函数,而得到该函数的幂级数展开式,因此要求:

1° 记住诸如 $\dfrac{1}{1-x}$,e^x,$\sin x$,$\cos x$,$\ln(1+x)$ 等函数的展开式及收敛域,且将 x 理解为中间变量.

2° 将函数 $f(x)$ 通过代数运算、变量置换、逐项求导或逐项积分化成 1° 中已知展开式的幂级数展开.

典型题型

1. 判别数项级数的敛散性.

① 正项级数的判敛程序.