考研专业课攻关系列

通信原理

考试要点与真题精解

◎肖大光　王　玮　编著

围绕学科考点

把握重点难点

收录全真试卷

附带详细解答

国防科技大学出版社

考研专业课攻关系列

通信原理

考试要点与真题精解

肖大光　王　玮　编著

国防科技大学出版社
·长沙·

内 容 简 介

本书是以通信专业的学生、青年教师和希望深入了解“通信原理”课程内容的科技人员以及备考研究生入学考试的本科生为读者对象的一本教学参考书和考研复习参考书。内容包括：通信系统基本概念、信号与噪声分析、模拟信号调制、模拟信号数字化、数字基带传输系统、数字频带传输、最佳接收原理、差错控制编码、同步原理等。各章按照内容要点、典型题精解和练习题三部分进行编写，各章练习题也给出了参考答案附后。最后两章安排模拟试卷和近两年重点大学入学考试试卷，并给出参考答案。重点是通过各种题型解答来帮助读者理解和掌握“通信原理”课程的内容和解决问题的方法。

本书可以作为学习“通信原理”课程的教学参考书，也可作为准备参加研究生入学考试的复习指导书，可以供本、专科学生使用，也可以供研究生、专业技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

通信原理：考试要点与真题精解/肖大光等编著.—长沙：国防科技大学出版社，2007.7
(考研专业课攻关系列)
ISBN 978-7-81099-276-3

Ⅰ.通… Ⅱ.肖… Ⅲ.通信理论-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.TN911

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 077080 号

国防科技大学出版社出版发行
电话：(0731)4572640 邮政编码：410073
http://www.gfkdcbs.com
责任编辑：潘生 责任校对：唐卫葳
新华书店总店北京发行所经销
国防科技大学印刷厂印装

*

开本：787×1092 1/16 印张：11.75 字数：301 千
2007 年 7 月第 1 版第 1 次印刷 印数：1-4000 册
ISBN 978-7-81099-276-3
定价：18.00 元

前言

通信技术是现代高新技术的一个重要组成部分。日新月异的现代通信系统不仅推动了社会信息化,提高了劳动生产率,改善了人们的生活质量,也使得人们的工作、学习和方式发生了越来越多的改变。毫无疑问,通信技术将继续快速地发展,并日益广泛地深入到我们日常生活的各个方面。越来越多的高等院校建立了通信工程或与之相关的专业。

新的通信系统的研发在很大程度上是以通信理论的发展为基础的。"通信原理"是通信工程专业的一门重要的专业理论基础课程,它以支持建立各种通信系统的基本理论为研究对象,内容涉及典型的现代通信系统的各个组成部分的工作原理和分析、设计方法。学好这门课程对于学生学习、研究有关具体通信系统的后续专业课程,以及以后从事相关的科研、生产和管理工作都是十分重要的。这门课程往往也是通信专业硕士研究生的入学考试课程之一。

"通信原理"与实际应用联系密切,却又具有很强的理论性和抽象性,并且需要使用概率论、随机过程、信号与系统、模拟与数字电路等多门先修课程的知识,加上课内学时有限、学生的水平不一、教学参考资料较少等原因,给部分学生的学习造成了一些困难,而那些准备参加研究生入学考试的学生往往又希望能够得到更详尽的指导。

为了满足广大的学生、青年教师和希望以自学的方式来学习(或进一步掌握)"通信原理"的科技人员的要求,我们编写了这本"通信原理"学习指导书。本书的内容范围涵盖了国内大多数"通信原理"教材的内容,各章按照内容要点、典型题精解和练习题及参考答案三部分进行编写。在第一部分除对本章的重点内容进行总结外,也对一些重要的概念进行了必要的说明。第二部分是各章的重点,对数量较大、类型较全的典型例题进行了较为详细的解答(包括对一些公式和结论的推导)。第三部分则为读者提供了一些有代表性的补充练习题。本书中的习题除参考了在国内高校中比较一些有影响的教材和部分高校通信专业研究生入学试卷外,也自编了部分题目。根据多年的教学经验,笔者认为,例题解答对掌握本课程的内容(概念、方法和解题技巧等)是十分必要和高效的方式,当然,前提是例题和解答是高质量的。读者在理解了解题的思想和方法后,也要自己动手(比如独立地把例题再做一次)。

本书提供四份模拟试卷和八所重点大学 2005 年研究生入学考试试卷,并给出参考答案。

编写本书的出发点是兼顾课程学习和参加研究生考试辅导,是希望通过对课程内容的全面学习来为考研作准备,所以在内容的选取上没有把某一所(或几所)大学的考研题目作为重点。

本书由中南大学信息科学与工程学院肖大光副教授主编,其中第 1、2、7 章由王玮老师编写,其余章节由肖大光老师编写。本书的编写得到了国防科技大学出版社潘生编辑的大力支持,在此表示衷心的感谢。

由于时间仓促,水平有限,书中内容难免有疏漏错误之处,欢迎读者提出宝贵意见。

作　者

2007 年 6 月于中南大学

目录

KAOYAN ZHUANYEKE GONGGUAN XILIE

Contents

Contents

第1章 通信系统基本概念

一、内容要点

1.1 通信系统分类

1. 模拟通信系统：指传输对象为模拟信号的通信系统。模拟信号可以在一定范围内任意取值，其波形一般是时间的连续函数。模拟通信系统的结构如图 1－1 所示。

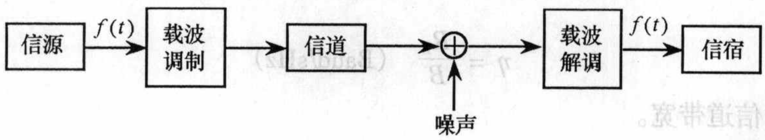

图 1－1　模拟通信系统结构

2. 数字通信系统：指传输对象为数字信号的通信系统。数字信号只能取有限个值，其波形是时间的非连续函数。数字通信系统的结构如图 1－2 所示，其中的载波调制和解调可以没有，这时称为数字基带传输系统；如有，则是数字频带传输系统。信源编码包括模拟信号的数字编码、数据压缩、加密等。信道编码包括多路复用、差错控制编码、传输码型变换等。

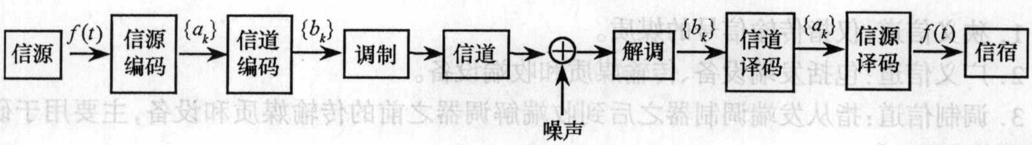

图 1－2　数字通信系统结构

1.2 通信系统的主要性能指标

1. 有效性：指在给定信道中单位时间内传输信息量的多少。
2. 可靠性：指接收信息的准确性。

1.2.1 模拟通信系统的性能指标

1. 有效传输频带宽度：同样的信号采用不同的调制方式时所需要的传输信道带宽。
2. 解调输出信噪比，或解调的信噪比增益：

$$G=\frac{\text{输出信噪比}}{\text{输入信噪比}}$$

G 只与信号的调制和解调方式有关。

1.2.2 数字通信系统的主要性能指标

1. 传输速率

(1) 码元传输速率(R_B):简称传码率,又称码元速率或符号速率,单位是波特(Baud)。直观地说,就是单位时间(1s)内在信道中传输的脉冲个数(一个脉冲可以代表二进制或多进制的一个数)。

$$R_B = \frac{1}{T_B}$$

其中,T_B 为码元周期。

(2) 信息传输速率(R_b):简称传信率,又称为信息速率,单位是比特/秒(bit/s, b/s或bps)。R_b 由码元速率和每个码元的平均信息量(信源的熵) H 决定,即

$$R_b = R_B \cdot H \quad \text{(b/s)}$$

在各符号等概率出现时,$R_b = R_B \log_2 M$,M 是符号的总数(进制数)。例如 R_B = 1000Baud,对二进制信号,R_b = 1 000bit/s,对四进制信号,R_b = 2 000bit/s。

2. 频带利用率(η):指单位信道带宽中的信息传输速率,即

$$\eta = \frac{R_b}{B} \quad \text{(b/sHz)}$$

有时也使用

$$\eta = \frac{R_B}{B} \quad \text{(Baud/sHz)}$$

其中,B 是传输信道带宽。

3. 可靠性指标

误码率(也称为误符号率):$P_e = \dfrac{\text{错误码元数}}{\text{传输总码元数}}$

误信率(也称为误比特率):$P_b = \dfrac{\text{错误比特数}}{\text{传输总比特数}}$ (在二进制传输系统中,$P_b = P_e$)

1.3 信道分类

1. 狭义信道:仅指传输信号的媒质。

2. 广义信道:包括发端设备、传输媒质和收端设备。

3. 调制信道:指从发端调制器之后到收端解调器之前的传输媒质和设备,主要用于研究模拟通信系统。

4. 编码信道:指从发端编码器之后到收端译码器之前的传输媒质和设备,主要用于研究数字通信系统。

图 1－3 调制信道与编码信道

5. 恒参数信道:指传输特性可等效为线性时不变系统的信道,也不考虑多径传输的问题。

6. 随参信道:指信号传输的路径及信道参数与时间有关的信道,它有以下特点:

(1) 对信号的衰减与时间有关;

(2) 对信号的传输时延与时间有关；

(3) 存在多径传播问题：由发端出发的电波经过多条不同的路径到达接收端点合成为接收信号，各条路径对信号的衰减和时延是不同的，合成时有相加或相减的不同效果。

1.4 信息论基础知识

1. 接收到的某一个消息(或符号)包含的信息量为：

$$I = \log_2 \frac{1}{P} = -\log_2 P \quad (\text{单位:bit}) \tag{1-1}$$

P 是消息出现的概率。P 小，则 I 大；$P = 1$，则 $I = 0$。它的实际意义是：告诉别人一件很少发生的事情，信息量很大；而告诉别人一件必然发生的事情，信息量为 0。

2. 一个符号(码元)的平均信息量(信源的熵)：

$$H = -\sum_{k=1}^{N} P(k)\log_2 P(k) \quad (\text{单位:bit/ 符号}) \tag{1-2}$$

该符号有 N 种可能的取值，$P(k)$ 是取第 k 种值的概率。

二、典型题精解

[例 1-1] 消息由符号(x_1, x_2, x_3, x_4)组成，各符号的出现是独立的，概率分别为 $\left\{\frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right\}$，则消息中一个符号的平均信息量为：

$$H = \frac{3}{8}\log_2\frac{8}{3} + \frac{1}{4}\log_2 4 + \frac{1}{4}\log_2 4 + \frac{1}{8}\log_2 8 = 1.906 \text{ bit/ 符号}$$

如果消息由 1000 个符号组成，则此消息的信息量为：

$$I = H \times N = 1.906 \times 1000 = 1906 \text{ bit}$$

如果收到的消息为 $x_1x_2x_1x_4x_3x_1x_2x_3$，则它包含的信息量为：

$$I = 3\log_2\frac{8}{3} + 2\log_2 4 + 2\log_2 4 + \log_2 8 = 3 \times 1.415 + 4 + 4 + 3 = 15.25 \text{ bit}$$

连续信号(例如随机过程，其抽样点取值为随机变量)的平均信息量(相对熵)为：

$$H_1(x) = -\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\log_2 p(x)\mathrm{d}x \tag{1-3}$$

其中，$p(x)$ 为概率密度函数。

[例 1-2] 如果连续信号 $x(t)$ 在有限范围内均匀分布：$p(x) = \frac{1}{a}\left(-\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2}\right)$，则它的平均信息量为：

$$H_1(x) = -\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{1}{a}\log_2\left(\frac{1}{a}\right)\mathrm{d}x = \log_2 a$$

[例 1-3] 如果连续信号 $x(t)$ 的平均功率受限，并服从正态分布，即 $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$，则

$$H_1(x) = \log_2\sqrt{2\pi e\sigma^2}$$

对上面的 $x(t)$，每隔 $\frac{1}{2B}$ 进行抽样，B 为信号带宽，则每秒平均信息量为：

$$H_{1t}(x) = 2BH_1(x) = 2B\log_2(2\pi e\sigma^2)^{\frac{1}{2}} = B\log_2(2\pi eS),$$

式中，$S = \sigma^2$ 为信号的平均功率。

如果噪声的平均功率为 N，则噪声的每秒平均信息量为：$H_{1t}(n) = B\log_2(2\pi eN)$。

有扰有损信道在单位时间内传输的平均信息量(信息速率)为：

$$R_t = H_{1t}(y) - H_{1t}(n) = B\log_2 2\pi e(S+N) - B\log_2 2\pi eN \quad (1-4)$$

也可以写为：

$$R_t = H_{1t}(x) - H_{1t}(x/y) \quad (1-5)$$

其中，$H_{1t}(x)$ 为信源的信息速率，$H_{1t}(x/y)$ 为收到 y 后估计为 x 的信息量。

[例 1-4]　一个有扰有损信道，发送符号集为(0,1)，0 和 1 出现的概率各为 0.5，信源每秒发送符号数为 1 000 个，接收误码率为 0.01，则信源发出的平均信息量为：

$$H(x) = \frac{1}{2}\log_2 2 + \frac{1}{2}\log_2 2 = 1\ \text{bit/符号}$$

信源的信息速率为：

$$H_t(x) = R_B H(x) = 1\,000\ \text{bit/s}$$

条件平均信息量为：

$$H_t(x/y) = -[0.99\log_2 0.99 + 0.01\log_2 0.01] = 0.081\ \text{bit/符号}$$

由于干扰的存在，使得在单位时间内损失的平均信息量为：

$$H_t(x/y) = R_B H(x/y) = 81\ \text{bit/s}$$

所以，信息传输速率为：

$$R_t = H_t(x) - H_t(x/y) = 919\ \text{bit/s}$$

对于二进制传输信道，如果码速率为 R_B，发“1”的概率为 $P_1 = 0.5$，错误接收的概率为 P，则信道内传输的条件平均信息量为：

$$H(x/y) = -[P\log_2 P + (1-P)\log_2(1-P)]$$

信源的平均信息量为：

$$H(x) = -[P_0\log_2 P_0 + P_1\log_2 P_1] = 1$$

信道内传输的(接收到的)平均信息量为：

$$R = H(x) - H(x/y) = 1 + P\log_2 P + (1-P)\log_2(1-P)$$

信息传输速率为：

$$R_t = R_B R = R_B[1 + P\log_2 P + (1-P)\log_2(1-P)]$$

如果 $P = 0.5$，则 $R_t = 0$，表示信道已无传输能力。为使 R_t 极大，P 应为 0。

信道容量 C：信道所能达到的最大信息传输速率。

Shannon 公式：

$$C = B\log_2\left(1 + \frac{S}{N}\right) \quad (1-6)$$

式中，B 是信道带宽，$\frac{S}{N}$ 为功率信噪比。

如果信道内的高斯噪声的单边功率谱密度为 n_0，信号平均功率为 S，则

$$\lim_{B\to\infty} C = 1.44\frac{S}{n_0} \quad (1-7)$$

C 并不随 B 无穷增大，这是因为信道宽度无穷增加时，噪声功率 $N = n_0 B$ 也无穷增大，使

得信道传输信息的速率受到限制。

信道容积：

$$V_C = B_C T_C H_C$$

信号体积：

$$V_S = B_S T_S H_S$$

其中 $H_S = \log_2\left((1 + \frac{S}{N}\right)$。

当 $V_C \geqslant V_S$ 才能无错误地传输信号。

[例 1-5]　信道带宽 $B = 3.4\text{kHz}$，信噪比 $\frac{S}{N} = 30\text{dB}$，传输 256 个符号且各符号等概率出现，求信道容量、信源熵和最大传码率。

[解]　信道容量为：

$$C = 3.4 \times 10^3 \log_2(1 + 1000) \approx 3.4 \times 10^4 \quad \text{bit/s}$$

信源熵（每个符号的平均信息量）：

$$H = 256 \times \frac{1}{256}\log_2 256 = 8 \text{ bit}$$

设符号传输速率为 R_B，则 $R_B H = R_B \times 8 = 3.4 \times 10^3$。

所以　$R_B = 4.25 \times 10^3$ Baud

[例 1-6]　消息由 A、B、C、D 四种符号组成，它们出现的概率分别为 1/2、1/4、1/8、1/8，每个符号用 2 位二进制编码并传输，每个脉冲（码元）1ms。求：

(1) 每个符号的平均信息量 H；(2) 平均信息传输速率 R_b；(3)1 小时传输的信息量 I。

[解]　(1) $H = \frac{1}{2}\log_2 2 + \frac{1}{4}\log_2 4 + \frac{1}{8}\log_2 8 + \frac{1}{8}\log_2 8 = 0.5 + 0.5 + 0.375 + 0.375$

$= 1.75\text{bit/}$ 符号

(2) 每秒传输的符号数为：

$$R_B = \frac{1}{2 \times 10^{-3}} = 500\text{Baud}$$

所以　$R_b = R_B H = 500 \times 1.75 = 875$ bit/s

(3)

$$I = 3600 \times R_b = 3.15 \text{ Mbit}$$

[例 1-7]　国际摩尔斯电码由点和划组成，点出现的概率是划的 3 倍，设点的长度为 5ms，划的长度为 15ms，问：平均信息速率是多少？

[解]　点和划的平均长度为：$(5 \times 3 + 15 \times 1) \div 4 = 7.5$ ms

每秒平均发送的符号数为：$\frac{1000}{7.5} \approx 133.3$ Baud

每个符号的平均信息量为：$H = \frac{1}{4}\log_2 4 + \frac{3}{4}\log_2 \frac{4}{3} \approx 0.811$ bit/ 符号

所以　$R_b = 133.3 \times 0.811 \approx 108$ bit/s

[又解]　每秒内平均有 100 个点，33.3 个划，则

所以　$R_b = 100\log_2 \frac{4}{3} + 33.3\log_2 4 \approx 41.6 + 66.6 \approx 108$ bit/s

[例 1-8]　一幅彩色照片有 10^6 个像素，每个像素有 32 种彩色和 8 种亮度等级，如果各

种彩色和亮度等概率出现,并希望在 1min 内传输完毕(信道中的功率信噪比为 40dB),求所需的信道带宽。

[解] 每个像素的平均信息量为:$\log_2(32\times8)=8\text{bit}$,整个照片的信息量为 $8\times10^6\text{bit}$,需要的信息传输速率为:$R_b=\dfrac{8\times10^6}{60}\approx1.333\times10^5\text{bit/s}$,则所需的信道容量为 $C=R_b$,所需的信道带宽为:

$$B=\frac{C}{\log_2(1+S/N)}=\frac{1.333\times10^5}{\log_2 10\,001}\approx\frac{1.333\times10^5}{13.28}\approx10\text{kHz}$$

[例 1-9] 某恒参信道的两条路径的时延差为:$\tau=2\text{ms}$。试求:在该信道中哪些频率的信号传输损耗最大,哪些频率的信号最有利于传输?

[解] 当 $\omega=\dfrac{2n\pi}{\tau}$,即 $f=\dfrac{n}{\tau}=0.5n\text{kHz}$($n$ 为正整数)时,对传输最有利(从两路径来的信号正好叠加);当 $\omega=\dfrac{(2n+1)\pi}{\tau}$,即 $f=\dfrac{(2n+1)}{2\tau}=\dfrac{2n+1}{4}\text{kHz}$ 时,信号传输损耗最大(从两路径来的信号正好互相抵消)。

[例 1-10] 某恒参信道的传输特性为:$H(\omega)=(1+\cos\omega T_0)e^{-j\omega t_d}$,其中 t_d 为常数。试确定信号 $s(t)$ 通过该信道后的表达式,并讨论信号失真的情况。

[解] $H(\omega)=(1+\cos\omega T_0)e^{-j\omega t_d}=e^{-j\omega t_d}+\dfrac{1}{2}(e^{j\omega T_0}+e^{-j\omega T_0})e^{-j\omega t_d}$

$$=e^{-j\omega t_d}+\frac{1}{2}e^{-j\omega(T_0+t_d)}+\frac{1}{2}e^{-j\omega(t_d-T_0)}$$

所以,信道的单位冲激响应为:

$$h(t)=\delta(t-t_d)+\frac{1}{2}\delta(t-t_d-T_0)+\frac{1}{2}\delta(t-t_d+T_0)$$

对输入 $s(t)$ 的输出为:

$$y(t)=s(t)*h(t)=s(t-t_d)+\frac{1}{2}s(t-t_d-T_0)+\frac{1}{2}s(t-t_d+T_0)$$

信道的幅频特性为:$|H(\omega)|=1+\cos\omega T_0$,为 ω 的正弦函数,会使信号发生幅频失真;信道的相频特性为:$\varphi(\omega)=-\omega t_d$,是 ω 的线性函数,不会发生相频失真。

三、练习题

【题 1-1】 为什么要用信噪比增益 G 作为模拟通信系统的可靠性指标?

【题 1-2】 与模拟通信系统相比,数字通信系统有什么优点?

【题 1-3】 在英文书籍中字母 e 和 o 出现的概率分别是 0.105 和 0.01,(1) 分别求它们的信息量;(2) 如果出现了 100 个 e 和 10 个 o,它们的总信息量为多少?

【题 1-4】 一个信息源,每 1μs 发出 1 个字符,字符有 4 种,它们的出现互不相关,概率分别为 1/2,1/8,1/8,1/4,求信源的平均信息量、信息速率和 1000 个字符的信息量。

【题 1-5】 离散信息源由 0,1,2,3 四个字符组成,它们出现的概率分别是 0.4,0.3,0.2,0.1,每个字符的出现是独立的。(1) 如接收到的消息中有 79 个 0,61 个 1,41 个 2,19 个 3,求该消息的信息量;(2) 接收 200 个字符的平均信息量。

【题 1-6】 连续信号 $x(t)$ 在 $-5\sim5$ 中均匀分布,求 $x(t)$ 的平均信息量。

【题 1-7】 信道带宽为 1000Hz,功率信噪比为 30dB,信源字符的平均信息量为 4bit,求:(1) 信道容量;(2) 最大传码率。

第2章 信号与噪声

一、内容要点

1.1 傅立叶变换及一些重要性质

1. 傅立叶变换： $F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$

傅立叶反变换： $f(t)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$

2. 时移特性： $f(t-t_0)\leftrightarrow F(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}$

3. 时间缩放： $f(at)\leftrightarrow\dfrac{1}{|a|}F\left(\dfrac{\omega}{a}\right)$

4. 相似性质:若 $f(t)\leftrightarrow F(\omega)$,则 $F(t)\leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$。

如果 $f(t)$ 是偶函数,则 $F(\omega)$ 是实偶函数,且 $F(t)\leftrightarrow 2\pi f(\omega)$。

5. 卷积性质： $x(t)*h(t)\leftrightarrow X(\omega)H(\omega)$

6. 相乘运算： $x(t)h(t)\leftrightarrow\dfrac{1}{2\pi}[X(\omega)*H(\omega)]$

7. 矩形函数： $\mathrm{rect}\left(\dfrac{t}{\tau}\right)\leftrightarrow\tau\mathrm{Sa}\left(\dfrac{\omega\tau}{2}\right)$， $\mathrm{rect}\left(\dfrac{\omega}{\omega_a}\right)\leftrightarrow\dfrac{\omega_a}{2\pi}\mathrm{Sa}\left(\dfrac{\omega_a t}{2}\right)$

其中, $\mathrm{rect}\left(\dfrac{t}{\tau}\right)=\begin{cases}1, & |t|\leqslant\dfrac{\tau}{2}\\ 0, & 其他\ t\end{cases}$， $\mathrm{Sa}\left(\dfrac{\omega\tau}{2}\right)=\sin\left(\dfrac{\omega\tau}{2}\right)\Big/\left(\dfrac{\omega\tau}{2}\right)$。

8. 三角形函数：

$\mathrm{tri}\left(\dfrac{t}{\tau}\right)\leftrightarrow\tau\mathrm{Sa}^2\left(\dfrac{\omega\tau}{2}\right)$， $\dfrac{\omega_a}{2\pi}\mathrm{Sa}^2\left(\dfrac{\omega_a t}{2}\right)\leftrightarrow\mathrm{tri}\left(\dfrac{\omega}{\omega_a}\right)$

其中, $\mathrm{tri}\left(\dfrac{t}{\tau}\right)$ 的图形如图 2－1 所示。

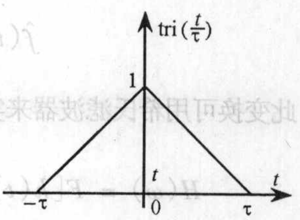

图 2－1 三角形函数

9. 升余弦波形：

$$h(t)=\begin{cases}\dfrac{A}{2}\left[1+\cos\dfrac{\omega_b t}{2}\right], & |t|\leqslant T_b=\dfrac{2\pi}{\omega_b}\\ 0, & 其他\ t\end{cases}$$

$$H(\omega)=F[h(t)]=\frac{A\sin\left(\dfrac{2\pi\cdot f}{f_b}\right)}{f_b\cdot 2\pi f\left(1-\dfrac{4f^2}{f_b{}^2}\right)}$$

10. 升余弦频谱：

$$H(\omega)=\begin{cases}\dfrac{T_b}{2}\left(1+\cos\dfrac{\omega T_b}{2}\right), & |\omega|\leqslant\dfrac{2\pi}{T_b}\\ 0, & 其他\ \omega\end{cases}$$

$$h(t)=F^{-1}[H(\omega)]=\frac{\sin\pi\dfrac{t}{T_b}}{\pi\dfrac{t}{T_b}}\cdot\frac{\cos\pi\dfrac{t}{T_b}}{1-\dfrac{4t^2}{T_b^{\,2}}}=\frac{\sin\left(2\pi\dfrac{t}{T_b}\right)}{\pi\dfrac{t}{T_b}\left(1-\dfrac{4t^2}{T_b^{\,2}}\right)}$$

说明：升余弦波的宽度为 2 个 T_b，其频谱第一个过零点为$\frac{f_b}{2}$，高频分量按$\frac{1}{f^3}$衰减。升余弦谱的带宽为 $f_b=\frac{1}{T_b}$，无旁瓣，其波形按$\frac{1}{t^3}$振荡衰减，过零点为 $n\frac{T_b}{2}$。有关的函数曲线见图 2－2。

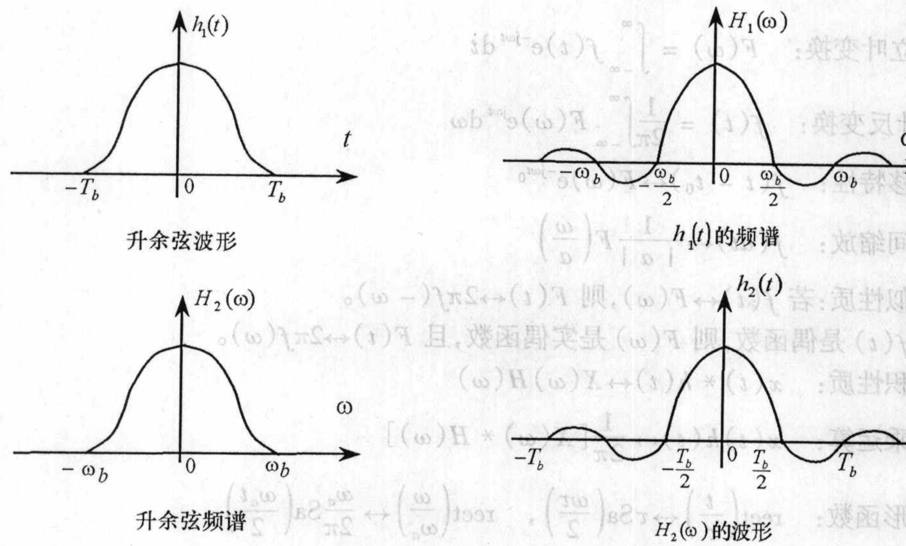

图 2－2　升余弦波形及升余弦频谱

1.2　希尔伯特变换

$$\hat{f}(t)=H[f(t)]=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\tau)}{t-\tau}\mathrm{d}\tau=f(t)*\frac{1}{\pi t}$$

此变换可用希氏滤波器来实现，见图 2－3，其中，$h(t)=\frac{1}{\pi t}$，

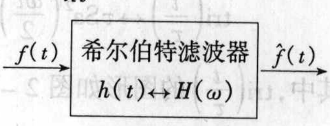

图 2－3

$$H(\omega)=F[h(t)]=-\mathrm{j}\,\mathrm{sgn}(\omega)=\begin{cases}-\mathrm{j}, & \omega>0\\ \mathrm{j}, & \omega<0\end{cases}$$

$$\hat{F}(\omega)=H(\omega)F(\omega)=-\mathrm{j}\,\mathrm{sgn}(\omega)F(\omega)$$

希尔伯特滤波器是宽带移相器，对输入信号的每个频率分量进行$\frac{\pi}{2}$或$-\frac{\pi}{2}$移相，但幅值不变(见图 2－4)。

主要变换对：

$$f(t)=\cos\omega_0 t,\quad \hat{f}(t)=\sin\omega_0 t$$

$$f(t)=\sin\omega_0 t,\quad \hat{f}(t)=-\cos\omega_0 t$$

$$f(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t},\quad \hat{f}(t)=-\mathrm{j}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}$$

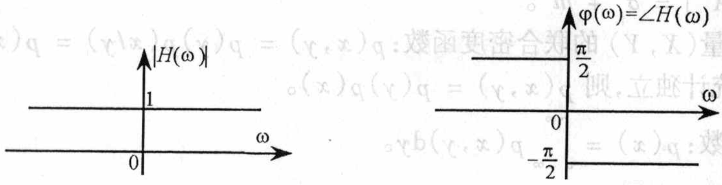

图 2－4　希尔伯特滤波器的特性

$$H[f(t)\cos\omega_0 t]=f(t)\sin\omega_0 t,\quad H[f(t)\sin\omega_0 t]=-f(t)\cos\omega_0 t$$

$(f_0 \gg f_m, f_m$ 为 $f(t)$ 的截止频率)

$$H\{H[f(t)]\}=-f(t)$$

主要性质：

(1) 线性性：　若 $f(t)=f_1(t)\pm f_2(t)$，则 $\hat{f}(t)=\hat{f}_1(t)\pm\hat{f}_2(t)$。

(2) 等能量性：$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}^2(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|F(\omega)\right|^2\mathrm{d}\omega$

(3) 正交性：

$$\int_{\infty}^{-\infty}[f(t)\hat{f}(t)]\mathrm{d}t=0$$

(4) 设 $f_1(t)$ 是低通信号，$f_2(t)$ 是高通信号，频谱不重叠，则当 $f(t)=f_1(t)f_2(t)$ 时，有

$$\hat{f}(t)=f_1(t)\hat{f}_2(t)$$

例如：$f(t)=x(t)\cos\omega_0 t$，则 $\hat{f}(t)=x(t)\sin\omega_0 t$；设 $x(t)\leftrightarrow X(\omega)$，则

$$f(t)\leftrightarrow\frac{1}{2}X(\omega+\omega_0)+\frac{1}{2}X(\omega-\omega_0)$$

$$\hat{f}(t)\leftrightarrow\frac{\mathrm{j}}{2}X(\omega+\omega_0)-\frac{\mathrm{j}}{2}X(\omega-\omega_0)$$

1.3　随机信号分析

1.3.1　随机变量

随机变量即按概率在区间(－∞～∞)内取值的变量。

随机变量 X 的统计特性如下：

(1) 概率密度函数 $p(x)$：

性质：

$$\int_{-\infty}^{\infty}p(x)\mathrm{d}x=1,\quad\int_{-\infty}^{a}p(x)\mathrm{d}x=P(X<a)$$

$$\int_{a}^{b}p(x)\mathrm{d}x=P(a<X<b)$$

式中，$P(\cdot)$ 为概率。

(2) 均值(概率平均)：

$$E[X]=\int_{-\infty}^{\infty}xp(x)\mathrm{d}x=m$$

(3) 方差：

$$D[X]=E[(X-m)^2]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m)^2p(x)\mathrm{d}x=\sigma^2$$

均方值：$E[X^2]=\sigma^2+m^2$。

二维随机变量(X,Y)的联合密度函数：$p(x,y)=p(y)p(x/y)=p(x)p(y/x)$。

若 X 和 Y 统计独立，则 $p(x,y)=p(y)p(x)$。

边际密度函数：$p(x)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)\mathrm{d}y$。

1.3.2 高斯型随机变量

1. 概率密度函数：

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

其中，m 是均值，σ^2 是方差。$p(x)$ 曲线如图2－5所示，它对称于 $x=m$ 的直线，σ 越小，峰值越高，曲线越窄，且

$$\int_{-\infty}^{m}p(x)\mathrm{d}x=\int_{m}^{\infty}p(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$$

如果 $m=0,\sigma=1,p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}}$，称为归一化正态分布。

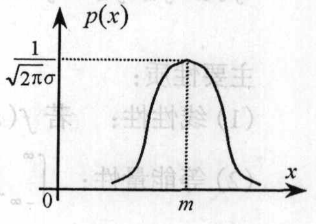

图 2－5

2. 概率计算

$$P(X>a)=\int_a^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x=\int_{\frac{a-m}{\sqrt{2}\sigma}}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t,(\text{令 } t=\frac{x-m}{\sqrt{2}\sigma})$$

令 $\mathrm{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ 为误差函数，$\mathrm{erfc}(x)=1-\mathrm{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ 为互补误差函数，则上式可以写成

$$P(X>a)=\frac{1}{2}\mathrm{erfc}\left(\frac{a-m}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

此外，$\mathrm{erfc}(x)\approx\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2},(x\gg1)$。

3. 随机过程 $x(t)$

随机过程可以简单理解为与时间有关的随机变量。对随机过程 $x(t)$，把时间固定在 $t=t_1$，便得到一个随机变量 $x(t_1)$。对 $x(t)$ 进行一次观察记录，便得到一个确定的时间函数(曲线)，如 $x_1(t)$。通信系统中的噪声就是随机过程。

$x(t)$ 的数字特征：

(1) 均值：

$$E[x(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot p(x,t)\mathrm{d}x=m_x(t)$$

积分符号中的 t 看成常数(指某一时刻)，$E[x(t)]$ 中的 t 也如此，$p(x,t)$ 是概率密度函数。

(2) 方差：

$$D[x^2(t)]=E\{[x(t)-m_x(t)]^2\}=\sigma_x^2(t)$$

均方值：

$$E[x^2(t)]=\sigma_x^2(t)+m_x^2(t)$$

此关系式的物理含义是：平均功率＝交流平均功率＋直流功率。