数学名著译丛

代数几何引论

（第二版）

［荷］B.L. 范德瓦尔登 著

李培廉 李 乔 译

科学出版社
www.sciencep.com

图字：01-2008-2321号

内 容 简 介

本书主要内容包括：n 维空间的射影几何、代数函数、平面代数曲线的基本概念和性质、点的概念、一般广义点和代数流形、代数流形不可约分解算法、代数对应这一非常重要概念以及有广泛应用的计算常数原理，代数流形的对应形式和构造方法、重数的概念和流形与超曲面之间交、线性系理论、一种把曲线变成没有重点的曲线位的方法，Bertini 定理、著名的 Noether 定理，Riemann-Roch 定理、平面曲线的奇点、包括相交重数、邻近点以及 Cremona 变换对邻近点的影响.

本书适合大学数学系高年级本科生、研究生，以及相关专业的研究人员阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

代数几何引论(第二版)/(荷)B. L. 范德瓦尔登著；李培廉，李乔译. —北京：科学出版社，2008

(数学名著译丛)

ISBN 978-7-03-021298-6

I. 代… II. ①范… ②李… ③李… III. 代数几何 IV. O187

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008) 第 031064 号

责任编辑：张 扬 吴伶伶 / 责任校对：陈玉凤
责任印制：赵德静 / 封面设计：陈 敬

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

铭浩彩色印装有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2008 年 5 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2008 年 5 月第一次印刷 印张：17
印数：1—3 000 字数：314 000

定价：48.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈路通〉)

中译本序言

1958 年时, 中国科学院为了培养年轻的科研人才, 在北京创办了中国科技大学. 当时数学研究所的高级研究人员都义不容辞踊跃参加了中国科技大学的教学工作. 我先在力学系教了两年微积分后, 于 1960 年起继华罗庚、关肇直之后为数学系担任整个系的所谓一条龙教学工作. 三年基础课后, 数学系建立了几何拓扑专门化. 主要设置了两门课程: 一门是代数拓扑, 由岳景中同志任教; 另一门是代数几何, 由我本人担任教学.

我对代数几何本是外行. 我采取了边教边学的方式, 主要采用现代代数几何学的先驱 van der Waerden 于 1939 年出版的*Einfuehrung in die algebraische Geometrie* 一书. 当时帮助我整理讲稿的年轻学者有不少, 其中有李培廉、李乔两位. 他们把 van der Waerden 的德文原著翻译成中文. 我把译稿交给了科学出版社, 当时还写了一份推荐出版的信. 所幸该信还在, 现照录如下:

关于翻译 van der Waerden 所著一书的意见: 代数几何是数学中极其重要又极其困难的领域. 其流派众多, 有些稍纵即逝. 例如, 1950 年, Weil 的《代数几何基础》一书几乎统治这一领域二三十年. 但近年影响已远不如前. 20 世纪四五十年代之交, Chevalley 也有一部关于代数几何的书, 但几乎不为人知. 近年出现的 Grothendick 的 scheme 为中心概念的代数几何系统, 曾经煊赫一时, 但近来 Harvard 大学某名教授言, 即使 Harvard 是世界代数几何的重要中心, 也从来没有讲授过 scheme 理论的课程. 现在的 scheme 也已没有前几年的声势了. 此外, 以复流形为主的代数几何又是欲概括代数几何全貌. 而其他流派之各有特色者更有不少, 其地位各有千秋.

在各家流派中, van der Waerden 以 generic point 为中心概念的系统不仅是最早奠定代数几何严密基础的理论, 而且我认为也是最有前途、最能经得起历史考验的一派. van der Waerden 所著《代数几何引论》一书于最近重印可以说是重新得到应有的重视的一个迹象. 未来的发展自能做出正确的判断. 为此我十分赞成李培廉和李乔的翻译工作, 以及科学出版社能接受出版此书.

还在我高兴地期待着中译本的出版时, 忽然得到通知, 说是该书的出版计划已被否决. 原因为何, 有关方面当有所知.

1965 年临近暑假时, 我依靠当时学习到的代数几何, 进行了某些探索.

代数几何的主要对象是复投影空间中由有限多个复代数方程所确定的几何图像. 通常只能考虑不可约而无奇点的情形. 这时图像成为有切丛的复流形, 因而可

引入陈省身示性类与示性数, 成为 20 世纪数学上的重大创新, 影响及于数学全部甚至理论物理. 但在一般有奇点的情形, 则由于切丛无法定义, 数学家只好用所谓吹涨 (blow up) 的人为复杂办法引进陈省身示性类与示性数. 但是即使是极简单的情形, 也是难以处理的, 更不用说具体计算了.

我通过 van der Waerden 的弟子周炜良所创周形式 (Chow form) 对有任意奇点的代数簇定义了陈省身示性类与示性数. 但定义复杂, 具体计算也极困难. 这时我被遣往安徽六安地区参加 "四清" 运动. 运动结束后返回北京, 接着就开始了 "文化大革命", 一切学术工作陷于停顿, 数学就更谈不上了.

直到 1976 年 "四人帮" 垮台, 学术工作才逐渐恢复. 到 1980 年, 我又重新对代数几何复习并进行思考. 这时的数学已发生了很大变化. 代数几何从过去比较冷僻的领域, 已跃升至数学的中心地位. 实际上, 代数几何已取代数论与拓扑, 成为数学中新的女王. 当时的代数几何, 名家辈出, 英国、德国、法国、美国、日本等国几代巨子各创新说, 开辟了众多不同的新方向, 呈现了百花齐放之势. 这时并无一个足以包含一切的理论可言.

van der Waerden 的代数几何奠基于代数学中的消去法与结式理论, 具有构造性与可机械化进行计算的特色. van der Waerden 所著《代数学》一书乃是近世代数学的代表作, 曾多次再版并译成多种文字, 为世界各大学数学方面的主要教材之一. 在 1930 年最早出版的版本中, 其第二部分开首的第 11 章, 即是消去法与结式理论. 可能是由于当时流行的某些思潮, 这一章在以后的版本中被完全删去. 美国 Purdue 大学具有印度血统的代数几何学家 Abhyankar 对此曾写了一首打油诗, 说是要*消去消去消去法*的罪人. 笔者认为, 消去法的消去, 将使代数几何失去具体计算与进行构造性推理并因之实现机械化的可能性, 其损失将是不可估量的.

根据 van der Waerden 的理论, 任一不可约复代数簇 V, 不论有无奇点, 都有 "母点" 存在, 簇的任意一点都是母点的 "特定化", 而且母点都有切面. 以此为基础, 我们可以将 V 的一个母点与它的切面看成一个复合元素, 并把这一复合元素看成是相应 Grassman 复合簇 (记为 $\widetilde{G}$) 的一个元素或 "点", 把这个 "点" 作为一个 "母点", 可以在 $\widetilde{G}$ 中定义一个子簇 $\widetilde{V}$, 由此在 $\widetilde{G}$ 作为拓扑流形时确定了一个 $\widetilde{G}$ 的同调类. 在 $\widetilde{G}$ 中高维的子簇 $\widetilde{W}$ 与 $\widetilde{V}$ 相交可得 $\widetilde{V}$ 的同调类. 把 $\widetilde{V}$ 的每一由点与面组成的复合元素只取点即得 $\widetilde{V}$ 到 V 的一个自然映像, 记之为 i, $\widetilde{W}$ 与 $\widetilde{V}$ 相交所得 $\widetilde{V}$ 的同调类在 i 下可得 V 的一个同调类. 易证选取适当的 $\widetilde{W}$ 时, 所得 V 中的 W 在 V 无奇点时即是通常的陈省身示性类与示性数. 而在有任意奇点时则定义了广义的陈类与陈数, 而且是通常的同调类或数, 因而容易处理. 这与以前通过周形式所得周炜良环中元素之不易处理更难以计算者大不相同.

举例来说, 日本的 Miyaoka 与我国的丘成桐曾经证明, 用 blow up 所定的某种特殊的有奇点二次超曲面, 它们的广义陈示性数 c_1, c_2 间有不等式关系 $3c_2 \geqslant c_1^2$.

若用我们所定义的广义陈示性数, 则不仅没有任何限制, 而且对任意高维有任意奇点的复代数簇, 有一大批陈类与陈数间等式或不等式关系, 它们都可以通过简单的计算来求得, 甚至自动发现.

我们的方法在所谓 CAGD(computer aided geometric design) 方面也获得了应用. 假设有两个圆柱形管的截面, 要求用某一给定次数的代数曲面形管光滑拼接. 我们可以假定所求代数曲面形管不可约. 而给出其母点所必须满足的条件. 由此得出在可能时这一代数曲面形管的确切形式. 这一方法可推广至三个以至多个管形的拼接甚至极为复杂的情形. 这一方法已在我国数学机械化研究中心以及中国科技大学数学系得到了极大的发展, 前途未可限量.

在我国元代 (1206~1368 年) 朱世杰的《四元玉鉴》(1303 年) 中, 提出了一个解多可达四个未知数的多项式方程组的解法. 由于我国古代进行筹算, 将算筹置于棋盘形算板上计算, 因而朱世杰的算法在三个未知数的情形极难具体实现, 只能应用他的方法解决极简单的几何问题. 但朱世杰所提出的方法与思路实质上适用于任意多未知数与任意多多项式方程的情形. 用现代通用的语言来说, 朱世杰算法的第一步是将牵涉到的未知数排成一个任意特定的次序, 然后将所给方程按一定步骤将未知数按所定次序逐个消去, 由此得到一组井然有序的多项式组, 再依次逐个解出这组已整序后的方程的未知数. 朱世杰方法的计算主要依赖于消去法. 我们依据朱世杰的思路与方法, 得出了任意多项式方程组全部解答的具体形式, 称之为多项式方程组的整序原理与零点分解定理, 并将之推广到微分方程的情形. 这构成了我们所创数学机械化的核心. 它获得了形形色色数学与数学以外多方面的应用, 包括通常几何与微分几何定理的机器证明, 取得了巨大成功.

我获得了 2006 年的邵逸夫数学奖. 诺贝尔奖无数学奖, 不仅为数学界, 也为全世界科技界所诟病. 为此由我国诺贝尔物理奖得主杨振宁教授建议, 香港影视界巨擘邵逸夫先生捐出巨资, 建立了包括数学奖在内为诺贝尔奖所缺的三项奖金. 每年颁发一次, 每奖达 100 万美元, 号称“东方诺贝尔奖”. 其中数学奖首届 2004 年度授予陈省身教授, 奖励他创立整体微分几何与引入陈省身示性类与示性数, 其影响及于数学全部甚至理论物理. 2005 年度的数学奖授予美国的 Wiles 教授, 奖励他彻底解决已有 300 多年难题 Fermat 大定理. 2005 年度的数学奖授予美国 Fields 奖得主、代数几何巨擘 Mumford 教授与我两人. 评奖委员会五人, 除一人为华人外, 其余四人是美国、俄罗斯、日本的 Fields 奖得主与美国数学界的一位领导人. 我得奖的理由据宣布是, 我的数学机械化将为数学的未来发展提供一个新的模式.

事实上, 我们的数学机械化, 在数学作为一种特殊类型的脑力劳动时, 是一种特殊但也较典型的脑力劳动机械化. 过去的工业革命乃是一种体力劳动的机械化. 在当前知识经济的信息时代, 将出现一种新型的工业革命, 它将是一种脑力劳动的机械化. 它将借助于计算机之类的新型工具来实现至少是部分的脑力劳动的机械

化. 数学由于表现形式的简洁、明确与无二义性, 在各种脑力劳动中, 具有实现机械化的优势. 我们在数学机械化方面所取得的成功足以说明这一点. 我们的数学机械化必将成为一种典型, 其发展还正方兴未艾, 而数学机械化所以可能, 归根结底在于消去法与结式等可以机械地进行的构造性运算. van der Waerden 在代数几何方面的奠基性工作, 以及如母点、特定化等基本概念的引入与具体运算, 也正是依赖于这些可以机械地进行的构造性运算.

应该指出, 消去法的发源地乃是我古代中国. 事实上, 早在秦汉时期, 也即公元前 2 世纪左右成书的我国经典著作《九章算术》中, 其第八章方程即详细记载了如何用消去法解线性联立方程组的具体过程. 此后消去法更以多种形式出现于我国各种数学问题解答的计算中, 而于元代朱世杰《四元玉鉴》的著作中集其大成, 这充分说明中国乃是消去法的故乡.

中华民族正处于伟大复兴的时代, 我国的数学自远古以至元代, 在大部分的时间内曾经左右着数学的发展并通过丝绸之路影响西方的文艺复兴以至于微积分的创立. 在这伟大复兴的新时代里, 如何博采诸家之长, 创立具有我国特色的新型数学, 以至于具有我国特色既有深刻理论并能具体计算的新型代数几何, 乃是值得有雄心壮志的中华新秀深入思考的历史性壮举.

是为序.

吴文俊

2007 年 10 月 20 日

第二版序言

来自各方面的呼声要求重新出版我在 1939 年出的那本《引论》. 尽管代数几何的基本概念已经有了根本的更新, 但是人们还是认为, 作为引论, 我的那本书还仍然是非常适合的.

然而, 要提醒当今读者注意的是, 这本书的一些术语与现在通用的不一样. 特别要指出的是, 同一个 "代数流形" 在当时通行的用法中有两种不同的含义, 它们在今天已更好地分别用 "簇"(varietät) 和用 "链"(zykel) 来表示. "簇" 是一个点集, 一个在 Andá Weil 意义下的一 "通用域"(universal körper)①中的代数方程组的解的集合. 我们也可用 "成长型域"(wachsenden körper)(见本书 §4.1) 来代替. 而 "链" 则是维数相同的绝对不可约簇的形式和, 且和中各项系数都是整数 (如平面中计入两次的一条直线).

如果从头至尾都采用这两个概念就要彻底改写全书, 从而将使该书的付梓不知会拖到何时. 由于这个原因, 我决定出一本不加改变的新版. 读者在阅读时每当遇到流形这个概念可以自己思考, 它到底指的是簇还是闭链. 例如, 讲 "线性系" 的那一章 (第 7 章) 谈的就是在 d-维簇上的 d-维闭链, 而在 §5.5 和 §5.6 中, 遇到 "流形 M" 时, 就要把它理解成 "闭链 M".

改正了一些笔误和引证不完全的地方. 此外还增补了两篇附录:

第一篇是我的一篇论文 "论代数几何学 20", (Math. Annalen, 1971, 193(5): 89-108).

第二篇是谈代数几何从 Severi 到 Andá Weil 的发展历史回顾, 它原来是我在 1970 年 Nice 国际数学家会议上的阶段报告, 后来稍加补充发表在 *Archive for History of Science* (1971, 7) 上.

Zürich, 1973 年 2 月

B. L. van der Waerden

① 通用域是基本域 **K** 上一个代数封闭的无限超越阶次 (unendliden transzendenzgrad) 的扩张. 见 *A-Weil, Foundations of Algebraic Geometry* (1st ed. 1946).

第一版序言

在我讲授 Zariski 为“数学成就丛书”所写的那部极有价值的《代数曲面》一书的过程中，产生了写一部代数几何引论的想法. 这样一部引论应该把在经典意义下的代数几何学的所谓“要素”都包括进来，即它应该为每一个更深入的理论提供必要的基础. Geppert 先生准备为该丛书写一部关于代数曲面的书. 他也认为需要一部这样的引论作为他以后写书的依据，这就更加鼓励了我来写本书.

我多次讲授代数曲线和曲面的经验对我撰写本书有很大的好处，我因此能够用到 Deuring 与 Garten 两人所整理的课堂笔记. 此外还从我发表在《数学年刊》上的一系列论代数几何学的论文里采撷了不少材料.

该书材料的选择不是以美学的观点为依据，而是完全以需要还是不需要作标准来决定的. 所有那些的确是属于“要素”之列的材料，我希望它们都已被选进来. 理想子环的理论是我从前研究工作的课题，对于基础来说我认为不是必需的，所以就选了意大利学派有力的方法来代替它. 为了将方法讲述清楚和给问题的提出作好准备，我叙述了许多独立的几何问题，不过我还是注意掌握一定的分寸，否则就会使得该书的篇幅无边无际地扩大起来.

Geppert 教授、Keller 博士、Reichardt 博士和 Schaake 教授帮助我校对并且提出了许多改进的意见，应该向他们致以最大的谢意，插图的底稿是由 Reichardt 博士绘制的，出版社为该书的出版做了无可非议的工作并且好意地接受了我的一些特殊要求，作者感谢他们.

Leipzig 1939 年 2 月

B. L. van der Waerden

目　录

引　言

代数几何学是由在德国高度发展起来的代数曲线和曲面的理论与意大利学派的多维几何学的理论有机结合而产生的，由函数论和代数学加以哺育而长大. 狭义意义上来讲的代数几何学是由 Max Noether 所创始，并通过意大利几何学家 Segre、Severi、Enriques、Castelnuovo 等的工作而发扬光大的. 在我们的时代里，自从拓扑学服务于它以来，代数几何学又进入第二次发扬光大的时期，与之同时也开始了从代数学出发来检讨它的基础的工作. 本书不准备深入到这一基础上. 它的代数基础现在已经是这样完善，以致有可能直接“从上往下”地来描述整个理论. 首先，从一个任意的基本域出发建立起 n 维空间代数流形的理论和单变元代数函数域的理论. 然后，通过特殊化就可分别得到平面代数曲线、空间代数曲线和代数曲面. 至于与函数论和拓扑学的联系，在将基本域选为复数域后就可随之建立起来.

我们不打算采用这种描述方式，而宁愿多走一些路，以历史发展过程作为我们描述的线索，当然，在细节上有所简略和变更. 因此，我们总是尽力做到，在建立一般的概念之前，首先准备好必需的直观材料. 最先引入的是射影空间的初等形体 (线性子空间、二次曲面、有理正规曲线、直射变换、对射变换)，然后是平面代数曲线 (偶尔也略为论及曲面和超曲面)，这之后才是 n 维空间中的流形. 基本域在开始是选复数域，以后再根据需要逐步引入更为一般的基本域，然而也还总是只限于包含全体代数数的域. 我们还尽量做到，用初等工具推进到尽可能远的地方，即使是所得的定理将来可作为更普通定理的特例再一次给出也还是这样. 我可以举三次曲线上点组的初等理论作为这种例子，在这种初等理论中，既没有用到椭圆函数，也没有用到 Noether 基本定理.

这种处理方式的好处是，它能够把从 Plücker, Hesse, Cayley, Cremona 直到 Clebsch 学派这些经典几何学家的美丽的方法和结果充分再现出来. 并且它与函数论方法的联系在曲线理论的一开始就可以建立起来，从而平面代数曲线的分支的概念就可用 Puiseux 级数展开来阐述. 常常会听到责难说，这种方法不是纯粹代数的，对这种责难我们能够很容易地给予回答. 我充分了解，用赋值论能建立一个更美丽和更普通的代数基础. 但是在我看来，首先使初等学者熟悉一下 Puiseux 级数和直观地来看一看代数曲线的奇点，对正确的理解更为一般的理论是极为重要的.

到第 4 章才引入代数流形的一般理论，在这里，分解为不可约流形的方法以及一般点和维数的概念占有核心的地位.

代数流形的一个重要的特殊情形是两个流形间的代数对应，这就是第 5 章所

要讨论的, 不可约对应的一些最简单的定理, 特别是个数守恒原理, 都已经有了许多的应用. 在第 6 章中将由代数对应的概念建立起一般重数的概念, 并将它应用到各种问题中, 特别是相交问题中. 第 7 章讨论线性系的理论纲要, 这一理论是意大利学派在研究代数流形的双有理不变式中所采用方法的基础. 第 8 章讲述 Noether 基本定理, 它的 n 维推广及其各种推论, 其中包括 Brill-Noether 剩余定理. 最后在第 9 章中对平面曲线上的"无穷邻近点"的理论作一简短的讨论.

读者如对 n 维射影几何学 (第 1 章) 和代数的基本概念 (第 2 章) 已有一定程度的熟悉可以直接从第 3 章开始, 也可以直接从第 4 章开始. 第 3 章和第 4 章是相互无关的, 第 5 章及第 6 章主要是以第 4 章为基础的, 只是从第 7 章开始才需要用到全部前面的内容.

第 1 章　n 维空间的射影几何

本章内容仅前七节和 §1.10 是本书今后经常要用到的, 其余的几节只是提供一些不用高等代数工具就能处理的直观材料和简例, 为以后代数流形的一般理论做好准备.

§1.1　射影空间 S_n 及其线性子空间

人们早就在平面和空间的射影几何中发现, 将实点的领域扩充到复点领域是有用处的. 由于射影平面上的实点是由三个不全为零且可乘以任一 $\lambda \neq 0$ 的因子的实齐次坐标 (y_0, y_1, y_2) 所给出, 所以对一个 "复点" 我们也用三个不全为零且可以乘以任一 $\lambda \neq 0$ 的因子的**复数** (y_0, y_1, y_2) 来给出.

复点的概念也可依照 Von Staudt 用纯粹几何的方式来定义[①]. 然而, 把平面上的一个复点直接看成是全体三数组 $(y_0\lambda, y_1\lambda, y_2\lambda)$ 的集合 (这些数组是由任一不等于零的因子 λ 与一不全为零的确定的三元复数组 (y_0, y_1, y_2) 相乘而组成), 这种代数的理解方式要方便得多. 我们就把这个代数的定义作为以下讨论的基础.

一旦人们这样远离了几何直观, 把点看成是纯粹代数的结构, 那么 n 维的推广就没有太大困难了, 我们把一个 **n 维空间的复点**看成为全体 $n+1$ 维数组 $(y_0\lambda, y_1\lambda, \cdots, y_n\lambda)$ 的集合. 这集合里的任一数组都由一 $\lambda \neq 0$ 的因子与一确定的、不全为零的 $n+1$ 维数组 $(y_0, y_1, \cdots, y_n)$ 相乘而组成. 这种点的全体叫做 **n 维复射影空间 S_n**.

我们还可以做更进一步的推广, 即我们可将任一代数学上所谓的**可换体** $\mathbf{K}$ 来代替复数域, 对这个体我们只要求它像复数域一样是代数封闭的, 即每一个在域 $\mathbf{K}$ 中不恒等于一常数的多项式均可完全分解为线性因子. 代数封闭域的例子有代数数域、复数域、k 个未定元的代数函数域. 由所有这些域所导出的射影空间, 它们的性质是这样一致, 以致我们能够把它们统一起来处理.

现在我们把射影空间的概念与矢量空间联系起来, 由域 $\mathbf{K}$ 中的元素所组成的 n 元组 $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 叫做一个**矢量**, 全体矢量的集合叫做 **n 维矢量空间 E_n**. 矢量可以按已知的方式相加、相减或乘以域中的元素. 任意 m 个矢量 $\overset{1}{v}, \cdots, \overset{m}{v}$, 如果由 $\overset{1}{v}\gamma_1 + \cdots + \overset{m}{v}\gamma_m = 0$ 必然会导得 $\gamma_1 = \cdots = \gamma_m = 0$, 就叫做**线性无关**. 整个线性

① 详细的描述可参阅本丛书之一的 Juel G. Vorlesungen über projektive Geometrie. Berlin, 1934.

空间可由任意 n 个线性无关的矢量 $\overset{1}{v},\cdots,\overset{n}{v}$ 张成, 即任一矢量 v 可写成为线性组合 $v=\overset{1}{v}\gamma_1+\cdots+\overset{n}{v}\gamma_n$. 由 m 个线性无关的矢量 $\overset{1}{v},\cdots,\overset{m}{v}(m\leqslant n)$ 所作成的全体线性组合叫做矢量空间 E_n 的 m **维线性子空间**, 维数 m 与基矢量 $\overset{1}{v},\cdots,\overset{m}{v}$ 的选择无关①.

特别地, 一个一维的子空间是由全体矢量 $\overset{1}{v}\lambda$ 所组成, 其中 $\overset{1}{v}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 为一异于零的固定矢量, 根据上述定义可见射影空间 S_n 中的一个点不是别的, 只不过是 E_{n+1} 的一个一维线性子空间 [或者说**射线** (strahl)] 而已. S_n **就是矢量空间 E_{n+1} 中的全体射线组成的集合**.

S_n 的子空间 S_m 现在就可以定义为 E_{n+1} 的子空间 E_{m+1} 中全体射线组成的集合. 这样, 组成 S_m 的点 y 的坐标 $(y_0,y_1,\cdots,y_n)$ 必线性依赖于 $m+1$ 个线性无关点 $\overset{0}{y},\cdots,\overset{m}{y}$ 的坐标, 即

$$y_k=\overset{0}{y}_k\gamma_0+\overset{1}{y}_k\gamma_1+\cdots+\overset{m}{y}_k\gamma_m\quad(k=0,1,\cdots,n).\tag{1.1.1}$$

可将域内的元素 $\gamma_0,\cdots,\gamma_m$ 看成子空间 S_m 的**齐次坐标**(或**参数**), 点 $\overset{0}{y},\cdots,\overset{m}{y}$ 称为这个坐标系的**基点**. 由于这个子空间中的每一个点均由 $m+1$ 个齐次坐标来确定, 这就肯定了我们原来把它表示为 S_m 是恰当的. 我们把一维的子空间叫做**直线**; 二维的叫做**平面**; $(n-1)$ 维的叫做**超平面**.S_0 就是一个点.

式 (1.1.1) 在 $m=n$ 时仍然成立, 此时 S_m 就与全空间 S_n 相重合. 参数 $\gamma_0,\cdots,\gamma_m$ 就是点 y 的新的坐标, 它与旧坐标的联系由变换 (1.1.1) 给出. 现在我们把这变换写成②

$$y_k=\sum\overset{i}{y}_k\gamma_i.$$

由于已假设点 $\overset{0}{y},\cdots,\overset{m}{y}$ 是线性无关的, 所以可以从上述方程解出 γ_i:

$$\gamma_i=\sum\theta_i^k y_k.$$

γ_k 就称为**一般射影坐标**(在平面时为三线坐标; 在空间时为四面体坐标) 在 $(\overset{i}{y}_k)$ 为单位矩阵的特殊情形时, γ_k 就等于原有坐标 y_k.

坐标 $y_0,\cdots,y_n$ 间的 d 个线性无关的齐次线性方程决定 S_n 中的一个 S_{n-d}; 因为我们已知它的解可表为 $n-d+1$ 个线性无关解的线性组合. 特别地, 一个单独的线性方程:

$$u^0y_0+u^1y_1+\cdots+u^ny_n=0\tag{1.1.2}$$

① 证明可参阅 B.L. 范德瓦尔登. 近世代数. 卷 I, §28 或卷 II, §105.

② 此处及以后如对符号 $\sum$ 未做进一步的说明, 即指对其中两次出现的指标 (且一为上标, 另一为下标) 进行求和.

确定一超平面. 称系数 $u^0, u^1, \cdots, u^n$ 为超平面 u 的坐标. 它们只能确定到有一共同因子 $\lambda \neq 0$, 这是因为方程 (1.1.2) 可以乘上任一这样的因子 λ 的缘故.

方程 (1.1.2) 的左面我们以后总用 u_y 或 (uy) 来表示, 即我们令

$$(uy) = u_y = \sum u^i y_i = u^0 y_0 + u^1 y_1 + \cdots + u^n y_n.$$

S_n 中任一线性空间 S_d 均可通过 $n-d$ 个线性无关的线性方程来确定. 因为当 S_d 由点 $\overset{0}{y}, \overset{1}{y}, \cdots, \overset{d}{y}$ 确定时, 则下述 $d+1$ 个线性方程

$$(u\,\overset{0}{y}) = 0, \quad (u\,\overset{1}{y}) = 0, \quad \cdots, \quad (u\,\overset{d}{y}) = 0$$

中的未知量 $u^0, u^1, \cdots, u^n$ 刚好有 $n-d$ 个线性无关解, 每一个这样的解决定一个超平面, 这 $n-d$ 个超平面的交就是一个 S_d, 这个 S_d 包含了点 $\overset{0}{y}, \overset{1}{y}, \cdots, \overset{d}{y}$, 因此必定与原来所给的 S_d 重合.

练　习　1.1

1. n 个线性无关点 $\overset{1}{y}, \cdots, \overset{n}{y}$ 决定一个超平面 u, 试证: 该超平面的坐标 u^v 与矩阵 $(\overset{i}{y}_k)$ 的 n 阶子行列式成比例.

2. n 个线性无关的超平面 $\mu_1, \cdots, \mu_n$ 决定一个点 y, 试证该点的坐标与矩阵 (u_i^k) 的 n 阶子行列式成比例.

3. 由给出空间 S_m 中的基点 $\overset{0}{y}, \cdots, \overset{m}{y}$ 还不足以把任一点的坐标 $\gamma_0, \cdots, \gamma_m$ 唯一决定下来, 因为我们还可将基点的坐标乘上任一不为零的因子 $\lambda_0, \cdots, \lambda_m$. 试证: 只要给定坐标为 $\gamma_0 = 1, \cdots, \gamma_m = 1$ 的 "单位点", 任一点的坐标就可唯一确定到有一共同的因子 $\lambda \neq 0$. 又试问, 单位点可在 S_m 中任意选定吗?

4. 试证: S_m 中的一个 S_{m-1} 可由坐标 $\gamma_0, \cdots, \gamma_m$ 的一个线性方程给出.

5. 试证: 要想由 S_m 中的一组参数 $\gamma_0, \cdots, \gamma_m$ 系转换到同一 S_m 中 (由另一些基点所确定) 另一参数系, 可由一线性参数变换

$$\gamma_i' = \sum \alpha_i^k \gamma_k$$

给出.

§1.2　射影结合定理

由 §1.1 的定义可直接导出下述两个相互对偶的结合定理:

I. S_n 中的 $m+1$ 个点, 如不全位于一 $q < m$ 的 S_q 中, 则决定一个 S_m.

II. S_n 中的 d 个超平面, 如不包含共同的 $q > n-d$ 的 S_q, 则决定一 S_{n-d}.

现在我们来进一步证明:

III. 当 $p+q\geqslant n$ 时, S_n 中的一 S_p 与一 S_q 的交是线性空间 S_d, 其维数 $d\geqslant p+q-n$.

证　因决定 S_p 的线性无关方程有 $n-p$ 个, 决定 S_q 的线性无关的方程有 $n-q$ 个, 总共就有 $2n-p-q$ 个. 如果这些方程式是无关的, 则它们决定一维数为 $n-(2n-p-q)=p+q-n$ 的线性空间; 如果它们是相关的, 则要从其中弃去一些方程, 从而使相交空间的维数增大.

IV. 同时包含 S_d 的 S_p 与 S_q 必定位于一 $m\leqslant p+q-d$ 的 S_m 中.

证　设 S_d 由 $d+1$ 个线性无关点决定. 为了决定 S_p, 我们在此 $d+1$ 个点外再补上 $p-d$ 个点, 从而得到 $p+1$ 个线性无关点. 为了决定 S_q, 我们同样地补上 $q-d$ 个点, 所有这些

$$(d+1)+(p-d)+(q-d)=p+q-d+1$$

个点, 当它们线性无关时, 决定一 S_{p+q-d}, 否则决定一 $m<p+q-d$ 的 S_m, 这样定出的 $S_m(m\leqslant p+q-d)$ 包括所有决定 S_p 与 S_q 的点, 因而也就包含 S_p 与 S_q 本身.

如相交空间 S_d 不存在, 则用同样的论述方式可推得:

V. 一 S_p 与一 S_q 必同时位于一 $m\leqslant p+q+1$ 的 S_m 中.

利用 III 可以将 IV 与 V 进一步加强为:

VI. 一 S_p 与一 S_q, 如其交为 S_d, 则必定同时位于唯一确定的 S_{p+q-d} 中; 如其交为零, 则必定同时位于一唯一确定的 S_{p+q+1} 中.

证　先假设有相交为 S_d, 根据 IVS_p 与 S_q 在某一 $m\leqslant p+q-d$ 的 S_m 中, 另一方面根据 III 有: $d\geqslant p+q-m$, 因而 $m\geqslant p+q-d$.

由此推得 $m=p+q-d$, 如果 S_p 与 S_q 还能包含在另一个 S_m 中, 则这两个 S_m 的交集必也包含 S_p 与 S_q 且有一较小的维数, 根据上述所证明的结果, 这是不可能的.

现在假设它们不相交, 根据 S_p 与 S_q 同时位于一 $m\leqslant p+q+1$ 的 S_m 中. 如果 $m\leqslant p+q$, 则根据 III 它们的交集不为空. 因此, 有 $m=p+q+1$. 和第一种情形完全一样, 还可推得 S_m 为唯一.

由 VI 所确定的空间 S_{p+q-d} 及 S_{p+q+1} 称之为 S_p 与 S_q 的**并联空间** (verbindungsraum).

练　习　1.2

1. 试由 I, II, III, VI 通过特殊化导出平面 S_2, 空间 S_3 与空间 S_4 的结合公理.

2. 将 S_n 的一个子空间 S_m 投影到另一子空间 S'_m 上, 是指将 S_m 的全体点与一固定的 S_{n-m-1} 并联起来, 且使每一点与 S_{n-m-1} 的并联空间 S_{n-m} 总是和 S'_m 相交. 假设 S_{n-m-1}