北京数学会
北京数学培训学校
教学丛书

主　编　赵　桢
副主编　刘来福　张秀平

分册主编　张秀平

高中基础分卷 Ⅰ

北京师范大学出版社
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PRESS

北 京 数 学 会
北京数学培训学校　教学丛书

高中基础分卷 I

主　编　赵　桢
副主编　刘来福　张秀平
分册主编　张秀平
作　者　（按姓氏笔画为序）
王博程　苏效乐　张秀平　张国栋
胡永建　赵维悦　韩乐琴　黎栋材

北京师范大学出版社
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

北京数学会 北京数学培训学校教学丛书 高中基础分卷 I
/赵桢等著. -北京：北京师范大学出版社，2007.9
ISBN 978-7-303-08860-7

Ⅰ.北… Ⅱ.赵… Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料物
Ⅳ.G633.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 147620 号

出版发行：北京师范大学出版社 www.bnup.com.cn
北京新街口外大街 19 号
邮政编码：100875
印　　刷：唐山市润丰印务有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：184 mm×260 mm
印　　张：27.25
字　　数：660 千字
印　　数：1～3 000
版　　次：2007 年 10 月第 1 版
印　　次：2007 年 10 月第 1 次印刷
定　　价：40.00 元

责任编辑：岳昌庆　方　亮　　装帧设计：李　强
责任校对：李　菡　　责任印制：董本刚

序　言

北京数学培训学校是由北京数学会主办的一所课外培养中学生的数学学校（前身是北京数学奥林匹克学校）。1985 年开始建校，是我国成立最早的一所数学奥林匹克学校。二十多年来，该校为北京市培养了一大批数学优秀学生，不仅在全国和国际中学生数学竞赛中获奖，而且在高等学校的“数学建模竞赛”中（和大学生一起参加，评奖标准也完全一致），该校学生也曾多次获得全国（新苗）奖和北京市奖。

在该校学习的学生，即使没有获得竞赛奖，也获得了不少课外数学知识，提高了数学能力（包括解决实际问题的能力），增强了数学素质；这对于参加高考时解决难题和应用题也有不少帮助，从而使很多学生提高了自己的高考分数，考上了理想的大学。因此，该校一直受到学生和家长的欢迎。

二十多年来该校在高中数学教学中积累了丰富的教学经验和教学资料，一直希望能够很好地整理一下，以供教师和学生参考使用（特别是对于新课标的部分选课也将很有参考价值）。本套丛书就是在此基础上由该校任教的部分教师编写的，由北京师范大学出版社出版，目前陆续出版的有高中基础分卷Ⅰ、高中基础分卷Ⅱ、高中应用分卷Ⅰ、高中应用分卷Ⅱ、高中提高分卷和高中建模分卷等。

王梓坤
赵桢

2007 年 9 月 27 日

作者的话

我国自1955年举办高中学生的数学竞赛以来，至今已有52年的历史了。中间虽中断过一个时期，但自1978年恢复竞赛以来，发展更为迅速。尤其是自1985年参加国际数学奥林匹克竞赛(IMO)至今，已经取得了特别辉煌的成绩。

举办数学竞赛的目的主要应该是让更多的人喜欢数学、学好数学，促进数学教学的质量，从中选拔更多的作为我国数学研究和发展的后辈力量。北京数学培训学校多年致力于这方面的研究，在多年教学的基础上，总结出版了这套教材，其特点是注意培养学生的数学思维，对高考、竞赛以及学生将来的数学发展都奠定了很好的基础。

本书第1,2,3,26,27,38,39,50讲由张秀平编写，第4～7讲由王博程编写，第8～13讲由黎栋材编写，第14～18,28～35讲由赵维悦编写，第19～25讲由胡永建编写，第36,37讲由张国栋编写，第40～43讲由韩乐琴编写，第44～49讲由苏效乐编写。本书由方亮逐题验算。

本书中IMO指国际数学奥林匹克竞赛；CMO指中国数学奥林匹克竞赛。

对北京师范大学出版社帮助出版本书，我们表示衷心感谢。

由于时间仓促、水平有限，书中的错误与不妥之处在所难免，深切盼望广大读者提出宝贵意见，以便我们及时修改，使本教材日臻完善。

北京数学培训学校

2007年8月8日

北京数学培训学校情况简介

北京数学培训学校是由北京数学会主办的一所课外培养中学生的数学学校，我们的办学方针是：

1. 丰富学生的课外知识，促进中学数学教学质量的提高，激发学生对数学学习的兴趣；

2. 在德智体全面发展的基础上，及时发现和培养数学尖子学生，使他们有较宽的知识面和较强的分析问题和解决问题（包括实际问题）的能力；

3. 探索数学特长生的培养方法和规律。

我校的办学方式是利用星期日进行业余培训。按照我们自定的教学计划，聘请北京市大、中学校热爱数学普及工作、有丰富教学经验的数学专家和教师担任教学工作。根据学生和家长对教学的意见，不断改进教学，保证教学质量的不断提高。每年都有一批我校学生在全国和北京市各种数学竞赛中获奖。我校应用班的很多学生都参加了北京市高中学生数学知识应用竞赛。根据竞赛要求，参加决赛的学生每人要完成一篇小论文，通过写作论文，学生普遍认为收获很大。这是从选题、调研、提出数学模型、修改数学模型一直到利用计算机编程计算的全过程。这可以说是在进行素质教育。这样的培训工作可以使学生从小就逐步建立起“应用”意识，对适应社会主义市场经济发展将起重要作用。从而，我校为中学数学教学改革也摸索了初步经验。

我校的前身是北京数学奥林匹克学校，1985 年开始建校，是在我国成立最早的一所数学奥林匹克学校，二十多年来培养了一大批数学特长学生。

通过我校培养，北京中学生在全国中学生数学竞赛中成绩很长时间名列前茅。自从全国中学生数学奥林匹克竞赛设立“陈省身杯”以来，北京市的中学生代表队曾多次获得了“陈省身杯”，还曾经连续三次获得了“陈省身杯”，因此将“陈省身杯”保存在北京市教育局。

在参加国际中学生数学奥林匹克竞赛的中国代表队中，曾多次有北京的中学生，并获得了多枚奖牌，为我国争得了荣誉。这些学生毫无例外地都曾经接受过我校和北京数学会组织的培训。

具体获奖的学生名单如下：

1987 年第 28 届国际中学生数学奥林匹克竞赛：北京大学附中　滕峻　获得金牌；北京大学附中　高峡　获得铜牌；

1989 年第 30 届国际中学生数学奥林匹克竞赛：北京人大附中　颜华菲

获得银牌；

1990年第31届国际中学生数学奥林匹克竞赛：北京四中　张朝晖　获得金牌；

1991年第32届国际中学生数学奥林匹克竞赛：北京大学附中　张里钊　获得金牌；北京大学附中　王绍昱　获得金牌；北京大学附中　刘彤威　获得银牌；

1992年第33届国际中学生数学奥林匹克竞赛：北京大学附中　周宏　获得金牌；

1993年第34届国际中学生数学奥林匹克竞赛：北京大学附中　周宏　获得金牌；

1994年第35届国际中学生数学奥林匹克竞赛：北京人大附中　姚健刚　获得金牌；北京大学附中　奚晨海　获得银牌；

1996年第37届国际中学生数学奥林匹克竞赛：北京22中　阎珺　获得金牌；

2001年第42届国际中学生数学奥林匹克竞赛：北京人大附中　肖梁　获得金牌；

2002年第43届国际中学生数学奥林匹克竞赛：清华附中　付云皓　获得金牌；

2003年第44届国际中学生数学奥林匹克竞赛：清华附中　付云皓　获得金牌；

共计：金牌11块；银牌3块；铜牌1块。

目前教育部在高等学校组织的数学竞赛只有“数学建模竞赛”，经竞赛组委会批准，只有我校可以推荐中学生组队（每队3人）参加大学生的“数学建模竞赛”，和大学生一起参加评奖（标准完全一致）。我校学生也曾多次获奖（包括全国奖和北京市奖）。

部分获奖情况如下：（2000年以前获奖资料暂缺）

2000年　北京四中　索岳　皮德义　曾依一　新苗特等奖
北京四中　李卓蒙　韩准　崔燕宁　新苗一等奖
北京师范大学第二附属中学　戴熹　王昕　李森　新苗一等奖
北京50中　丁杰　孙喜龙　高鹏远　新苗二等奖
北京师范大学第二附属中学　康健　谢安平　孙琦　新苗二等奖
组合队　郭婷婷（北京13中）　张韬（北京13中）
李璋　（北京四中）　新苗二等奖

2001年　北京十一学校　李煦　黄雄韬　郭枫　新苗一等奖
北京15中　赵晨　乐晨　王辉　新苗二等奖

2002 年　北京大学附中　刘熹　谭思睿　周栋　新苗一等奖

北京师范大学第二附属中学　任昊宇　薛飞　孙文昊　新苗一等奖

2003 年　北京汇文中学　王超　耿华　王业竑　新苗一等奖

北京四中　钱珑　邹箐箐　张品超　新苗一等奖

2004 年　北京 15 中　付潇鹏　鲁黎阳　张强　新苗特等奖

北京 15 中　税梁宇　洪拓　戴洋　新苗一等奖

北京 15 中　王阳　侯天逸　朱达　新苗二等奖

北京 15 中　许辰　任冠宇　刘博浩　新苗二等奖

2005 年　北京师范大学实验中学　何子淮　张弢　沈熹　新苗二等奖

共计：新苗特等奖 2 队，新苗一等奖 8 队，新苗二等奖 7 队，获奖学生 51 人。

1985 年我校成立时，第一任校长是梅向明教授（时任北京数学会副理事长、北京师范学院教授），名誉校长是江泽涵教授（时任北京数学会理事长、北京大学教授）。后来因为北京数学会改选和梅先生从政，1989 年开始由北京师范大学数学系赵桢教授担任校长（时任北京数学会副理事长、北京师范大学教授）。数学学校的校址也由北京师范学院转到了北京师范大学，江泽涵教授仍任名誉校长一直到江先生去世。2005 年 10 月北京师范大学数学科学学院刘来福教授担任校长（时任北京数学会副理事长、北京师范大学教授），赵桢教授任名誉校长。

为了加强我校和中学之间的沟通，督促和改进我校的教学工作，2005 年暑假前我校还成立了教学指导委员会，聘请一些北京市重点中学的校长、数学教研组长、特级教师等作为委员，由赵桢担任主任，刘来福、明知白担任副主任。已经开过几次例会，另外还与北京师范大学数学科学学院，北京数学会共同组织了北京市在职中学教师参加的数学教学改革座谈会（第一次座谈会已经于 2006 年 10 月在北京师范大学召开，参加座谈会的中学教师大约有 70 人），这样可以使我校的教学更好地适应中学数学教学改革的需要。

20 多年来，我校在高中教学中积累了丰富的教学经验和教学资料，一直想很好地整理一下，以供教师和学生们使用。现在这套“北京数学会北京数学培训学校教学丛书”正是在我校多年教学经验的基础上整理出版的，我们希望它对于高中学生提高数学能力和数学素质能起到积极的作用，对于同学们参加数学竞赛、数学知识应用竞赛以及解决高考中的数学难题及应用题都会起很好的作用。

北京数学培训学校

2007 年 9 月

CONTENT

目录

CONTENTS

第 1 讲　集合运算

一、基本知识与性质

1. 集合的相等是等价关系，即

(1)$A=A$；

(2)$A=B\Rightarrow B=A$；

(3)$A=B,B=C\Rightarrow A=C$.

2. 关于集合的包含关系有下面的性质：

(1)$A\subseteq A$；

(2)$A\subseteq B,B\subseteq A\Rightarrow A=B$；

(3)$A\subseteq B,B\subseteq C\Rightarrow A\subseteq C$.

3. 关于集合的交与并有下面的性质：

(1)等幂律：$A\cup A=A,A\cap A=A$；

(2)交换律：$A\cup B=B\cup A,A\cap B=B\cap A$；

(3)结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

(4)分配律：$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

以上性质都可以通过文氏图来理解记忆.下面结合包含关系的性质(2)给出(4)中第一式的证明，这个证明代表了证明集合相等的一般方法.

$$
\begin{aligned}
&x\in(A\cup B)\cap C\Rightarrow x\in A\cup B\text{ 且 }x\in C\\
&\Rightarrow x\in A\text{ 或 }x\in B\text{，且 }x\in C\\
&\Rightarrow x\in A\text{ 且 }x\in C\text{，或者，}x\in B\text{ 且 }x\in C\\
&\Rightarrow x\in A\cap C\text{ 或 }x\in B\cap C\\
&\Rightarrow x\in(A\cap C)\cup(B\cap C),
\end{aligned}
$$

从而$(A\cup B)\cap C\subseteq(A\cap C)\cup(B\cap C)$. 又因为上述过程都是可逆的，故$(A\cap C)\cup(B\cap C)\subseteq(A\cup B)\cap C$，从而$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$.

4. 集合的补集有下面的性质：我们仍采用传统的简洁的符号，用 I 表示全集，用 $\overline{A}$ 表示现用的符号 $\complement_I A$，A 在 I 中的补集，则：

(1)$\overline{I}=\varnothing,\overline{\varnothing}=I$；

(2)$\overline{\overline{A}}=A$；

(3)$A\cup\overline{A}=I,A\cap\overline{A}=\varnothing$；

(4)$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.（摩根律）

二、例题

例 1　设全集 $I=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbf{R}\}$，集合 $M=\left\{(x,y)\mid\dfrac{y-3}{x-2}=1\right\}$，$N=\{(x,y)\mid y\neq x+1\}$，那么$\overline{M\cup N}=$(　　).

A. $\varnothing$　　B. $\{(2,3)\}$

C. $(2,3)$　　D. $\{(x,y)\mid y=x+1\}$

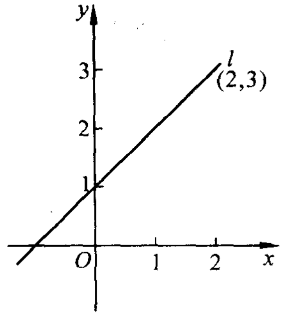

图 1-1

解　由 $\frac{y-3}{x-2}=1$ 得 $y=x+1(x\neq 2)$.

易求得 $\overline{M}=\{(x,y)\mid y\neq x+1\}\cup\{(2,3)\}$,

$\overline{N}=\{(x,y)\mid y=x+1\}$. 因此:

$$\overline{M\cup N}=\overline{M}\cap\overline{N}=\{(2,3)\}.$$

所以选 B. 如图 1-1

注　选项 C 不符合集合的表示方法.

例 2　设全集为 $\mathbf{R}$, $f(x)=\sin x$, $g(x)=\cos x$, $M=\{x\mid f(x)\neq 0\}$, $N=\{x\mid g(x)\neq 0\}$,那么集合 $\{x\mid f(x)g(x)=0\}$ 等于(　　).

A. $\overline{M}\cap\overline{N}$　　B. $\overline{M}\cup N$

C. $M\cup\overline{N}$　　D. $\overline{M}\cup\overline{N}$

解　注意到 $f(x)g(x)=0$ 当且仅当 $f(x)=0$ 或 $g(x)=0$,于是由集合的性质得

$$\{x\mid f(x)g(x)=0\}=\{x\mid f(x)=0\}\cup\{x\mid g(x)=0\},$$

而后面两个集合分别为 M,N 的补集,所以选 D.

注　千万不要受骗,本题与 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的表达式没有关系.

例 3　设含有 10 个元素的集合的子集数为 S,其中由 3 个元素组成的子集数为 T,则 $\frac{T}{S}=$________.

解　$S=2^{10}$, $T=C_{10}^{3}=120$,故 $\frac{T}{S}=\frac{120}{2^{10}}=\frac{15}{128}$.

注　本题是某年的高考题,其实是考查下面的两个基本结论:

(1)n 元集合的所有子集的个数为 2^n;

(2)n 元集合的 m 元子集有 C_n^m 个.

例 4　已知集合 $A=\{1,2,3,\cdots,10\}$,集合 $B=\{1,3,5,7,9\}$,则满足 $B\subsetneqq C\subsetneqq A$ 的集合 C 的个数是多少?

解　本题 C 的个数就是 $A-B$ 的子集的个数. 由 $A-B=\{2,4,6,8,10\}$,可得 $A-B$ 的子集的个数为 $2^5=32$,但要注意须去掉 A,B 两个集合,故所求集合 C 的个数为 $32-2=30$.

例 5　设全集 $I=\{1,3,5,\cdots,19\}$, $A\cap\overline{B}=\{3,7,15\}$, $\overline{A}\cap B=\{13,17,19\}$,又 $\overline{A}\cap\overline{B}=\varnothing$,求 $\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}$.

解　由 $\overline{A}\cup\overline{B}=\varnothing$ 及 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$,得 $\overline{A\cup B}=\varnothing$,从而 $A\cup B=I$. 于是

$$\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}=\overline{\overline{A}}\cap\overline{\overline{B}}=A\cap B=\{1,5,9,11\}.$$ 如图 1-2.

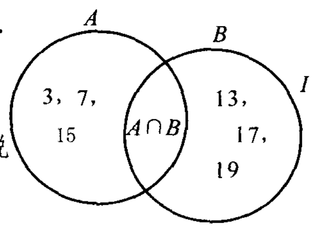

图 1-2

注　本题要充分利用摩根律,然后用文氏图即可求解. 严格说来,我们要用到下面的集合关系式:若 $A\cup B=I$,则:

$$A\cap B=I-(A\cap\overline{B})-(\overline{A}\cap B).$$

这一等式可用双包含的关系证明.

例 6　若集合 $M=\{x\mid x=a^2+1, a\in\mathbf{N}^*\}$, $P=\{y\mid y=b^2-4b+5, b\in\mathbf{N}^*\}$,求证: $M\subsetneqq P$.

证明　我们证明 $\forall x\in M$,都有 $x\in P$,且 P 中至少有一个元素 $y\notin M$.

$\forall x\in M$，$\exists a\in\mathbf{N}^*$，使得 $x=a^2+1$，令 $b=a+2$，则 $b\in\mathbf{N}^*$，且 $x=(b-2)^2+1=b^2-4b+5\in P$.

取 $b=2$，则 $y=4-8+5=1\in P$，但 $\forall x\in M$，都有 $x=a^2+1>1$，故 $y\notin M$.

综上所述，我们证得 $M\subsetneqq P$.

例 7　设集合 $M=\{u\mid u=12m+8n+4l,m,n,l\in\mathbf{Z}\}$，$N=\{v\mid v=20p+16q+12r,p,q,r\in\mathbf{Z}\}$，求证 $M=N$.

证明　我们只需证明这样的两组数可以互相表示. 注意到系数有一公因子 4，故只需证明 $3m+2n+l$ 与 $5p+4q+3r$ 可以互相表示即可.

任给 $5p+4q+3r$，任取 $m,n\in\mathbf{Z}$，只需令 $l=5p+4q+3r-3m-3n$，即得 N 中的数可由 M 中的数表示.

任给 $3m+2n+l$，取 $r=m$，$p=-6n-3l$，$q=8n+4l$，则 $5p+4q+3r=3m+2n+l$，从而 $M\subseteq N$.

由以上两条可得 $M=N$.

注　由 5 与 4 互质，可得存在 $x,y\in\mathbf{Z}$，使得 $5x+4y=1$，于是 $5x(2n+l)+4y(2n+l)=2n+l$. 于是我们只要找到 x,y(本题取 $x=-3,y=4$)，那么取 $p=x(2n+l)$，$q=y(2n+l)$ 即可得到要求的解.

例 8　已知 $A=\{x\mid x^3-px^2+\pi x=0\}$，$B=\{x\mid x^3-(e+i)x^2+qx=0\}$，且 $A\cup B=\{0,1,i,\pi,e\}$，求 p,q,A,B.

解　显然 $0\in A$，$0\in B$. 设 A 的三个元素为 $0,a_1,a_2$，B 的三个元素分别为 $0,b_1,b_2$，则：

$$\begin{cases}p=a_1+a_2,\\ \pi=a_1a_2,\end{cases}\quad\text{且}\quad\begin{cases}e+i=b_1+b_2,\\ q=b_1b_2.\end{cases}$$

又由 $\{a_1,a_2,b_1,b_2\}=\{1,i,\pi,e\}$ 得 $\{a_1,a_2\}=\{1,\pi\}$，$\{b_1,b_2\}=\{e,i\}$，$q=ei$，即

$$p=1+\pi,\quad q=e\,i,\quad A=\{0,1,\pi\},\quad B=\{0,e,i\}.$$

注　解决集合的元素问题的时候，有时不需要知道具体元素是什么，只要搞清楚它们之间的关系就行了.

例 9　已知 $A=\left\{x\,\middle|\,\left|x-\frac{(a+1)^2}{2}\right|\leqslant\frac{(a-1)^2}{2},x\in\mathbf{R}\right\}$，$B=\{x\mid x^2-3(a+1)x+2(3a+1)\leqslant 0,x\in\mathbf{R}\}$. 若 $A\subseteq B$，求 a 的取值范围.

解　$\left|x-\frac{(a+1)^2}{2}\right|\leqslant\frac{(a-1)^2}{2}\Leftrightarrow\frac{(a+1)^2}{2}-\frac{(a-1)^2}{2}\leqslant x\leqslant\frac{(a+1)^2}{2}+\frac{(a-1)^2}{2}$

$\Leftrightarrow 2a\leqslant x\leqslant a^2+1$.

于是 $A=\{x\mid 2a\leqslant x\leqslant a^2+1\}$，$B=\{x\mid (x-2)(x-3a-1)\leqslant 0\}$.

由条件 $A\subseteq B$ 知：

(1) 当 $2\leqslant 3a+1$，即 $a\geqslant\frac{1}{3}$ 时，有 $2\leqslant 2a\leqslant a^2+1\leqslant 3a+1$，解之得 $1\leqslant a\leqslant 3$.

(2) 当 $2>3a+1$，即 $a<\frac{1}{3}$ 时，有 $3a+1\leqslant 2a\leqslant a^2+1\leqslant 2$，解之得 $a=-1$.

于是，使 $A\subseteq B$ 的 a 的范围是 $1\leqslant a\leqslant 3$ 或 $a=-1$.

例 10　已知 $A=\{x\mid x^3+2x^2-x-2>0\}$，$B=\{x\mid x^2+ax+b<0\}$，且 $A\cup B=\{x\mid x+2>0\}$，$A\cap B=\{x\mid 1<x\leqslant 3\}$，求 a,b 的值.

解　$x^3+2x^2-x-2>0 \Leftrightarrow (x+2)(x-1)(x+1)>0 \Leftrightarrow -2<x<-1$ 或 $x>1$，
于是 $A=\{x \mid -2<x<-1$ 或 $x>1\}$.

设 $B=\{x \mid \alpha \leqslant x \leqslant \beta\}$，由 $A \cup B=\{x \mid x>-2\}$ 得 $-2<\alpha \leqslant -1,\quad \beta \geqslant 1$.
由 $A \cap B=\{x \mid 1<x \leqslant 3\}$ 得　　$\alpha \geqslant -1,\quad \beta=3$.
解之得 $\alpha=-1, \beta=3$，于是　　$a=-(\alpha+\beta)=-2, b=\alpha\beta=-3$.

注　由上面两例我们发现对集合性质的讨论十分重要. 当两个集合作比较时，把集合元素明确化会给解题带来极大方便.

例 11　设 a,b 是两个实数，$A=\{(x,y) \mid x=n, y=na+b, n \in \mathbf{Z}\}$，$B=\{(x,y) \mid x=m, y=3m^2+15, m \in \mathbf{Z}\}$，$C=\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant 144$ 是平面 xOy 内的点集$\}$，问是否存在 a,b 使得：

(1)$A \cap B \neq \varnothing$；　　　　(2)$(a,b) \in C$

同时成立.

解　由条件(1)知存在 $x \in \mathbf{Z}$，使得 $ax+b=3x^2+15$，
于是其判别式 $\Delta=a^2-4 \times 3 \times (15-b)=a^2+12b-180 \geqslant 0$.

注意到 $(a,b) \in C$ 时，$a^2+b^2 \leqslant 144$，则 (a,b) 在圆 $x^2+y^2=144$ 内部且在 $x^2+12y-180=0$ 上方. 为了确定这样的点的个数，先解下列方程组：

$$\begin{cases} x^2+y^2=144, \\ x^2+12y-180=0. \end{cases}$$

解之得 $y=6, x=\pm 6\sqrt{3}$，于是

$$\begin{cases} a=6\sqrt{3}, \\ b=6, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} a=-6\sqrt{3}, \\ b=6. \end{cases}$$

若 $a=6\sqrt{3}, b=6$，则 $6\sqrt{3}x+6=3x^2+15$ 无整数解；若 $a=-6\sqrt{3}, b=6$，$-6\sqrt{3}x+6=3x^2+15$ 仍无整数解. 因此同时满足题目两个条件的 a,b 是不存在的.

加　强　内　容

例 12　已知 $f(x)=ax^2+b$，$a,b,x \in \mathbf{R}$，$A=\{x \mid f(x)=x\}$，$B=\{x \mid f(f(x))=x\}$.

(1)求证：$A \subseteq B$.

(2)当 A,B 都非空时，求 a^2+b^2 的取值范围.

解　(1)任取 $x \in A$，都有 $f(x)=x$，于是 $f(f(x))=f(x)=x$，
于是 $x \in B$，从而 $A \subseteq B$.

(2)注意到(1)的结论，A,B 都非空等价于 A 非空. 由此条件知 $ax^2+b=x$ 有解，因此

$$\Delta_1=1-4ab \geqslant 0 \Rightarrow ab \leqslant \frac{1}{4}.$$

若 $x \in A$，即 $ax^2+b=x$，则

$$a(ax^2+b)^2+b=x \Rightarrow (ax^2-x+b)(cx^2+dx+e)=0.$$

待定系数可求得 $c=a^2, d=a, e=ab+1$，即：$(ax^2-x+b)(a^2x^2+ax+ab+1)=0$.

若 $a^2x^2+ax+ab+1=0$ 无实根，则 $A=B$，此时

$$\Delta_2=a^2-4a^2(ab+1)<0 \Rightarrow ab>-\frac{3}{4}.$$

即 $ab\in\left(-\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right]$,此时显然有 $a^2+b^2\in[0,+\infty)$.

若 $a^2x^2+ax+ab+1=0$ 有实根,则 $a^2-4a^2(ab+1)\geqslant 0\Rightarrow ab\leqslant -\frac{3}{4}$,

此时 A 有两个元素 $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1-4ab}}{2a}$,且 $x_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{-4ab-3}}{2a}$ 也在 B 中.

若 $A=B$,则

$$\frac{1+\sqrt{1-4ab}}{2a}=\frac{-1+\sqrt{-4ab-3}}{2a}, \tag{1}$$

$$\text{或}\quad \frac{1-\sqrt{1-4ab}}{2a}=\frac{-1-\sqrt{-4ab-3}}{2a}, \tag{2}$$

$$\text{或}\quad \frac{1-\sqrt{1-4ab}}{2a}=\frac{-1+\sqrt{-4ab-3}}{2a}. \tag{3}$$

得(1)无解,(2)(3)的解均为 $ab=-\frac{3}{4}$,于是当 $A=B$ 时,

$$a^2+b^2=a^2+\frac{9}{16a^2}\geqslant 2\sqrt{a^2\cdot\frac{9}{16a^2}}=\frac{3}{2}.$$

当 $A\subsetneqq B$ 时,$ab<-\frac{3}{4}$,从而 $\qquad a^2+b^2\geqslant 2|ab|>\frac{3}{2}$.

综上所述:当 $A=B$ 时,若 $f(f(x))=x$ 有虚根,则 $a^2+b^2\in[0,+\infty)$;若 $f(f(x))=x$ 无虚根,则 $a^2+b^2\in\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$. 当 $A\subset B$ 时,$a^2+b^2\in\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$.

例 13 设集合 $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$,$B=\{a_1^2,a_2^2,a_3^2,a_4^2,a_5^2\}$,其中 $a_i\in\mathbf{N}^*$,$a_i<a_{i+1}(i=1,2,3,4,5)$. 又知 $A\cap B=\{a_1,a_4\}$,$a_1+a_4=10$,且 $A\cup B$ 的元素和为 224,求 A.

解 由 $a_1\leqslant a_1^2<a_2^2<a_3^2<a_4^2<a_5^2$ 及 $a_1\in B$ 得 $a_1=a_1^2$,于是 $a_1=1$. 从而由 $a_1+a_4=10$ 知 $a_4=9$.

由 $A\cup B$ 的元素和为 224 得:$1+a_2+a_3+9+a_5+a_2^2+a_3^2+81+a_5^2=224+9$.

由 $a_5>a_4$ 知 $a_5\geqslant 10$,由上式知 $a_5^2<142<144=12^2$. 从而 $a_5<12$,于是 $a_5=10$ 或 11.

若 $a_5=11$,则 $a_2+a_3+a_2^2+a_3^2=10$,但 $a_2\geqslant 2$,$a_3\geqslant 3$,故 $a_2+a_3+a_2^2+a_3^2\geqslant 2+3+4+9=18$,矛盾! 于是 $a_5=10$,此时 $a_1=1$,$a_4=9$,$a_5=10$,$a_2+a_3+a_2^2+a_3^2=32$.

由 $a_4=9$ 知 a_2^2,a_3^2 中有一个为 9,即 a_2,a_3 中有一个为 3.

若 $a_3=3$,则 $a_2=2$,此时 $a_2+a_3+a_2^2+a_3^2=2+3+4+9=18\neq 32$,矛盾! 故 $a_2=3$,从而

$$3+a_3+9+a_3^2=32\Rightarrow a_3=4.$$

于是 $A=\{1,3,4,9,10\}$.

例 14 在坐标平面上,纵横坐标都是整数的点叫做整点. 我们用 I 表示所有直线的集合,M 表示恰好通过一个整点的直线的集合,N 表示不通过任何整点的直线的集合,P 表示通过无穷多个整点的直线的集合. 那么表达式

(1) $M\cup N\cup P>I$; (2) $N\neq\varnothing$;

(3) $M\neq\varnothing$; (4) $P\neq\varnothing$

中,正确的表达式的个数是多少?

解 设 k 是无理数,则直线 $y=kx$ 上只有一个整点 $(0,0)$,故 $M\neq\varnothing$,所以(3)成立.

又 $y=x+\frac{1}{2}$ 上没有整点，故 $N\neq\varnothing$，(2)成立.

$y=x$ 上有无穷多个整点，故(4)也成立.

下面证明(1)也成立. 事实上，我们只需证明：若直线 l 上有两个整点，则 l 上必有无穷多个整点.

设整点 (a,b)，(c,d) 在直线 $y=kx+s$ 上，则 $k=\frac{b-d}{a-c}$，且 $\frac{b-d}{a-c}a+s$ 是整数. 取 $x=a+n(a-c)$，$n\in\mathbf{Z}$，则

$$y=\frac{b-d}{a-c}a+n+s\quad\in\mathbf{Z},$$

即此直线上有无穷多个整点.

例 15　证明：任意十个两位正整数组成的集合中，必存在两个不相交的子集，它们的各自元素之和相等.

分析　注意到十个数的非空子集共有 $2^{10}-1=1\ 023$ 个，而每个子集中元素之和小于 $10\times100=1\ 000$，因此可用抽屉原则解决问题.

解　十个数的非空子集共有 $2^{10}-1=1\ 023$ 个，每个子集的元素之和小于 $1\ 000$，故至少有两个不同子集的元素之和相等，记为 A，B. 令

$$M=A-B,\quad N=B-A,$$

则 $M\cap N=\varnothing$，且它们的元素之和也相等.

例 16　设全体正整数集可以分割成 r 个互不相交的子集 $A_1,A_2,\cdots,A_r$，即：

$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_r=\mathbf{N}^*,\quad A_i\cap A_j=\varnothing(i\neq j).$$

求证：必有一个子集 A_i 具有下面性质 P：存在一个正整数 m，使得对任意 $k\in\mathbf{N}_+$，总能在 A_i 中找到 k 个元素 $a_1,a_2,\cdots,a_k$，满足：

$$0<a_{j+1}-a_j\leqslant m\quad(1\leqslant j\leqslant k-1).$$

证明　对于 $A_1,A_2,\cdots,A_r$，若 A_1 不具有性质 P，即对于任意的正整数 m，总存在正整数 k，使得任意的 $a_1^{(1)}<a_2^{(1)}<\cdots<a_k^{(1)}\in A_1$，总有“间隙”可以放进 m 个连续整数(即 $a_{j+1}^{(1)}-a_j^{(1)}>m$). 于是，$A_1$ 的补集 $A_2\cup A_3\cup\cdots\cup A_r$ 中必包含任意长的连续整数序列.

下列用数学归纳法证明. 假设对于正整数 $i(i<r)$，$A_i\cup A_{i+1}\cup\cdots\cup A_r$ 包含任意长的连续整数序列. 若 A_i 不具有性质 P，则对于任意正整数 m，总存在正整数 k_m，使得任意 k_m 个数 $a_1^{(i)}<a_2^{(i)}<\cdots<a_{k_m}^{(i)}\in A$，有“间隙”可以放进 m 个连续正整数.

设 $p_m=mk_m$，取 $A_i\cup A_{i+1}\cup\cdots\cup A_r$ 中任意 p_m 个连续整数(由归纳假设知这样的 p_m 个数是存在的)，则下列两种情况必居其一：

(1) p_m 个数中至多有 k_m-1 个数属于 A_i，则这 p_m 个数(每 m 个连续整数为一组，共有 k_m 组)中至少有一组全不属于 A_i，则 $A_{i+1}\cup A_{i+2}\cup\cdots\cup A_r$ 中必包含长为 m 的连续整数序列；

(2) p_m 个数中有 k_m 个数 $a_1^{(i)}<a_2^{(i)}<\cdots<a_{k_m}^{(i)}$ 属于 A_i，则由已得结果，必有一个“间隙”包含 m 个连续整数，因此，对任意的 m，$A_{i+1}\cup A_{i+2}\cup\cdots\cup A_r$ 中必包含长为 m 的连续整数序列.

于是，若子集 $A_1,A_2,\cdots,A_{r-1}$ 中没有一个具有性质 P，则 A_r 中必包含任意长的连续整数序列，这时 A_r 就具有性质 P.

例 17　对集合 $A=\{1,2,\cdots,n\}$ 及其每一个非空子集，定义一个唯一确定的“交替和”如下：按照递减的次序重新排列该子集，然后从最大的数开始，交替地减或加后继的数所得的结

果. 例如,集合$\{1,2,4,7,10\}$的交替和为$10-7+4-2+1=6$,集合$\{7,10\}$的交替和为$10-7=3$,集合$\{5\}$的交替和为5. 试求A的所有子集的交替和的总和.

分析 A的非空子集有2^n-1个,不可能求出所有子集的交替和再相加. 为了找到此问题的一般规律,我们以$A=\{1,2,3,4\}$为例具体计算一下:

$\{1,2,3,4\}$	$4-3+2-1$	$\{1,4\}$	$4-1$
$\{1,2,3\}$	$3-2+1$	$\{1\}$	1
$\{1,2,4\}$	$4-2+1$	$\{2,4\}$	$4-2$
$\{1,2\}$	$2-1$	$\{2\}$	2
$\{1,3,4\}$	$4-3+1$	$\{3,4\}$	$4-3$
$\{1,3\}$	$3-1$	$\{3\}$	3
$\{2,3,4\}$	$4-3+2$	$\{4\}$	4
$\{2,3\}$	$3-2$		

除集合$\{4\}$外,其他的A的非空子集含4与不含4的个数相等,且不含4的集合与填上4的集合的交替和的和为4,故所有交替和的和为$7\times4+4=32$. 事实上,如果加上集合$\varnothing$与$\{4\}$配成一对,则这个和为$4\times8=4\times2^3$. 于是,我们可以猜测,所求的和为$n\cdot2^{n-1}$.

解 补充定义空集的交替和为0. 令集合$B=\{1,2,\cdots,n-1\}$. B的子集(也是A的子集)有2^{n-1}个. 每个子集添加元素n后与原来的B的子集一起构成了A的所有子集,且B的子集C与$C\cup\{n\}$的交替和的和为n. 这样的子集有2^{n-1}对,因此,所求的和为$n\cdot2^{n-1}$.

三、习题

1. 已知集合A与集合B各有12个元素,$A\cap B$含4个元素,试求同时满足下列两个条件的集合C的个数:(1)$C\subset A\cup B$,且C中含有3个元素;(2)$C\cap A\neq\varnothing$.

2. 集合$P=\{a,b,c\}$是集合$M=\{1,2,3,\cdots,24\}$的三元子集,且$a+b+c$是3的倍数,则集合P有多少个?

3. 集合$A=\{0,1,2,\cdots,9\}$,$B_1,B_2,\cdots,B_k$都是A的子集,且满足$B_i\cap B_j(i\neq j)$至多有两个元素,求k的最大值.

4. 设$S=\{1,2,\cdots,n\}$,A为至少含有两项的、公差为正的等差数列,其项都在S中,且添加S的其他元素于A后均不能构成与A有相同公差的等差数列,求这种A的个数.(只有两项的数列也看成等差数列)

5. 给定正整数$n\geqslant3$,令S是集合$\{2,3,\cdots,n\}$的所有非空子集组成的集合,对每一个$S_i\in S$,$i=1,2,\cdots,2^{n-1}-1$,令P_i是S_i中所有元素的乘积,求$P_1+P_2+\cdots+P_{2^{n-1}-1}$.

6. 设$n\in\mathbf{N}$,$n\geqslant15$,A,B都是集合$M=\{1,2,\cdots,n\}$的真子集,$A\cap B=\varnothing$,且$M=A\cup B$,证明:A或B中必有两个不同数的和为完全平方数.

7. 证明:任何一个有限集合的全部子集可以排成一列,使每两个相邻的子集仅相差一个元素.