


中国科学院考研指定参考书

中国科学技术大学数学教学丛书

数理统计

韦来生 编著

 科学出版社
www.sciencep.com

中国科学技术大学数学教学丛书

数理统计

韦来生 编著



科学出版社

定价：38.00元

北京

内 容 简 介

本书是数理统计学专业的基础课教材. 内容包括绪论、抽样分布及若干预备知识、点估计、区间估计、参数假设检验、非参数假设检验、Bayes 方法和统计决策理论等 7 章, 各章都配备了习题.

本书可作为综合性大学、理工科院校和师范院校概率论与数理统计(简称概统)专业本科生的“数理统计”课的教材或参考书. 适当删除书中标“*”的章节, 可作为上述相关院校数学系非概率统计专业本科生的“数理统计”教材或参考书. 具备微积分、矩阵代数及概率论基本知识的读者皆可使用本书. 本书也可作为相关院校研究生、青年教师以及从事统计工作的工程技术人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

数理统计/韦来生编著. —北京: 科学出版社, 2008

(中国科学技术大学数学教学丛书)

ISBN 978-7-03-021765-3

I. 数… II. 韦… III. 数理统计-高等学校-教学参考资料 IV. O212

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008) 第 058522 号

责任编辑: 姚莉丽 / 责任校对: 邹慧卿

责任印制: 张克忠 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

骏杰印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2008 年 7 月第 一 版 开本: B5(720×1000)

2008 年 7 月第一次印刷 印张: 23

印数: 1—3 500

字数: 437 000

定价: 35.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈环伟〉)

《中国科学技术大学数学教学丛书》编委会

主 编 程 艺

顾 问 (按汉语拼音排序)

陈希孺 方兆本 冯克勤 龚 昇 李翊神

石钟慈 史济怀

编 委 陈发来 陈 卿 陈祖墀 侯定丕 胡 森

蒋继发 李尚志 林 鹏 刘儒勋 刘太顺

缪柏其 苏 淳 吴耀华 徐俊明 叶向东

章 璞 赵林城

常用符号及缩写

\mathcal{X}	样本空间
θ	参数空间
$N(a, \sigma^2)$	均值为 a , 方差为 σ^2 的正态 (normal) 分布
$\Phi(\cdot)$	标准正态分布函数
$b(1, p)$	成功概率为 p 的两点分布 (也称 Bernoulli 分布)
$b(n, p)$	参数为 n, p 的二项 (binomial) 分布
$M(N, p_1, \dots, p_r)$	参数为 N, p_1, \dots, p_r 的多项 (multinomial) 分布
$P(\lambda)$	参数为 λ 的泊松 (Poisson) 分布
$U(a, b)$	区间 $[a, b]$ 上的均匀 (uniform) 分布
$Be(a, b)$	参数为 a, b 的贝塔 (Beta) 分布
$\Gamma(\gamma, \lambda)$	形状参数为 γ , 刻度参数为 λ 的伽玛 (Gamma) 分布
$\text{Exp}(\lambda)$	参数为 λ 的指数 (exponential) 分布
u_α	标准正态分布的上侧 α 分位数
$\chi_n^2, \chi_n^2(\alpha)$	自由度为 n 的卡方 (Chi-square) 分布及其上侧 α 分位数
$t_n, t_n(\alpha)$	自由度为 n 的 t 分布及其上侧 α 分位数
$F_{m,n}, F_{m,n}(\alpha)$	自由度分别为 m, n 的 F 分布及其上侧 α 分位数
R_n	n 维欧几里得空间
\mathbf{X}	由若干个随机变量作为分量构成的随机向量
\mathbf{x}	随机向量 \mathbf{X} 的观测值
$E(Y)$	随机变量 Y 的均值
$D(Y)$	随机变量 Y 的方差
$I_{[A]}(x), I_{[A]}$	示性函数, 表示当 $x \in A$ (或 A 发生) 函数值为 1, 否则为 0
r.v.	随机变量
i.i.d.	相互独立相同分布
MLE	极大似然估计
UMVUE	一致最小方差无偏估计
UMPT	一致最优 (功效) 检验
MSE	均方误差

前 言

作者在 20 世纪 80 年代初给中国科学技术大学数学系 81 级数理统计专业讲授“数理统计”课,当时没有合适的教材,就自编了讲稿,学生记笔记.在给数学系 83 级、84 级讲授“数理统计”课时对讲稿进行了充实和完善,并编印了一本习题集.1988 年,陈希孺院士等编写出版了《数理统计学教程》(以下简称《教程》).1990 年后,《教程》作为中国科学技术大学概率论与数理统计专业“数理统计”课的教材.《教程》的特点是统计理论严谨,对统计思想和统计问题的背景等阐述清楚了.作者在教学实践中充分发扬了《教程》的特色,结合过去的讲稿对教学内容作了适当的增补和调整,教学效果良好.本书稿就是在这一基础上完成的.

全书共分 7 章.前 2 章是预备知识,分别介绍数理统计的若干基本概念和抽样分布.特别要强调的是,第 2 章抽样分布是后面几章的基础.后 5 章介绍数理统计的方法和理论,其中第 3 章和第 4 章分别介绍点估计和区间估计;第 5 章和第 6 章介绍参数假设检验和非参数假设检验;最后一章,即第 7 章介绍 Bayes 方法和统计决策理论,这是近半个多世纪迅速发展起来的数理统计的一个重要分支.在第 3 章参数估计和第 5 章参数假设检验问题中,对有关统计推断方法的最优性理论作了较系统的介绍.在每一章的介绍中注重对问题的背景和统计思想、方法的阐述,并附有大量例题和习题.

这本教材的主要内容在中国科学技术大学概率论与数理统计专业讲授过多次,大约可在 72 小时内讲授全书各章的主要内容.适当删除书中标“*”的章、节、段的内容后,仍成系统,可组成 54 学时左右的课程.因此,本书可作为概率论与数理统计专业基础课的教材,也可作为数学系非概率论与数理统计专业本科生的“数理统计”课教材.

本书编写过程中主要参考了陈希孺院士等编写的《数理统计学教程》,同时还参考了华东师范大学、北京大学等兄弟院校的数理统计教材,在此表示衷心的感谢.

中国科学技术大学赵林城教授仔细地审阅了书稿,提出了一些非常宝贵的修改意见.作者在修改时充分考虑了他的意见,在此向他表示深深的谢意.

中国科学技术大学统计与金融系 04 级统计班的几位同学在班长冯文宁同学的组织下,帮助完成书稿 1-6 章的中文 Tex 的打字和编译,对他们的辛勤工作表示真诚的感谢.作者的同事张伟平博士帮助完成全书的制图和一些章节的排版工作,并对书稿的修改提出了一些有益的建议,在此表示诚挚的感谢.科学出版社为本书的出版给予了大力支持,在此一并致谢.

由于作者水平有限,本书一定会有不少缺点和疏漏,恳请国内同行及广大读者批评指正。

前 言

本书是作者多年从事数学教育工作的经验总结,也是作者多年从事数学教育研究的成果。本书共分五章,由韦来生、王吉青、

2008年2月于中国科学技术大学

本书共分五章,第一章为绪论,第二章为数学教育的发展,第三章为数学教育改革的理论与实践,第四章为数学教育改革的理论与实践,第五章为数学教育改革的理论与实践。本书力求做到理论与实践相结合,既有理论的高度,又有实践的广度,力求做到科学性、艺术性、可读性的统一。本书可作为从事数学教育工作的教师、教研员、教育行政管理人员、教育理论工作者、教育研究者、教育管理者、教育评价者、教育决策者、教育研究者、教育管理者、教育评价者、教育决策者的参考书,也可作为从事数学教育工作的教师、教研员、教育行政管理人员、教育理论工作者、教育研究者、教育管理者、教育评价者、教育决策者的参考书。

本书共分五章,第一章为绪论,第二章为数学教育的发展,第三章为数学教育改革的理论与实践,第四章为数学教育改革的理论与实践,第五章为数学教育改革的理论与实践。本书力求做到理论与实践相结合,既有理论的高度,又有实践的广度,力求做到科学性、艺术性、可读性的统一。本书可作为从事数学教育工作的教师、教研员、教育行政管理人员、教育理论工作者、教育研究者、教育管理者、教育评价者、教育决策者的参考书,也可作为从事数学教育工作的教师、教研员、教育行政管理人员、教育理论工作者、教育研究者、教育管理者、教育评价者、教育决策者的参考书。

本书共分五章,第一章为绪论,第二章为数学教育的发展,第三章为数学教育改革的理论与实践,第四章为数学教育改革的理论与实践,第五章为数学教育改革的理论与实践。本书力求做到理论与实践相结合,既有理论的高度,又有实践的广度,力求做到科学性、艺术性、可读性的统一。本书可作为从事数学教育工作的教师、教研员、教育行政管理人员、教育理论工作者、教育研究者、教育管理者、教育评价者、教育决策者的参考书,也可作为从事数学教育工作的教师、教研员、教育行政管理人员、教育理论工作者、教育研究者、教育管理者、教育评价者、教育决策者的参考书。

本书共分五章,第一章为绪论,第二章为数学教育的发展,第三章为数学教育改革的理论与实践,第四章为数学教育改革的理论与实践,第五章为数学教育改革的理论与实践。本书力求做到理论与实践相结合,既有理论的高度,又有实践的广度,力求做到科学性、艺术性、可读性的统一。本书可作为从事数学教育工作的教师、教研员、教育行政管理人员、教育理论工作者、教育研究者、教育管理者、教育评价者、教育决策者的参考书,也可作为从事数学教育工作的教师、教研员、教育行政管理人员、教育理论工作者、教育研究者、教育管理者、教育评价者、教育决策者的参考书。

目 录

第 1 章 绪论	1
1.1 什么叫数理统计学	1
1.2 数理统计的若干基本概念	7
1.3 统计量	17
习题一	22
第 2 章 抽样分布及若干预备知识	24
2.1 引言	24
2.2 正态总体样本均值和样本方差的分	24
*2.3 次序统计量的分布	28
2.4 χ^2 分布, t 分布和 F 分布	32
2.5 统计量的极限分布	43
*2.6 指数族	45
2.7 充分统计量	50
*2.8 完全统计量	58
习题二	64
第 3 章 点估计	70
3.1 引言	70
3.2 矩估计	74
3.3 极大似然估计	83
*3.4 一致最小方差无偏估计	95
3.5 Cramer-Rao 不等式	106
习题三	117
第 4 章 区间估计	122
4.1 区间估计的基本概念	122
4.2 枢轴变量法 —— 正态总体参数的置信区间	126
4.3 枢轴变量法 —— 非正态总体参数的置信区间	137
*4.4 Fisher 的信仰推断法	144
*4.5 容忍区间与容忍限	150
习题四	157

第 5 章 参数假设检验	162
5.1 假设检验的若干基本概念	162
5.2 正态总体参数的假设检验	169
5.3 假设检验与区间估计	188
*5.4 一致最优检验与无偏检验	194
5.5 似然比检验	208
*5.6 序贯概率比检验简介	218
习题五	226
第 6 章 非参数假设检验	233
6.1 引言	233
6.2 一样本问题中的非参数假设检验	234
6.3 两样本问题中的非参数假设检验	243
6.4 拟合优度检验	250
6.5 列联表中的独立性和齐一性检验	261
*6.6 其他的非参数检验方法	267
习题六	275
* 第 7 章 Bayes 方法和统计决策理论	279
7.1 引言和若干基本概念	279
*7.2 先验分布的确定	284
7.3 Bayes 统计推断	298
7.4 Bayes 统计决策理论	308
*7.5 Minimax 准则	318
*7.6 同变估计及可容许性	322
习题七	327
参考文献	331
附录	332
附表 1 标准正态分布表	332
附表 2 t 分布表	333
附表 3 χ^2 分布表	334
附表 4 F 分布表	336
附表 5 泊松分布表	343
附表 6 正态分布容许限 $\bar{X} + \lambda s$ 或 $\bar{X} - \lambda s$ 中系数 $\lambda(n, \beta, \gamma)$ 值表	344
附表 7 正态分布容许区间 $\bar{X} \pm \lambda s$ 中系数 $\lambda(n, \beta, \gamma)$ 值表	345
附表 8 非参数容许限 —— 相应于总体比例 $1 - \beta$ 和置信水平 $1 - \gamma$ 的	

样本容量 n	346
附表 9 非参数容许区间 —— 相应于总体比例 $1 - \beta$ 和置信水平 $1 - \gamma$ 的样本容量 n	346
附表 10 符号检验临界值表	346
附表 11 符号秩和检验临界值表	347
附表 12 秩和检验临界值表	348
附表 13 柯尔莫哥洛夫检验临界值 $D_{n,\alpha}$	349
附表 14 柯尔莫哥洛夫检验统计量 D_n 的极限分布	350
附表 15 W 检验 统计量 W 的系数 $a_i(n)$ 的值	351
附表 16 W 检验 统计量 W 的 α 分位数 W_α	353
附表 17 D 检验 统计量 Y 的 α 分位数 Y_α	354
索引	355

第1章 绪 论

1.1 什么叫数理统计学

1.1.1 数理统计学的任务和性质

自然界的现象大致可以分为两大类,一类称为确定性现象,另一类称为非确定性现象,亦称为随机现象.确定性现象的例子,如物理学中的自由落体运动,可以用数学方程 $s = gt^2/2$ 刻画其运动规律.这样的例子还有许多,如物理学中的许多定律、化学中的反应规律和其他学科中的一些现象,它们皆可以用数学中的方程式,如微分方程等来精确描述.随机现象的例子,如在农业试验中,在面积相等且相邻的两块土地上种植同一种小麦,生产条件相同,但在收获时小麦产量不完全一样.又如在工业生产中,进行某化工产品得率的试验,使温度、压力和配方等主要因素控制在相同水平下,获得的两批化工产品得率不能保证完全相同.再如战士打靶试验,同一战士在相同条件下每次打靶命中的环数不尽相同.这些都是随机现象,它们在自然界是大量存在的.数理统计和概率论一样,是研究随机现象的统计规律性的数学学科.为了说明它的研究方法与其他数学学科有什么不同,首先来介绍什么是数理统计学.

统计学的任务是研究怎样有效地收集、整理和分析带有随机性影响的数据,从而对所考虑的问题作出一定结论的方法和理论.它是一门实用性很强的学科,在人类活动的各个领域都有着广泛的应用.统计学的思想和方法是人类文明的一个组成部分.研究统计学方法中理论基础问题的那一部分构成“数理统计学”的内容.一般地,可以认为

数理统计是数学的一个分支,它是研究如何有效地收集和使用带有随机性影响的数据的一门学科.

下面通过例子对此陈述加以说明.

1. 有效地收集数据

收集数据的方法有:全面观察(或普查)、抽样调查和安排试验等方式.

例 1.1.1 人口普查和抽样调查.我国在 2000 年进行了第 5 次人口普查.如果普查的数据是准确无误的,则无随机性可言,不需用数理统计方法.由于人口普查调查的项目很多,我国有 13 亿人口,普查工作量极大,且缺乏训练有素的工作人员,因此虽是全面调查,但数据并不很可靠.例如,农村超计划生育瞒报、漏报人口

的情况时有发生. 针对普查数据不可靠, 国家统计局在人口普查的同时还派出专业人员对全国人口进行抽样调查, 根据抽样调查的结果, 对人口普查的数字进行适当的修正. 抽样调查在普查不可靠时是一种补充办法. 如何安排抽样调查, 是有效收集数据的一个重要问题, 这构成数理统计学的一个重要分支——抽样调查方法.

例 1.1.2 考察某地区 10000 户农户的经济状况, 从中挑选 100 户作抽样调查. 若该地区分成平原和山区两部分, 平原较富, 占该地区农户的 70%, 而占 30% 的山区农户较穷. 抽样方案规定在抽取的 100 户中, 从平原地区抽 70 户, 山区抽 30 户, 在各自范围内用随机化方法抽取.

在本例中, 有效收集数据是通过合理地设计抽样方案来实现的. 在通过试验收集数据的情形中, 如何做到有效收集数据, 请看下例.

例 1.1.3 某化工产品的得率与温度、压力和原料配方有关. 为提高得率, 通过试验寻找最佳生产条件. 试验因素和水平如下:

因素	水平	1	2	3	4
	温度		800°C	1000°C	1200°C
压力		10	20	30	40
配方		A	B	C	D

3 个因素, 每个因素 4 个水平共要做 $4^3 = 64$ 次试验. 做这么多试验, 人力、物力、财力都不可能. 因此, 如何通过尽可能少的试验获得尽可能多的信息? 例如, 采用正交表安排试验就是一种有效的方法. 如何安排试验方案和分析试验结果, 这构成数理统计的另一分支——试验的设计和析. 在本例中, 有效收集数据是通过科学安排试验的方法来实现的.

在有效收集数据中, 一个重要问题是数据必须具有随机性. 在例 1.1.2 中, 随机性体现在抽样的 100 户农户是从 10000 户农户中按一定的方式“随机抽取”的, 它具有一定的代表性 (山区和平原地区农户按比例抽取). 假如只在该地区富裕的那部分农户中挑选, 得到的数据就不具有代表性, 也谈不上有效. 而在例 1.1.3 中, 数据的随机性是由试验误差来体现的. 化工产品的得率除了受温度、压力和配方影响外还受一些无法控制, 甚至仍未被人们认识的因素影响, 如每次试验中受试验材料产地的影响、所使用仪器设备精度的影响和操作者水平的影响等. 这些因素无法或不便加以完全控制, 从而对试验结果产生随机性的影响, 这就带来不确定性.

2. 有效地使用数据

获取数据后, 需要用有效的方法去集中和提取数据中的有关信息, 以对所研究的问题作出一定的结论, 这在统计上称为“推断”.

为了有效地使用数据进行统计推断,需要对数据建立一个统计模型(如何建模见例 1.2.6 和例 1.2.7),并给定某些准则去评判不同统计推断方法的优劣.例如,为估计一个物体的重量 a ,把它在天平上称 5 次获得数据 x_1, x_2, \dots, x_5 , 它们都受到随机性因素的影响(天平的精度反映了影响的大小).估计 a 的大小采用下列 3 种不同方法: ① 用 5 个数的算术平均值 $\bar{x} = \frac{1}{5}(x_1 + \dots + x_5)$ 去估计 a ; ② 将 x_1, x_2, \dots, x_5 按大小排列为 $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(5)}$, 取中间一个值 $x_{(3)}$ 去估计 a ; ③ 用 $W = \frac{1}{2}(x_{(1)} + x_{(5)})$ 去估计 a . 可能认为 \bar{x} 优于 $x_{(3)}$, 而 $x_{(3)}$ 优于 W . 这是不是对的? 为什么? 在什么条件下才对? 事实上, 对这些问题的研究正是数理统计学的任务. 以后可以看到在一定的统计模型和优良性准则下, 上述 3 个估计方法中的任何一个都可能是最优的.

下面举例说明, 采用合适的统计方法也是有效使用数据的一个重要方面.

例 1.1.4 某农村有 100 户农户, 要调查此村农户是否脱贫. 脱贫的标准是每户年均收入超过 1 万元. 经调查此村 90 户农户年收入 5000 元, 10 户农户年收入 10 万元, 问此村农户是否脱贫?

(1) 用算术平均值计算该村农户年均收入如下:

$$\bar{x} = \frac{90 \times 0.5 + 10 \times 10}{100} = 1.45(\text{万元}).$$

按此方法得出结论: 该村农民已脱贫. 但 90% 的农户年均收入只有 5000 元, 事实上并未脱贫.

(2) 用样本中位数计算该村农户年均收入, 即将 100 户的年收入分别记为 x_1, x_2, \dots, x_{100} , 将其按大小排列为 $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(100)}$. 样本中位数定义为排在最中间两户的平均值, 即

$$\frac{x_{(50)} + x_{(51)}}{2} = 0.5(\text{万元}).$$

按此方法得出结论: 该村农民尚未脱贫. 这与实际情况相符.

由此可见, 不同的统计方法得出的结论不同. 有效地使用数据, 需要针对不同问题选择合适的统计方法.

3. 数理统计学与各种专门学科的关系

数理统计方法有很广泛的实用性, 它与很多专门学科都有关. 但是应当了解: 数理统计方法所处理的只是在各种专门学科中带普遍性(共性)且受随机性影响的数据收集、整理和推断问题, 而不去涉及各种专门学科中的具体问题. 这种带共性的问题既然从专门领域中提炼出来, 就可以用数学的方法去研究, 这就是数理统计学的研究任务, 因此数理统计是一个数学的分支.

拿例 1.1.3 来说,实地进行这个化工产品得率试验,当然要涉及一系列专门的化工知识.在安排试验时,没有这些专门知识是不行的.但是,有些试验安排上的数学问题却与化工这个专门领域无关.例如,数理统计学告诉我们,各因素取同样水平数参与试验,以后的数据分析比较方便.如果在 $4^3 = 64$ 种搭配中只做一部分,则按某种方式挑选这一部分(如按正交表安排试验),以后的数据分析就容易进行.当下一次碰到其他工业试验时,这些考虑仍有效.又如,称重试验中用多次称重结果的平均数去估计物体的重量,是一个常用的统计方法,不管这个量是物理的、化学的或是生物的,这一点都适用.

由统计方法的这个性质就引申出一个重要特点:统计方法只是从事物外在数量上的表现去推断该事物可能的规律性.统计方法本身不能说明何以会有这个规律性,这是各个专门学科的任务.例如,用统计方法分析一些资料发现,吸烟与某些呼吸系统的疾病有关.这纯粹是从吸烟者和不吸烟者的发病率的对比上得出的结论,它不能解释吸烟何以会增加患这类疾病的危险性,这是医学这个专门学科的任务.

但是,应当认识到,这并不意味着一个数理统计学者可以不过问其他专门领域的知识.相反,如果要将统计方法用于实际问题,必须对所涉及问题的专门知识有一定的了解,这不仅可以帮助选定适当的统计模型和统计方法,而且在正确解释所得结论时,专门知识是必不可少的.例如,数理统计学在遗传基因分析中很有用,但一个对遗传基因学一无所知的统计学家,很难在这个领域有所作为.

4. 数理统计方法的归纳性质

数理统计是数学的一个分支,但是它与其他数学学科的推理方法是不一样的.统计方法的本质是归纳式的,而其他数学学科则是演绎式的.统计方法的归纳性质,源于它在作结论时,是根据所观察到的大量的“个别”情况“归纳”起来所得,而不是从一些假设、命题或已知事实出发,按一定的逻辑推理得出来的(后者称为演绎推理).例如,统计学家通过大量的观察资料发现,吸烟与某种呼吸系统的疾病有关.得出这一结论的根据是:从观察到的大量例子,看到吸烟者中患此种疾病的比例远高于不吸烟者.不可能用逻辑推理的方法证明这一点.试拿统计学与几何学进行比较就可以清楚地看出二者方法的差别所在.在几何学中要证明“等腰三角形两底角相等”,只需从等腰这个前提出发,运用几何公理,一步步地推出这个结论(这一方法属于演绎推理).而一个习惯于统计方法的人,就可能想出这样的方法:作很多大小形状不一的等腰三角形,实际测量它的底角查看区别如何,根据所得数据,看看可否作出底角相等的结论,这一方法属于归纳推理.

众所周知,归纳推理是要冒风险的.事实上,归纳推理的不确定性的出现是一种逻辑的必然.人们不可能作出十分肯定的结论,因为归纳推理所依据的数据具有随机性.然而,不确定性的推理是可行的,所以推理的不确定性程度是可以计算的.

统计学的作用之一就是提供归纳推理和计算不确定性程度的方法。不确定性是用概率计算的。以后会见到在参数的区间估计问题中，不但给出区间估计的表达式，而且给出这一区间包含未知参数的可靠程度的大小。

总之，统计推断属于归纳推理方法，归纳推理作出的推断不是 100% 可靠，但它的可靠程度（即结论的正确程度）是可以通过概率来度量的。

1.1.2 数理统计学的应用

人类在科学研究、生产和管理等各方面的活动，大都离不开数据资料的收集、整理和分析的工作，因此统计学的应用领域也极其广泛。

(1) 国家行政机关和职能机构，如国家统计局，经常需要收集有关的数据和资料，以了解情况并作出相应的决策。这里面的统计工作，固然有大量的描述性统计的成分，但统计推断的方法也很有用并且十分必要。例如，在判断某一时期经济运行是否过热，是否需要采取宏观调控措施等重大决策时，对当时经济运行中数据资料进行定量分析是必不可少的。这就离不开统计推断方法。

用数理统计方法进行社会调查，这种工作属于国家职能部门的工作范围。“抽样调查”是常用的方法。统计学的方法在决定调查规模和制定有效的抽样方案时是很有用的，统计推断方法在对调查得来的资料进行正确分析时也有指导意义。例如，经过精心设计和组织的社会抽样调查，其效果有时可达到甚至超过全面调查的水平。在人口学中，确定一个合适的人口发展动态模型需要掌握大量的观察资料，而且要使用包括统计方法在内的一些科学方法。再如，在人寿保险中，对寿命数据的分析、建立精算模型也要用到一些统计方法。

(2) 在工农业生产中，常常要利用试验设计和方差分析的方法寻找最佳生产条件。例如，为提高农业中的单位面积产量，有一些因素对这个指标有影响：种子的品种、施肥量和浇水量等；工业生产中影响某项产品质量指标的因素有原材料产地、配方、温度和压力等因素。为了找到一组较好的生产条件就要进行试验，如何科学地安排试验和分析试验结果，就需要用到统计方法。试验设计的基本思想和方差分析方法就是 R.A. Fisher 等于 1923-1926 年，在进行田间试验中发展起来的，这一方法后来广泛应用于工业生产中。

数理统计方法应用于工业生产的另一个重要方面是产品质量控制、抽样调查和工业产品寿命的可靠性问题。现代工业生产有批量大和高可靠度的特点，需要在连续生产过程中进行工序控制。成批的产品在交付使用前要进行验收，这种验收一般不能进行全面检验，而只能是抽样验收，需要根据统计学的原理制定合适的抽样方案。大型设备或复杂产品（如导弹）包含成千上万个元件。由于元件的数目很大，元件的寿命服从一定的概率分布，整个设备（或产品）的寿命与其结构和元件的寿命分布有关，因此为了估计设备（或产品）的可靠性，发展了一系列的统计方法。统

计质量管理就是由上述提到的这些方法构成的。

(3) 数理统计方法在经济和金融领域也有广泛的应用, 在经济学中定量分析的应用比其他社会科学部门更早更深入。现在有一门叫做“计量经济学”的学科, 其内容主要就是将统计方法 (及其他数学方法) 用于分析经济领域中数量方面的问题。例如, 早在 20 世纪二三十年代, 时间序列的统计分析方法就用于市场预测, 目前金融等领域也广泛地使用时间序列方法。

(4) 统计方法在生物、医学和遗传学中有广泛的应用。一种药品的疗效如何, 要通过精心安排的试验并使用正确的统计分析方法, 才能比较可靠地作出结论。分析某种疾病的发生是否与特定因素有关 (一个典型的例子是吸烟与患肺癌的关系), 这些问题常常是从观察和分析大量资料的基础上得到启示, 再提高到理论上的研究。这方面的应用还有流行病数据的统计分析、遗传基因数据的统计分析等。

(5) 数理统计方法在气象预报、水文、地震、地质等领域有广泛应用。在这些领域中, 人们对事物规律性的认识不充分, 使用统计方法有助于获得一些对潜在规律性的认识, 用以指导人们的行动。

(6) 数理统计方法在科学研究中也具有重要作用。自然科学研究的根本任务是揭示自然界的规律性, 科学实验是重要手段, 而随机因素对实验结果的影响无所不在。一个好的统计方法有助于提取实验和观察数据中根本性的信息, 因而有助于提出较正确的理论或假说。有了一定的理论和假说后, 统计方法可以指导研究工作者如何进一步安排试验或观察, 以使所得数据更有助于判定定理或假说是否正确。数理统计学也提供了理论上有效的方法去评估观察或试验数据与理论的符合程度如何。一个著名的例子是遗传学中的 Mendel 定律。这个根据观察资料提出的定律, 经历了严格的统计检验。数量遗传学中的基本定律: Hardy-Weinberg 平衡定律也具有这种性质。由此可见, 科学研究需要数理统计方法。另一方面, 应用上的需要又是统计方法发展的动力。例如, 现代统计学的奠基人、英国著名学者 R.A. Fisher 和 K. Pearson 在 20 世纪初期从事统计学的研究, 就是出于生物学、遗传学和农业科学方面的需求。

1.1.3 统计学发展简史

数理统计学是一门较年轻的学科, 它主要的发展是从 20 世纪初开始, 大概可分为两个阶段。前一阶段大致上到第二次世界大战结束时为止。在这一早期发展阶段中, 起主导作用的是以 R.A. Fisher 和 K. Pearson 为首的英国学派, 特别是 Fisher, 他在本学科的发展中起了独特的作用。其他一些著名的学者, 如 W.S. Gosset (student), J. Neyman, E.S. Pearson (K. Pearson 的儿子), A. Wald 以及我国的许宝騄教授等都作出了根本性的贡献。他们的工作奠定了许多数理统计学分支的基础, 提出了一系列具有重要应用价值的统计方法和一系列基本概念和重要理论

问题. 有一种意见认为瑞典统计学家 H. Cramer 在 1946 年发表的著作 *Mathematical Methods of Statistics* (见参考文献 [3]) 标志了这门学科达到成熟的地步.

收集和记录种种数据的活动, 在人类历史上来源已久. 翻开我国二十四史, 可以看到上面有很多关于钱粮、人口、地震及洪水等自然灾害的记录. 在西方国家, *Statistics* (统计学) 一词源出于 *State* (国家), 意指国家收集的国情材料. 19 世纪中叶以后, 包括政治统计、人口统计、经济统计、犯罪统计、社会统计等多方面内容的“社会统计学”一词在西方开始出现, 与此相应的社会调查也有了较大发展. 人们试图通过社会调查, 收集、整理和分析数据, 以揭示社会现象和问题, 并提出解决具体问题的方法. 这种情况延续了许多年, 研究方法属于描述统计学的范畴. 这是因为, 当时还没有一定的数学工具特别是概率论的发展, 无法建立现代意义下的数理统计学. 也因为这方面的需求还没达到那么迫切, 足以构成一股强大的推动力. 到 19 世纪末和 20 世纪初情况才起了较大的变化. 有人认为 20 世纪初 K. Pearson 关于 χ^2 统计量极限分布的论文可以作为数理统计诞生的一个标志; 也有人认为, 直到 1922 年 Fisher 关于统计学的数学基础那篇著名论文的发表, 数理统计才正式诞生.

综上所述, 可以得到如下粗略的结论: 收集和整理乃至使用试验和观察数据的工作由来已久, 这类活动对于数理统计学的产生, 可算是一个源头. 19 世纪, 特别是 19 世纪后半期发展速度加快, 且有了质的变化. 19 世纪末到 20 世纪初这一阶段, 出现了一系列的重要工作. 无论如何, 至迟到 20 世纪 20 年代, 这门科学已稳稳地站住了脚跟. 20 世纪前 40 年有了迅速而全面的发展, 到 20 世纪 40 年代时, 数理统计已形成一个成熟的数学分支.

从战后到现在可以说是第二阶段. 在这个时期中, 许多战前开始形成的数理统计分支, 在战后得到纵深的发展, 理论上的深度也比以前大大加强了. 同时还出现了根本性的发展, 如 Wald 的统计判决理论和 Bayes 学派的兴起. 在数理统计的应用方面, 其发展也给人深刻印象. 这不仅是战后工农业生产和科学技术迅速发展所提出的要求, 也是由于电子计算机这一有力工具的出现和飞速发展推动了数理统计学的进步. 战前由于计算工具跟不上, 许多需要大量计算的统计方法很难得以使用. 战后有了高速计算机使这一问题变得很容易, 这就大大推广了统计方法的应用. 目前, 统计方法仍在蓬勃发展中. 在一些统计学发达的国家中, 特别在美国, 这方面的人才数以十万计, 并在大多数大学中建立了统计系. 近 30 年来, 数理统计学在我国的发展也是令人瞩目的.

1.2 数理统计的若干基本概念

1.2.1 总体和样本

总体又称为母体. 通过下面的例子说明总体、个体和样本的概念.