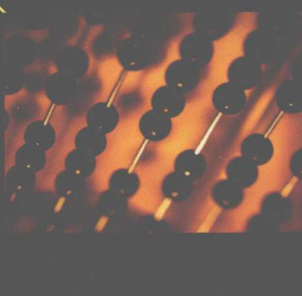
中国精算师资格考试
指导丛书

复利数学

Compound interest mathematics

范兴华 主 编
吴传俭 周俊所 副主编
杨锡忠 主 审

复利数学是金融资产定价的理论基础，是精算师及其他金融工作者的基本分析工具。当然，这门课程的相关理论对一般公众的个人金融决策也十分有用，建议公众学习一些基本理论，以使自己的个人财富更快地积累。



清华大学出版社

中国精算师资格考试指导丛书

复利数学

范兴华　主　编

吴传俭　周俊所　副主编

杨锡忠　主　审

清华大学出版社

北京

内容简介

复利数学是讲述利息计算的理论，因此又称为利息理论。其主要内容涵盖了利率的度量工具、年金理论与实务、各种收益率的定义及计算、债券定价原理、股票定价基本原理及随机利息问题等。由于这些知识涉及金融的诸多基础计算原理，故此门课又称为金融数学。这门课并不介绍利率的决定等宏观经济理论，它所解决的只是微观的、个人或企业的具体的经济问题。

该书适合精算师应试人员、高等院校师生、金融从业人员阅读。

图书在版编目(CIP)数据

复利数学/范兴华主编．—北京：清华大学出版社，2008．2
(中国精算师资格考试指导丛书)
ISBN 978-7-302-16846-1

Ⅰ．复…　Ⅱ．范…　Ⅲ．保险－利息－计算方法－资格考核－自学参考资料　Ⅳ．F840．4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 006152 号

责任校对：王凤芝
责任印制：王秀菊
出版发行：清华大学出版社　　**地　　址**：北京清华大学学研大厦 A 座
http://www.tup.com.cn　**邮　　编**：100084
c－service@tup.tsinghua.edu.cn
社 总 机：010-62770175　**邮购热线**：010-62786544
投稿咨询：010-62772015　**客户服务**：010-62776969
印 刷 者：北京四季青印刷厂
装 订 者：三河市新茂装订有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185×230　**印　张**：15.75　**字　数**：321 千字
版　　次：2008 年 2 月第 1 版　**印　　次**：2008 年 2 月第 1 次印刷
印　　数：1～4000
定　　价：28.00 元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题，请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话：(010)62770177 转 3103　　产品编号：025818—01

丛书前言

FOREWORD

在当今日益繁荣的商品经济社会里，保险作为分散和转移风险的一种有效工具，对经济的发展起着保驾护航的作用。与其他经济类学科的发展相类似，保险的发展与数学也有不解之缘。有位名人说过这样一句话："一门科学只有成功地运用数学时，才算达到完善的地步。"早期保险学的发展十分缓慢，后来正是精算学的诞生极大地推动了保险业的发展。作为保险公司的"守护神"——精算，受到了保险业的监管人士、管理决策人员的格外重视。与之相应的职业——精算师，也成为了令人尊敬与仰慕的职业。所谓精算学，实际上是将数学方法运用于金融保险所形成的一套理论体系。它包括：寿险精算数学、运筹学、统计学、经济学、金融学、保险学、法律、财务管理、利息理论、人口理论、修匀理论、生存模型、风险理论、非寿险精算数学、养老金数理技术、时间序列等。这一套理论经数百年的发展已日益成熟，它的重要性、权威性与科学性，已得到保险界的公认。

在我国保险业蓬勃发展的进程中，对精算人才的需求十分迫切。广大的学子以及热爱保险事业的同仁纷纷投身于精算师资格考试的漫长生涯中。近几年来，市面上陆续出现了大量的保险精算学的相关教材和资料。但并没有相关的辅导用书。本人及数位有志同仁经数年的共同努力，全心打造这一套中国精算师资格考试应试指导用书。这套书包括：《复利数学》、《风险理论》、《非寿险精算数学》、《寿险精算数学》、《生命表构造理论》、《寿险精算实务》、《综合经济基础》、《中国精算师资格考试全真模拟习题集》等。这套部分已出版的书籍已对参加中国精算师资格考试的考生及相关读者给予了极大的帮助。但是由于我们水平及认识的局限，书中的遗漏和错误在所难免，望各位同仁专家、学者不吝赐教并予以指正。我们将不断完善这一套书籍，以此来献给那些勇敢、智慧和勤勉的精算学习者。

范兴华

目　　录

CONTENTS

第一章　利息的基本概念

知识要点 1　利息的度量与实际利率

定义 $a(t)$：$a(t)$是积累函数，如果考虑投资一单位的本金，那么该投资在时刻 t 的积累值就是积累函数 $a(t)$。显然 $a(0)=1$。

定义 $A(t)$：$A(t)$是总量函数，它是 k 个单位的投资在时刻 t 的积累值。显然有 $A(t)=ka(t)$。

折现函数：$a^{-1}(t)$称为 t 期折现因子(折现函数)。

记 I_n 为从投资日起第 n 个时期所得到的利息金额，有

$$I_n = A(n) - A(n-1)$$

实际利率 i：某度量期的实际利率是该度量期内得到的利息金额与此度量期初投资的本金金额之比。

$$\begin{aligned} i &= a(1) - a(0) \\ &= \frac{a(1) - a(0)}{a(0)} = \frac{A(1) - A(0)}{A(0)} = \frac{I_1}{A(0)} \end{aligned}$$

$$i_n = \frac{A(n) - A(n-1)}{A(n-1)} = \frac{I_n}{A(n-1)}$$

例题精选

例 1　设 $A(t)=10t+\sqrt{t}+2$，求 $a(t)$。

解　因为
$$A(0)=2$$
所以
$$a(t)=(10t+\sqrt{t}+2)/2$$

例 2　设 $A(3)=20$，$i_n=0.02n$，求 I_6。

解　因为
$$i_4=\frac{A(4)-A(3)}{A(3)}=\frac{A(4)-20}{20}=0.02\times 4$$
所以
$$A(4)=21.6$$
因为
$$i_5=\frac{A(5)-A(4)}{A(4)}=\frac{A(5)-21.6}{21.6}=0.02\times 5$$
所以
$$A(5)=23.76$$
因为
$$i_6=\frac{A(6)-A(5)}{A(5)}=\frac{A(6)-23.76}{23.76}=0.02\times 6=0.12$$
所以
$$A(6)=26.61$$

所以所求的值为 $I_6=A(6)-A(5)=26.61-23.76=2.85$

例 3 已知 $a(t)=at^2+b$，如果在 0 时投资 1 元，能在时刻 3 积累至 12 元；如果在时刻 4 投资 10 元，在时刻 8 的积累值为多少？

解 因为 $a(0)=1$

所以 $b=1$

又因为 $a(3)=a\times 9+1=9a+1=12$

解得 $a=\dfrac{11}{9}$

所以所求的积累值为：$10\left(\dfrac{11}{9}\times(8-4)^2+1\right)=205.6$

知识要点 2 单利与复利

单利：投资一单位本金在时刻 t 时的积累值为：$a(t)=1+it$，称这笔投资以每期单利 i 计息。

复利：投资一单位本金在 t 时刻的积累值为 $a(t)=(1+i)^t$，称这笔投资以每期复利 i 计息。

在单利计息时，第 n 期的实际利率为

$$i_n=\frac{a(n)-a(n-1)}{a(n-1)}$$

$$=\frac{i}{1+i(n-1)}=f(n)$$

显然 i_n 是 n 的递减函数。

在复利计息时，第 n 期的实际利率为

$$i_n=\frac{a(n)-a(n-1)}{a(n-1)}=i$$

例题精选

例 1 已知投资 5 元，3 个月后可得到 1.2 个单位的利息，试求在单利的作用下投资 800 元在 5 个月后的积累值。

解 $5[a(3)-a(0)]=5(1+3i-1)=15i=1.2$

解得 $i=8\%$

所以所求的值为：$800a(5)=800(1+5\times 8\%)=1120$(元)

例 2 就上例的情形，若改为复利计算，又有何结论？

解 $5a(t)=5(1+i)^3=5+1.2$

所以 $1+i=1.074\ 33$

所以所求即为 $800(1+i)^5=800\times 1.074\ 33^5=1\ 144.9$(元)

例 3 设某项投资的单利利率为 10%，问在哪一个时期里它等价于 5% 的实际利率？

解 $\frac{i}{1+i(n-1)}=5\%=\frac{0.1}{1+0.1(n-1)}$

解得 $n=11$

例 4 将 1 000 元款项以每年 1% 的利率投资 10 年，计算第 3 年的单利利息是多少？

解 $1\,000(a(3)-a(2))=1\,000[1+3\times1\%-(1+2\times1\%)]$

$=10$(元)

例 5 就例 4 的情形，将单利改为复利，则结果又如何？

解 $1\,000(a(3)-a(2))=1\,000[(1+i)^3-(1+i)^2]=10.201$(元)

例 6 已知 3 个单位元经过 3 个月将增长到 5 个单位元，试确定分别在第 1 个月末，第 2 个月末，第 4 个月末，第 6 个月末投资 6 个单位元的现值之和。

解 先解出月利率 i，有

$$3(1+i)^3=5\Rightarrow(1+i)^{-1}=0.843\,45$$

所求之值为

$$6[(1+i)^{-1}+(1+i)^{-2}+(1+i)^{-4}+(1+i)^{-6}]$$
$$=6(0.843\,45+0.843\,45^2+0.843\,45^4+0.843\,45^6)$$
$$=14.526(\text{元})$$

知识要点 3 实际贴现率

实际贴现率：一个度量期的实际贴现率为该度量期内取得的利息金额与期末的投资可回收金额之比，用 d 表示贴现率。

$$I_1=A(1)\cdot d=A(0)\cdot i$$

$$d_n=\frac{A(n)-A(n-1)}{A(n)}=\frac{I_n}{A(n)}$$（从投资日算起第 n 个时期的实际贴现率）

复贴现 $d_n=\frac{a(n)-a(n-1)}{a(n)}=\frac{(1+i)^n-(1+i)^{n-1}}{(1+i)^n}$

$$=\frac{i}{1+i}=d$$

$a^{-1}(t)=v^t=(1-d)^t$ 其中：$v=\frac{1}{1+i}$

单贴现 $d_n=\frac{a(n)-a(n-1)}{a(n)}=\frac{(1-n\cdot d)^{-1}-(1-(n-1)\cdot d)^{-1}}{(1-n\cdot d)^{-1}}=\frac{d}{1-(n-1)d}$

（如果单贴现率为常数 d）

$$a^{-1}(t)=1-dt\quad 0\leqslant t\leqslant 1/d$$

常数的单利 i

$$d_n=\frac{a(n)-a(n-1)}{a(n)}=\frac{1+ni-(1+(n-1)i)}{1+ni}$$
$$=\frac{1}{1+ni}$$

例题精选

例 1 分别对 6%的复利与单利计算 d_6。

解 对复利 6%,有

$$d_6 = d = \frac{6\%}{1+6\%} = 0.0566$$

对单利 6%,有

$$d_6 = \frac{a(6)-a(5)}{a(6)} = \frac{1+6i-(1+5i)}{1+6i}$$
$$= \frac{i}{1+6i} = \frac{0.06}{1+6\times 0.06} = 0.044\,12$$

注:在计算 d_6 时,由于有常数的单利 6%,所以用 $d_6 = \frac{i}{1+6i}$。

例 2 分别对 6%的复贴现与单贴现,求 d_6。

解 对复贴现,有

$$d_6 = d = 0.06$$

对单贴现,有

$$d_6 = \frac{a(6)-a(5)}{a(6)} = \frac{(1-6d)^{-1}-(1-5d)^{-1}}{(1-6d)^{-1}}$$
$$= \frac{d}{1-(n-1)d} = \frac{0.06}{1-5\times 0.06} = 0.085\,7$$

例 3 已知某项投资在一年末的终值为 3 000 元,而与利息等价的贴现金额为 280 元,求本金 x。

解 由已知得方程组:

$$\begin{cases} x(1+i) = 3\,000 \\ x\cdot d = 280 \end{cases}$$

解此方程组得:$\begin{cases} i=0.116\,31 \\ x=2\,687(\text{元}) \end{cases}$

知识要点 4 名义利率与名义贴现率

在一个度量期中利息支付不止一次或在多个度量期利息支付才一次的情况,称相应的一个度量期的利率或贴现率为“名义”的。

记 $i^{(m)}$ 为每一度量期付 m 次利息的名义利率,$d^{(m)}$ 为每一度量期付 m 次利息的名义贴现率,于是有以下关系式:

$$1+i = \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^m$$

$$1-d = \left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^m$$

$$d^{(m)}=m(1-(1-d)^{\frac{1}{m}})=m(1-v^{\frac{1}{m}})$$

$$1+\frac{i^{(m)}}{m}=\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^{-1}$$

$$\frac{i^{(m)}}{m}-\frac{d^{(m)}}{m}=\frac{i^{(m)}}{m}\cdot\frac{d^{(m)}}{m}$$

例题精选

例 1 已知名义贴现率为每 5 年计算一次利息的年名义贴现率为 6%，求 500 元在第 4 年末的积累值。

解 因为 $d^{(\frac{1}{5})}=6\%$

所以每 5 年计息一次的年实际贴现率为 $6\%\times5=30\%$

所以可知每 5 年计息一次的 5 年期利率 i 满足以下方程：

$$30\%=d=\frac{i}{1+i}$$

解得 $i=0.428\ 57$

所以所求的值为：$500(1+0.428\ 57)^{\frac{4}{5}}=665.107$(元)

例 2 已知 $1+\dfrac{i^{(m)}}{m}=\dfrac{1+\dfrac{i^{(6)}}{6}}{1+\dfrac{i^{(7)}}{7}}$，求 m。

解 因为
$$1+\frac{i^{(6)}}{6}=(1+i)^{\frac{1}{6}}$$
$$1+\frac{i^{(7)}}{7}=(1+i)^{\frac{1}{7}}$$
$$1+\frac{i^{(m)}}{m}=(1+i)^{\frac{1}{m}}$$

所以
$$(1+i)^{\frac{1}{m}}=(1+i)^{\frac{1}{6}-\frac{1}{7}}$$

所以
$$\frac{1}{m}=\frac{1}{42}$$

所以
$$m=42$$

例 3 设 $m>1$，按大小顺序排 $i,i^{(m)},d^{(m)},d$。

解 因为 $1+i=\left(1+\dfrac{i^{(m)}}{m}\right)^m$

所以 $\left(1+\dfrac{i^{(m)}}{m}\right)^m$ 用二项式展开有

$$1+C_m^1\cdot\frac{i^{(m)}}{m}+C_m^2\cdot\left(\frac{i^{(m)}}{m}\right)^2+\cdots+C_m^m\left(\frac{i^{(m)}}{m}\right)^m$$

所以 $i=\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^m-1=1+C_m^1\cdot\frac{i^{(m)}}{m}+C_m^2\cdot\left(\frac{i^{(m)}}{m}\right)^2+\cdots+C_m^m\left(\frac{i^{(m)}}{m}\right)^m-1$

$$=m\cdot\frac{i^{(m)}}{m}+\cdots$$

$$=i^{(m)}+\cdots>i^{(m)}$$

同样可证 $d^{(m)}>d$

因为 $1-d=\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^m=1-C_m^1\cdot\frac{d^{(m)}}{m}+C_m^2\cdot\left(\frac{d^{(m)}}{m}\right)^2+\cdots+C_m^3\left(\frac{d^{(m)}}{m}\right)^3+\cdots$

所以 $d=d^{(m)}-\frac{m(m-1)}{2}\cdot\frac{(d^{(m)})^2}{m^2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{3\times2}\cdot\frac{(d^{(m)})^3}{m^3}-\cdots$

所以 $d^{(m)}>d$

现在比较 $i^{(m)}$ 与 $d^{(m)}$ 的大小：

因为
$$1+i=\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^m$$

$$1-d=(1+i)^{-1}=\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^m$$

所以
$$\frac{i^{(m)}}{m}=(1+i)^{\frac{1}{m}}-1 \qquad ①$$

$$\frac{d^{(m)}}{m}=1-(1+i)^{-\frac{1}{m}} \qquad ②$$

因为①与②的右端有

$$(1+i)^{\frac{1}{m}}-1>1-(1+i)^{-\frac{1}{m}}$$

$$\Leftrightarrow(1+i)^{\frac{1}{m}}+\frac{1}{(1+i)^{\frac{1}{m}}}>2$$

所以
$$\frac{i^{(m)}}{m}>\frac{d^m}{m}\Leftrightarrow i^{(m)}>d^{(m)}$$

所以 $i>i^{(m)}>d^{(m)}>d$ 是所求的顺序排列。

知识要点 5 利息强度δ

利息强度 δ_t：

$$\delta_t=\frac{A'(t)}{A(t)}=\frac{a'(t)}{a(t)}=(\ln^{A(t)})'_t=(\ln^{a(t)})'_t=\frac{-(a^{-1}(t))'_t}{a^{-1}(t)}$$

$$a(t)=e^{\int_0^t\delta_s\,ds}$$

$$\delta_t=\lim_{m\to\infty}i^{(m)}=\lim_{m\to\infty}d^{(m)}$$

对单利情形有

$$\delta_t=\frac{a'(t)}{a(t)}=\frac{(1+ti)'_t}{1+ti}=\frac{i}{1+ti}$$

对单贴现率有

$$\delta_t = \frac{-(a^{-1}(t))'}{a^{-1}(t)} = \frac{-(1-\mathrm{d}t)'_t}{1-\mathrm{d}t} = \frac{d}{1-\mathrm{d}t}$$

例题精选

例 1 如果 $\delta_t = 0.02t$，求 10 元在 3 年末的积累值。

解
$$\begin{aligned} A(3) &= 10a(3) = 10e^{\int_0^3 0.02s\mathrm{d}s} \\ &= 10e^{0.01 \cdot s^2}\Big|_0^3 \\ &= 10e^{0.09} \\ &= 10.941\,7(\text{元}) \end{aligned}$$

例 2 已知 1 单位元的投资，投资 4 年，第 1 年的实际利率为 8%，第 2 年的实际贴现率为 8%，第 3 年的每季度计息的年名义利率为 8%，第 4 年的每半年计息的年名义贴现率为 8%，求该投资的积累值。

解 因为第 2 年的实际贴现率 $d_2 = 8\%$

所以$\dfrac{i_2}{1+i_2} = d_2 = 8\% \Rightarrow i_2 = 0.086\,96$

因为第 3 年每季计息的年名义利率为 8%

所以 $1+i_3 = \left(1+\dfrac{i^{(4)}}{4}\right)^4 = (1+2\%)^4 = 1.082\,43$

又因为第 4 年的每半年计息的年名义贴现率为 8%，即 $d^{(2)} = 8\%$

所以$\dfrac{1}{1+i_4} = 1-d = \left(1-\dfrac{d^{(2)}}{2}\right)^2 = (1-4\%)^2$

所以 $1+i_4 = 1.085\,07$

所以所求的终值为

$$\begin{aligned} (1+i_1)(1+i_2)(1+i_3)(1+i_4) &= 1.08 \times 1.086\,96 \times 1.082\,43 \times 1.085\,07 \\ &= 1.378\,78 \end{aligned}$$

例 3 就例 2 情形，求一常数实际利率，使它等价于这 4 年的投资利率。

解 由上题的题解过程可知，4 年的投资收益率为 0.378 78，所以所求的利率满足以下方程：

$$(1+i)^4 - 1 = 0.378\,78$$

所以
$$i = 0.083\,61$$

例 4 设 m 是与实际利率 j 等价的每半年计息一次的年名义利率，而 k 是与 m 等价的利息强度，试用 j 表示 k。

解 $\left(1+\dfrac{m}{2}\right)^2 = 1+j \Rightarrow m = 2[(1+j)^{\frac{1}{2}}-1]$

$$\delta = k = \ln(1+m) = \ln[2(1+j)^{\frac{1}{2}}-1]$$

例 5 设 $\delta_t=\dfrac{20+10t}{500}$，$0\leqslant t\leqslant 20$，某项投资 100 元于 $t=10$ 时实施，求该投资在 $t=15$ 时的终值 A。

解 所求之值 $A=100e^{\int_{10}^{15}\frac{20+10t}{500}dt}$

$$=100e^{\frac{1}{50}(2t+0.5t^2)\big|_{10}^{15}}$$

$$=426.311(\text{元})$$

例 6 投资 10 个单位在利息强度为 δ 的情况下，经 20 年积累到 16 个单位元，在每 3 年计息一次的年名义利率为 δ 的情况下，投资 1 单位经 n 年累积到 6 个单元，求 n。

解 依题意可先求出 δ：

$$10(1+i)^{20}=16$$

因为 $$1+i=e^{\delta}$$

所以 $$10(1+i)^{20}=10e^{20\delta}=16$$

所以 $$\delta=0.0235$$

所以 $$(1+3\delta)^{\frac{n}{3}}=6$$

所以 $$n=79$$

例 7 在基金 A 中，投资 10 个单位元到 t 时的积累值为 $10(1+t)$，在基金 B 中，投资 15 个单位元到 t 时的积累值为 $15(1+t^2)$，假设在 T 时两基金的利息强度相等，求 T 时 A 基金投资 10 个单位的积累值。

解 依题意可分别求出 A、B 基金的累积函数：

$$a_A(t)=1+t=e^{\int_0^t\delta_s^A ds}$$

$$a_B(t)=1+t^2=e^{\int_0^t\delta_s^B ds}$$

对上两式求两边取对数求导可分别求出 δ_s^A，δ_s^B：

$$\delta_s^A=\frac{1}{1+s}$$

$$\delta_s^B=\frac{2s}{1+s^2}$$

令 $$\delta_s^A=\delta_s^B\Rightarrow\frac{1}{1+s}=\frac{2s}{1+s^2}$$

解得所求 $T=0.414$

所以所求之值为：$10a_A(T)=10\times(1+0.414)=10\times1.414=14.14$

例 8 某项基金的积累函数 $a(t)$ 为二次多项式，已知上半年的名义年利率为 4%，此利率是每半年计息一次的；下半年的每半年计息一次的年名义利率为 6%，求 $\delta_{\frac{1}{4}}$。

解 设 $a(t)=at^2+bt+c$

因为 $$a(0)=1$$
所以 $$c=1$$

依题意$\begin{cases} a\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{a}{4}+\dfrac{b}{2}+1=1.02 \\ a(1)=a+b+1=1.02\times1.03 \end{cases}$

解得$\begin{cases} a=0.021\,2 \\ b=0.029\,4 \end{cases}$

所以
$$\delta_{\frac{1}{4}}=\frac{a'\left(\frac{1}{4}\right)}{a\left(\frac{1}{4}\right)}=\frac{(2at+b)\big|_{t=\frac{1}{4}}}{0.212\times\left(\frac{1}{4}\right)^2+0.029\times\frac{1}{4}+1}$$
$$=0.039\,66$$

注：此题为中国精算师 2001 年度考题。

知识要点 6　利息问题求解

一般情况下，一个简单的利息问题包括如下几个变量：

①本金；②投资时间长度；③利率；④终值。

从代数方程的角度，知道其中的三个量，就可计算第四个量。

在计算投资的时间长度时，有时会出现不是一个度量期的情况，通常用以下公式解决：

$$\text{年数}=\frac{\text{投资期天数}}{\text{基础天数}}$$

并且在一年之内通常用单利来计算利息：

$$\text{利息}=\text{金额}\times\text{年数}\times\text{利率}$$

在国际金融领域，具体年数的确定主要有以下三种方法：

① 严格单利法(英国法或实际/实际)

投资期时间长度＝实际投资天数/对应年份的一年实际总天数

② 常规单利法(大陆法或 30/360)

该法视一年中的各个月份的天数都为 30 天，一年为 360 天，这样投资期时间长度公式为

$$\text{投资期时间长度}=\frac{\text{天数}}{360}$$

③ 银行家规则(实际/360 或欧洲货币法)

该法视实际投资天数为投资天数，一年的总天数为 360 天，这样投资期时间长度公式为

$$\text{投资时间长度}=\frac{\text{实际投资天数}}{360}$$

例题精选

例 1 按 5%的单利计算，从 6 月 4 日到 11 月 27 日，某人投资 1 000 元，求利息金额：(1)假设为严格单利；(2)假设为常规单利；(3)假设遵守银行家规则。

解 (1) 在严格单利情况下实际投资天数为

$$26+31+31+30+31+27=176$$

此时的利息为：$1\,000\times5\%\times\dfrac{176}{365}=24.109\,59$(元)

(2) 在常规单利规则下实际投资天数为

$$26+30+30+30+30+27=173$$

此时的利息为：$1\,000\times5\%\times\dfrac{173}{360}=24.027\,78$(元)

(3) 在银行家规则下实际投资天数为：176

所以此时的利息为：$1\,000\times5\%\times\dfrac{176}{360}=24.444\,4$(元)

例 2 如果现在投资 100 元，第 3 年年末投资 400 元，第 4 年年末投资 200 元，这样在第 4 年年末积累到 800 元，求实际利率。

解 依题意有方程：

$$100(1+i)^4+400(1+i)+200=800$$

解得 $i=0.115$

例 3 一家批发商面向零售商销售商品，零售商可以立即按低于零售价 36%的价格付款；或者半年后，按低于零售价 30%的价格付款，求在年利率为多少时，两种选择是等价的。

解 设该商品的零售价为 x，依题意有下述方程：

$$(1-36\%)x\cdot(1+i)^{\frac{1}{2}}=(1-30\%)\times x$$

$$\Leftrightarrow 64\%(1+i)^{\frac{1}{2}}=70\%$$

解得 $i=0.196\,29$

例 4 某人向银行借款 1 000 元，期限为 1 年，并立即收到银行 910 元，在第 8 个月末还款 300 元，假设为单贴现，问在年末该人还应付款多少？

解 依题意可知贴现率 $d=\dfrac{90}{1\,000}=9\%$

设应还款额为 X，则有下列方程：

$$(1\,000-X)(1-d\cdot t)=300 \qquad ①$$

其中 $t=\dfrac{12-8}{12}=\dfrac{4}{12}=\dfrac{1}{3}$

所以①方程变为

$$(1\,000 - X)\left(1 - \frac{1}{3} \cdot 9\%\right) = 300$$

解得 $X = 690.722$(元)

例 5 某人同他人签了一张一年期 1 000 元借据，并立即收到 940 元，在第 8 个月末，该人提前还款 392 元，并要求修改借据，问在单贴现假设下，新借据的面值为多少元？

解 设新借据的面值为 X，则有

$$(1\,000 - X)\left(1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{100}\right) = 392$$

解得 $X = 600$(元)

注：此题为中国精算师 2001 年度考题。

例 6 某厂家将某产品出售给零售商，销售商将面临两种选择：

(1) 按低于零售价 10%的价格付现款；

(2) 在半年和一年后按零售价的 48%分别付款两次。

试求使得零售商认为这两种选择没有什么不同的年复利率是多少？

解 设零售价为 X，所求利率为 i，则有

$$(1 - 10\%)X = 48\% \cdot X \cdot (1 + i)^{-\frac{1}{2}} + 48\% \cdot X \cdot (1 + i)^{-1}$$

$$\Leftrightarrow 0.9 = 0.48(1 + i)^{-\frac{1}{2}} + 0.48(1 + i)^{-1}$$

解得 $i = 9\%$

注：此题为中国精算师 2001 年度试题。

例 7 某基金的利息强度为

$$\delta_t = \begin{cases} 0.05 + 0.1t & 0 \leqslant t < 10 \\ 1.05 & 10 \leqslant t \leqslant 20 \end{cases}$$

若在时刻 6 投资 1 元，到时刻 15 的积累值为多少？

解 $S = e^{\int_6^{15} \delta_t dt} = e^{\left[\int_6^{10} (0.05 + 0.1t) dt + \int_{10}^{15} 1.05 dt\right]} = 5\,710$

例 8 某账户在某年 1 月 1 日有存款 A 元，4 月 1 日取走 50 元，7 月 1 日存入 100 元，9 月 1 日存入 30 元，这样到了次年 1 月 1 日，账户内金额为 1051 元，该年度的基金收益率为 1.12%，求 A 值及获得的利息。

解 依题意有如下方程组：

$$\begin{cases} A(1 + i) - 50(1 + i)^{\frac{8}{12}} + 100(1 + i)^{\frac{6}{12}} + 30(1 + i)^{\frac{4}{12}} = 1\,051 \\ i = 1.12\% \end{cases}$$

解得 $A = 959.95$

获得的利息为：$1\,051 - 960 - 100 - 30 + 50 = 11$

例 9 已知某基金以 $\delta_t = 0.073\,303\,3 \cdot t$ 计息，问在 $t = 0$ 时的 300 元存款在 $t = 5$ 时

的积累值为多少？

解 $A(5) = 300e^{\int_0^5 0.0733033t dt}$

$= 300 \times 2.5 = 750$

例 10 一投资者投资 1 元于基金甲中，同时在基金乙中也投入 1 个单位的资金，基金乙以复利计息，j 为年利率；甲基金以单利计息，年利息率为 $1.05j$。已知在第 2 年年末，两基金的积累值一样，求在第 6 年年末基金乙中的金额。

解 依题意有下述方程：

$$(1+j)^2 = 1.05j \times 2 + 1$$

解得 $j=0$ 或 0.1

所以所求的金额为

$$(1+j)^6 = \begin{cases} 1, & j = 0 \\ 1.77156, & j = 0.1 \end{cases}$$